

Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244e728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)**

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ГЕОМЕТРИЯ.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

*Методические рекомендации по выполнению контрольных работ
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)*

*Направленность (профиль)
«Математика и Информатика», «Математика и Физика»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151.5я73
П 47

Позднякова Е.В.

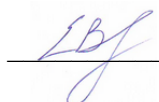
П 47 Геометрия. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве: методические рекомендации по выполнению контрольных работ для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020 – 49 с.

В работе изложены методические рекомендации по выполнению контрольных работ по дисциплине «Геометрия» (модуль «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»): основные теоретические сведения, варианты контрольных работ и образцы их решения, методические рекомендации по решению и оформлению работы, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика».

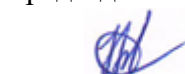
Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 2 от 16.09.2020

И.о. заведующего каф. МФММ

 / Е.А. Вячкина

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 1 от 24.09.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ

 / Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:514](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.151.5я73
П 47

© Позднякова Елена Валерьевна
© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2020
Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	6
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	9
<i>АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.....</i>	<i>9</i>
Простейшие задачи в координатах	9
Прямая на плоскости	9
Кривые второго порядка.....	12
Эллипс	13
Окружность.....	14
Гипербола	14
Парабола	15
Формулы преобразования координат.....	16
Полярные координаты на плоскости	17
<i>АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.....</i>	<i>18</i>
Плоскость в пространстве.....	18
Прямая в пространстве	19
Прямая и плоскость в пространстве	21
Поверхности второго порядка.....	22
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ №1 «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ	
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ»	24
Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы	
№ 1	24
Требования к выполнению и оформлению контрольной работы № 1	27
Варианты контрольной работы № 1	28
Образец решения варианта контрольной работы № 1	32
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ №2 «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ	
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ».....	39
Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы	
№ 2.....	39
Требования к выполнению и оформлению контрольной работы № 2.....	41

Варианты контрольной работы № 2	43
Образец решения варианта контрольной работы № 2	44
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	48
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ.....	49

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении контрольных работ по дисциплине «Геометрия» (модуль «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»), которая относится к вариативной части учебного плана и является обязательной дисциплиной.

Методические указания подготовлены на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования в соответствии с учебным планом направлений подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (уровень бакалавриата) и рабочей учебной программы по предмету, они разработаны для студентов очной и заочной форм обучения.

Целью изучения дисциплины «Геометрия» является: формирование геометрической культуры студента, подготовка в области алгебраического анализа геометрических объектов, овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях, вооружение конкретными знаниями, дающими возможность преподавать данный предмет в школе, осуществлять квалифицированную подготовку учащихся к государственной итоговой аттестации по математике.

Задачи модуля «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»: сформировать понимание значимости данной темы в будущей профессиональной деятельности учителя математики; ознакомить с основными понятиями и методами аналитической геометрии; сформировать представление о применении методов аналитической геометрии для решения задач элементарной математики, а также задач прикладного характера; развитие умений целесообразного выбора и использования компьютерных технологий для построения геометрических чертежей разной степени сложности.

В результате освоения дисциплины у обучающегося должны быть сформированы профессиональные (специальные профессиональные) компетенции, обеспечивающие готовность к реализации образовательного процесса в предметной области “Математика”.

Студент, изучивший дисциплину «Геометрия», должен:

Знать:

- основные понятия, теоремы и методы геометрии;
- особенности построения аргументации, причинно-следственных связей, доказательных рассуждений в устной и письменной речи;
- основные понятия, теоремы и методы геометрии курса математики основной и средней школы

Уметь:

- осуществлять трансформацию специальных научных знаний по геометрии в соответствии с психофизиологическими, возрастными, познавательными особенностями обучающихся;
- применять теоремы и методы геометрии к решению прикладных и практических задач;
- доказывать свое решение, аргументировать свою позицию на основе методов научного познания (индукции, дедукции, аналогии) в устной и письменной речи;
- решать нестандартные, творческие, исследовательские задачи школьного курса математики методами геометрии;

Владеть:

- методами научного исследования в области геометрии;
- приемами поиска доказательства, аргументации решения задачи;
- приемами, методами, алгоритмами геометрии, включенными в содержание образовательной программы в предметной области “Математика” в системе основного и среднего общего образования

В методические рекомендации включено:

- 1) основные теоретические сведения (основные понятия, формулы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве);
- 2) особенности оценивания контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;
- 3) варианты контрольных работ и образцы их решения;
- 4) требования к выполнению и оформлению контрольной работы;
- 5) список рекомендуемой литературы
- 6) список современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Основные теоретические сведения по дисциплине иллюстрируются соответствующими примерами, необходимыми чертежами.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает современные источники; указана литература основная и дополнительная. Помощь в изучении дисциплины могут оказать рекомендуемые профессиональные базы данных, информационные справочные системы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Простейшие задачи в координатах

- Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Координаты точки $C(x, y)$, которая делит отрезок, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$; $\lambda \neq -1$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

- Координаты середины отрезка AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Условие принадлежности трёх точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) одной прямой

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) (знак выбирается так, чтобы площадь была неотрицательной)

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Прямая на плоскости

- Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

- Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}\{A; B\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

- Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\vec{p}\{l; m\}$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

- Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\vec{p}\{l; m\}$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}, t \in (-\infty, \infty)$$

- Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , где $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ — угол наклона прямой к оси Ox

$$y = kx + b, k = \operatorname{tg} \alpha$$

- Уравнение прямой в отрезках, где $(a; 0)$ и $(0; b)$ — координаты точек пересечения прямой с осями Ox и Oy ($a \neq 0, b \neq 0$)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- Нормальное уравнение прямой, где p — расстояние от начала координат до прямой, α — угол между осью Ox и перпендикуляром к прямой, проходящим через начало координат

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

- Расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Координаты точек пересечения двух прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

- Координаты точек пересечения прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \\ y_0 = \frac{b_2k_1 - b_1k_2}{k_1 - k_2} \end{cases}$$

- Условия параллельности прямых, заданных в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и в виде $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, k_1 = k_2$$

- Условия перпендикулярности прямых, заданных в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и в виде $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, k_1k_2 = -1$$

- Острый угол α между двумя прямыми, заданными в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и в виде $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ ($k_1k_2 \neq -1$)

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|, \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|$$

Кривые второго порядка

Установим на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим общее уравнение второй степени : $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, где $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0$

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, называется кривой (линией) второго порядка.

Для всякой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, называемая канонической, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс);

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс);

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых);

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола);

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара пересекающихся прямых);

6) $y^2 = 2px$ (парабола);

7) $y^2 - a^2 = 0, a \neq 0$ (пара параллельных прямых);

8) $y^2 + a^2 = 0, a \neq 0$ (пара мнимых параллельных прямых);

9) $y^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Уравнения 1) – 9) называются каноническими уравнениями кривых второго порядка.

Эллипс

Эллипс — геометрическое место всех точек $M(x, y)$ плоскости, для которых сумма расстояний до двух заданных точек $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ (называемых фокусами эллипса) постоянна и равна $2a(a > c)$.

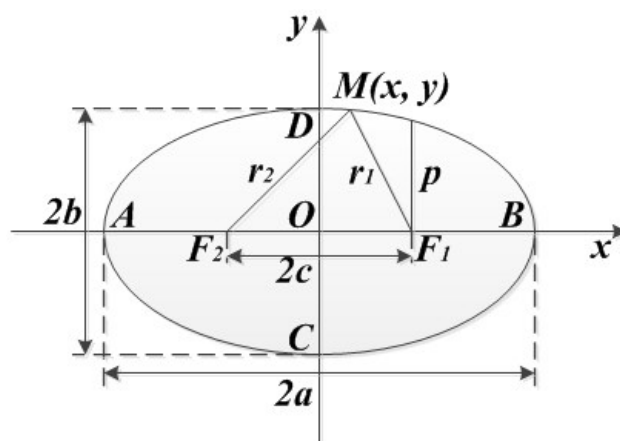


Рис. 1. Чертеж эллипса и его основных элементов

$$|\overrightarrow{F_1 M}| + |\overrightarrow{F_2 M}| = 2a \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{F_1 F_2}| = 2c, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

- Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Элементы эллипса: точка O — центр; точки A, B, C, D — вершины; точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — фокусы; $2c$ — фокусное расстояние; $AB = 2a$ и $CD = 2b$ — большая и малая оси; a и b — большая и малая полуоси; $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, ($e < 1$) — эксцентриситет эллипса (чем больше e , тем более вытянут эллипс вдоль большой оси); $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр (половина хорды, проведённой через фокус параллельно малой оси).

- Уравнения правой и левой директрис: $x = \pm \frac{a}{e}$

- Параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a \times \cos t \\ y = b \times \sin t \end{cases},$$

где t — параметр, $t \in [0, 2\pi)$;

(t — угол, образованный подвижным радиусом с положительным направлением оси Ox).

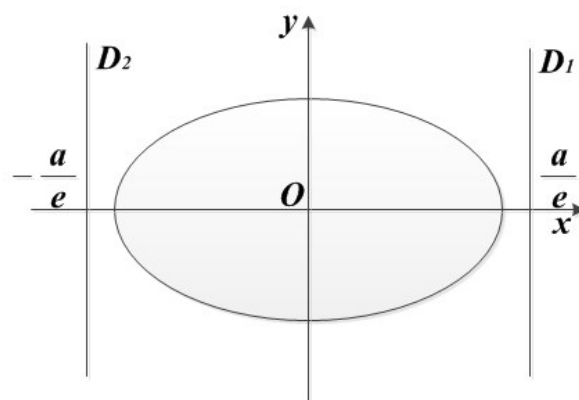


Рис. 2. Чертеж эллипса и его директрис

- Уравнение эллипса в полярных координатах, связанных с фокусом:

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e \times \cos \varphi}.$$

Окружность

- Окружность — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки O (центр).
- Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.
- Уравнение окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- Параметрические уравнения окружности с радиусом R и центром в точке (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x = x_0 + R \times \cos t \\ y = y_0 + R \times \sin t \end{cases}$$

- Уравнение окружности в полярных координатах с центром в начале координат: $\rho = R$.

- Уравнение окружности с центром в точке (α_0, ϕ_0) в полярных координатах:

$$\rho^2 - 2 \times \rho \times \rho_0 \times \cos(\phi - \phi_0) + \rho_0^2 = R^2$$

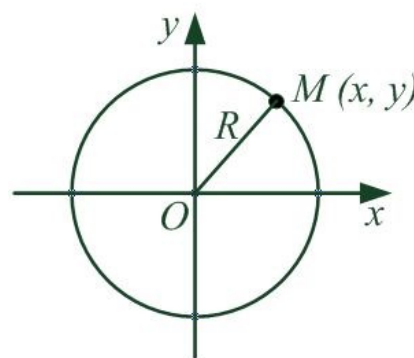


Рис. 3. Чертеж окружности в прямоугольной системе координат

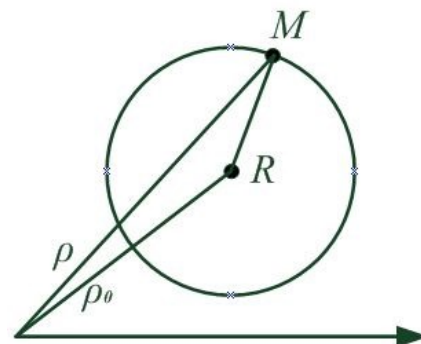


Рис. 4. Чертеж окружности в полярной системе координат

Гипербола

- Гипербола — геометрическое место всех точек $M(x, y)$, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух заданных точек $F_1(+c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ (называемых фокусами гиперболы) постоянна и равна $2a$ ($a < c$).

$$|\overrightarrow{F_1 M}| - |\overrightarrow{F_2 M}| = 2a \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{F_1 F_2}| = 2c, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

- Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Элементы гиперболы: точка O – центр; точки A и B – вершины; точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ – фокусы; $2c$ – фокусное расстояние; $AB=2a$ – действительная ось гиперболы; $CD=2b$ – мнимая ось гиперболы; $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, ($e > 1$) — эксцентриситет гиперболы; $y = \pm \frac{b}{a}x$ — асимптоты гиперболы; $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр гиперболы.

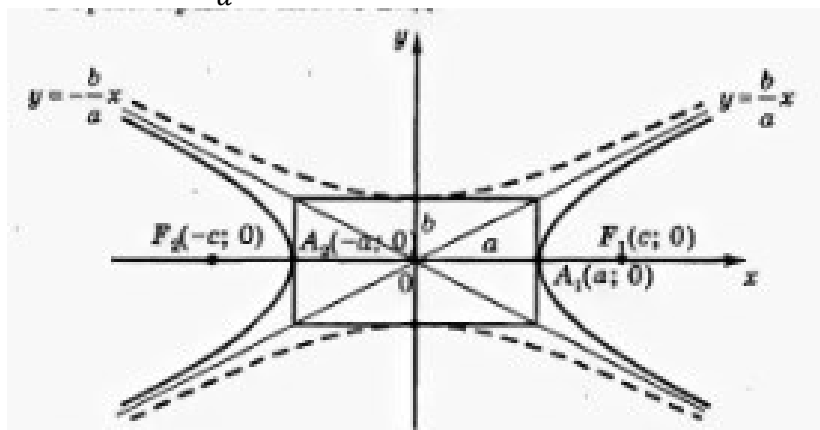


Рис. 5. Чертеж гиперболы и ее основных элементов в прямоугольной системе координат

- Уравнения директрис гиперболы: $x = \mp \frac{a}{e}$

- Параметрические уравнения одной ветви гиперболы:

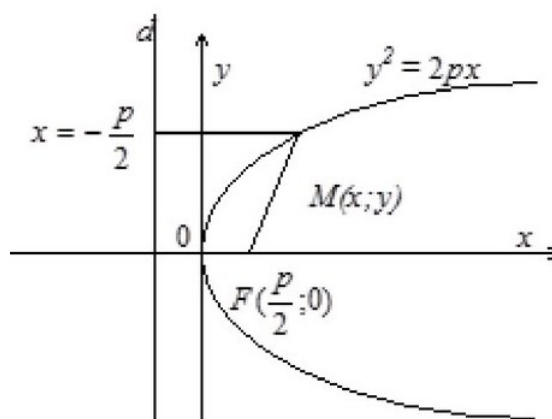
$$\begin{cases} x = a \cosh t, \\ y = b \sinh t, \end{cases} t \in (-\infty, \infty)$$

- Уравнение правой ветви гиперболы в полярных координатах, связанных с фокусом: $\rho = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{1 - e \cos \varphi}$

Парабола

- *Парабола* — геометрическое место точек $M(x, y)$, равноудалённых от заданной точки $F(p/2, 0)$ (фокус) и от данной прямой (директрисы).

$$|\overrightarrow{FM}| = |\overrightarrow{MK}|, |\overrightarrow{MK}| = \frac{p}{2} + x.$$



- Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$

Рис. 6. Чертеж параболы и ее основных элементов в прямоугольной системе координат

- Элементы параболы: точка O — вершина; Ox — ось параболы; точка $F(p/2, 0)$ — фокус; $x = -\frac{p}{2}$ — уравнение директрисы; $e = 1$ — эксцентриситет; p —

фокальный параметр (расстояние от фокуса до директрисы или половины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси OX).

- Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) :

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Уравнение параболы в полярных координатах, связанных с фокусом:

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

- Параметрические уравнения параболы:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2 \times p \times t} \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

Формулы преобразования координат

- Формулы преобразования координат при параллельном переносе координатных осей в точку (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' - x_0, \\ y = y' - y_0. \end{cases}$$

- Уравнение окружности с центром в точке $O_1 (x_0, y_0)$ и радиусом R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

- Уравнения эллипса и гиперболы с центром симметрии в точке $O_1 (x_0, y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Уравнения директрис эллипса и гиперболы:

$$x - x_0 = \pm \frac{a}{e}$$

- Уравнения асимптот гиперболы:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a} (x - x_0)$$

- Уравнение параболы с вершиной в точке $O_1 (x_0, y_0)$:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

- Уравнение директрисы параболы:

$$x-x_0 = -\frac{p}{2}$$

- Формулы преобразования координат при повороте координатных осей на угол α в положительном (против часовой стрелки) направлении:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

- Формулы преобразования координат при параллельном переносе координатных осей в точку (x_0, y_0) и повороте их на угол α в положительном направлении:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (x-x_0) \cos \alpha + (y-y_0) \sin \alpha, \\ y = -(x-x_0) \sin \alpha + (y-y_0) \cos \alpha. \end{cases}$$

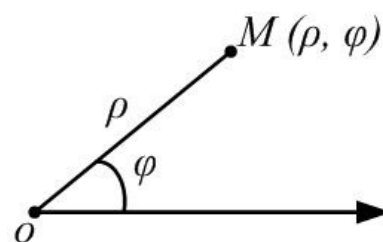


Рис. 7. Полярная система координат

Полярные координаты на плоскости

Полярные координаты определяются заданием на плоскости полюса O и полярной оси.

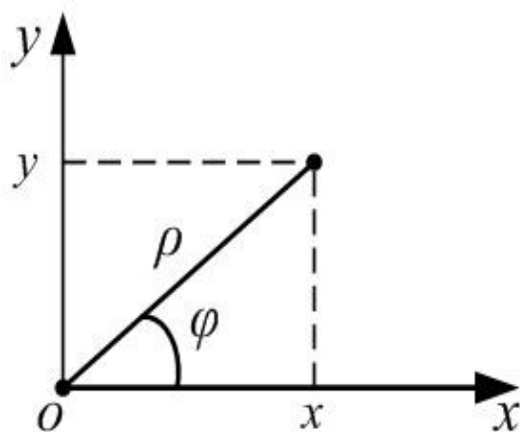


Рис. 8. Связь декартовой и полярной систем координат

Координаты точки M в полярных координатах задаются длиной радиус-вектора $|\overline{OM}| = \rho$ этой точки и углом его поворота относительно полярной оси. При этом $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

- Связь полярных координат с декартовыми:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

В полярных координатах кривые второго порядка имеют уравнения:

$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$, если полюс находится в фокусе, полярная ось направлена из фокуса к ближайшей вершине (для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь); p – фокальный параметр, e – эксцентриситет кривой.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве

- Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- Уравнение плоскости «в отрезках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- Нормальное уравнение плоскости (p – расстояние от начала координат до плоскости, $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ — единичный вектор нормали к плоскости):
 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$.
- Нормальный вид общего уравнения плоскости (знак нормирующего множителя противоположен знаку D):

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

- Расстояние от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной общим уравнением: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

- Уравнение плоскости, проходящей через три точки $(x_i; y_i; z_i)$ ($i=1, 2, 3$):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Угол φ между плоскостями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, ($i = 1, 2$):

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- Условие параллельности плоскостей $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, ($i = 1, 2$):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

- Условие перпендикулярности плоскостей $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, ($i = 1, 2$):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

- Расстояние между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Прямая в пространстве

- Общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{p}\{l, m, n\}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

- Уравнения прямой в виде проекций на координатные плоскости

$$\begin{cases} mx - ly + (ly_0 - mx_0) = 0 \\ nx - mz + (mz_0 - ny_0) = 0 \\ nx - lz + (lz_0 - nx_0) = 0 \end{cases}$$

- Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

- Соотношения между координатами направляющего вектора прямой и коэффициентами общих уравнений прямой

$$\begin{cases} l = B_1 C_2 - B_2 C_1 \\ m = C_1 A_2 - C_2 A_1 \\ n = A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{cases}$$

- Канонические уравнения прямой, проходящей через точки с координатами $(x_i; y_i; z_i); \quad i = 1, 2$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

- Угол φ между прямыми с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$

$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

- Условие параллельности двух прямых с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- Условие перпендикулярности двух прямых с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

Прямая и плоскость в пространстве

- Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, заданную общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- Координаты точки пересечения прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt_1 \\ y = y_0 + mt_1 \\ z = z_0 + nt_1 \end{cases},$$

$$t_1 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

- Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

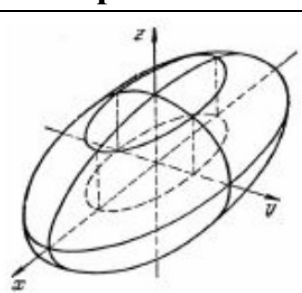
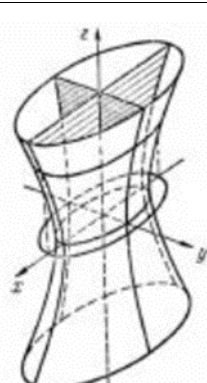
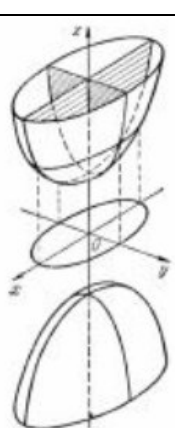
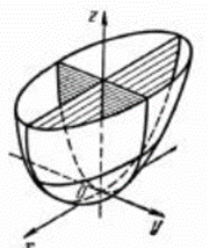
- Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

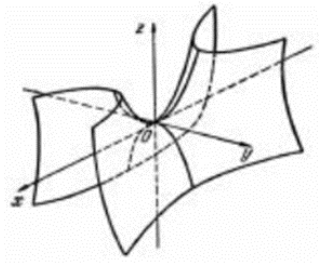
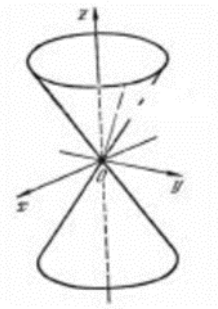
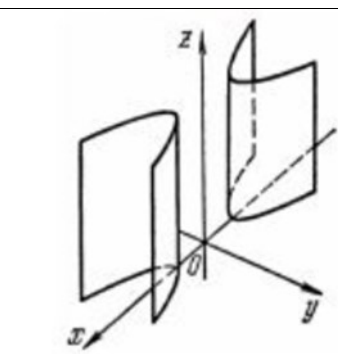
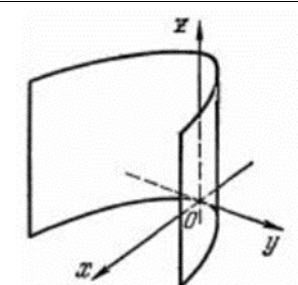
$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

- Условие параллельности прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Поверхности второго порядка

Название поверхности	Уравнение поверхности	Изображение поверхности
эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz$	

гиперболический параболоид	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz$	
конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
параболический цилиндр	$y^2 = 2px, \quad p \neq 0$	

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ №1 «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ»

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы № 1

Контрольная работа № 1 “Решение задач аналитической геометрии на плоскости” является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Геометрия”, (модуль “Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве”), а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа № 1 по геометрии направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по геометрии;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится четыре задачи, для решения которых требуется применить метод координат.

За правильное выполнение первого и второго заданий выставляется по два балла. Третье задание оценивается в три балла, четвертое - в четыре балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Определить координаты точки, применяя формулы преобразования координат. Сделать чертеж.	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа) ИЛИ представлено верное решение, но чертеж отсутствует.	1
2	Составить уравнение геометрического места точек по заданному условию. Сделать чертеж в прямоугольной системе координат	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения (и / или в построении чертежа) ИЛИ представлено верное решение, но чертеж отсутствует.	1
3	Составить уравнение кривой второго порядка, используя ее	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены	3

	свойства и элементы. Сделать чертеж	верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения ИЛИ представлено верное решение, но чертеж отсутствует.	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического характера.	1
4	Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить ее в системе координат	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные выводы. Сделан правильный, точный чертеж	4
		Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные выводы. Чертеж сделан неверно или отсутствует. ИЛИ Задача решена логически верно, сделан правильный чертеж, но в решении имеется вычислительная ошибка	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена логическая ошибка на одном из этапов решения. Имеются ошибки в построении чертежа.	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического и вычислительного характера. Имеются ошибки в построении чертежа	1

ИТОГО	максимум 11
-------	-------------

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы №1

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя). Допускается выполнение работы в электронном виде.

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по геометрии

“Решение задач аналитической геометрии на плоскости”

студентки факультета информатики, математики и экономики

4 курса группы МИА-18 Ивановой Елизаветы Валерьевны

Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

- а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;
- б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;
- в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним. Чертежи обязательны, желательно при построение чертежа применять цвет. Чертежи можно выполнять с помощью компьютерных программ (например “Живая математика” или “GeoGebra”).
6. Задачи №№ 1, 2 оцениваются в 2 балла. Задача № 3 оценивается в 3 балла, задача № 4 – в 4 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 11 баллов. Если набрано менее 6 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.
7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

Варианты контрольной работы № 1

ВАРИАНТ 1

1. Найти координаты точек $M(3;1)$, $N(-1;5)$, $P(-3;-1)$ в новой системе координат, если оси координат повернуты вокруг начала координат на угол (-45°) .
2. Вывести уравнение геометрического места точек, удаленных от прямой $8x - 15y - 25$ на 2 единицы. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены от оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точка $M(2; -\frac{5}{3})$ эллипса и его эксцентриситет $e = \frac{2}{3}$.
4. Привести уравнение кривой $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 2

1. Найти координаты точек $M(3;1)$, $N(-1;5)$, $P(-3;-1)$ в новой системе координат, если оси координат повернуты вокруг начала координат на угол 90° .

2. Дан треугольник ABC: $A(-2;1)$, $B(8;2,5)$, $C(2;-2)$. Написать уравнения медианы CM и биссектрисы СК. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение параболы, если дан ее фокус $F(4;3)$ и уравнение директрисы $y+1=0$.
4. Привести уравнение кривой $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 3

1. Определить координаты точки O' нового начала координат, если точка $A(3;-4)$ лежит на новой оси абсцисс, а точка $B(2;3)$ лежит на новой оси ординат, причем оси старой и новой систем координат имеют соответственно одинаковые направления.
2. Даны две смежные вершины квадрата $A(-2;0)$, $B(1;4)$. Составить уравнения всех сторон квадрата. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение параболы, если дан ее фокус $F(7;2)$ и уравнение директрисы $x-5=0$.
4. Привести уравнение кривой $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 4

1. Система координат XOY повернута на угол $\alpha=\arctg(-0,75)$. Найти координаты точки A в старой системе координат, если в новой системе координат ее координаты $(5;-5)$.
2. Написать уравнение множества точек, удаленных от прямой $4x-3y=0$ на 4 единицы. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение параболы с фокусом в точке $A(-5;3)$ и директрисой $3x-4y-5=0$.
4. Привести уравнение кривой $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 5

1. Начало координат перенесено в точку $O'(-1;2)$, оси координат повернуты на угол $\alpha = \arctg \frac{5}{12}$. Точка $M(3;2)$ определена в новой системе координат. Найти ее координаты в старой системе.
2. Составить уравнение множества точек, удаленных от прямой $2x-y-4=0$ в 3 раза дальше, чем от прямой $2x+y-4=0$. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \frac{13}{12}$, фокус $F(0;13)$ и уравнение соответствующей директрисы $13y-144=0$.
4. Привести уравнение кривой $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 6

1. Даны три точки $A(5;5)$, $B(2;-1)$, $C(12;-6)$. Найти их координаты в новой системе координат, если начало координат перенесено в точку B , а оси координат повернуты на угол $\alpha = \arctg 0,75$.
2. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $2x+3y-10=0$ и $3x+2y-10=0$. Сделать чертеж в системе координат.
3. Написать уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y=0,75x$, $y=-0,75x$ и уравнения директрис $x=\frac{16}{3}$, $x=-\frac{16}{3}$.
4. Привести уравнение кривой $9x^2-6xy+y^2+12x-4y+3=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 7

1. Даны две точки $M_1(9;-3)$ и $M_2(-6;5)$. Начало координат перенесено в точку M_1 , а оси координат повернуты так, что положительное направление совпадает с направлением отрезка M_1M_2 . Найти координаты точки O в новой системе координат.

2. Точка $A(5;1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x-3y-7=0$. Составить уравнения остальных сторон квадрата. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если даны точка $M(4,5;-1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$.
4. Привести уравнение кривой $9x^2-24xy+16y^2+18x+226y+209=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 8

1. Оси координат повернуты на угол 60° . Координаты точек $A(2\sqrt{3};-4)$, $B(\sqrt{3};0)$, $C(0;-2\sqrt{2})$ определены в новой системе координат. Найти их координаты в старой системе координат.
2. Дан треугольник ABC : $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(-2;1)$. Написать уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины A на медиану CM . Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, если даны точка $M(-3;2,5)$ гиперболы и уравнения директрис $x=\frac{4}{3}$, $x=-\frac{4}{3}$.
4. Привести уравнение кривой $9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 9

1. Написать формулы преобразования координат, если точка $A(2;-3)$ лежит на новой оси абсцисс, а точка $B(1;-7)$ лежит на новой оси ординат, причем оси новой и старой систем координат имеют соответственно одинаковые направления.
2. Дан треугольник ABC : $A(-2;1)$, $B(10;-4)$, $C(7,5;2)$. Написать уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины B . Сделать чертеж в системе координат.

3. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если даны точка $M(-\sqrt{5}, 10)$ эллипса и расстояние между директрисами, равное 10.
4. Привести уравнение кривой $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 30x + 40y - 50 = 0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

ВАРИАНТ 10

1. Начало координат перенесено в точку $O'(-1; 2)$, оси координат повернуты на угол $\alpha = \arctg \frac{5}{12}$. Координаты точки $M(2; -3)$ определены в новой системе координат. Вычислить координаты этой точки в старой системе координат.
2. На оси OX найти точку, удаленную от прямой $4x - 3y + 2 = 0$ на 2 единицы. Сделать чертеж в системе координат.
3. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $e = 0,5$, фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $y + 3 = 0$.
4. Привести уравнение кривой $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

Образец решения варианта контрольной работы № 1

Вариант 0

1. Начало координат перенесено в точку $O'(1; 3)$, оси координат повернуты на угол $\alpha = 60^\circ$. Координаты точки $M(-2; 3)$ определены в новой системе координат. Вычислить координаты этой точки в старой системе координат. Сделать чертеж.

Решение:

Сначала выполним чертеж в системе координат. Для этого строим прямоугольную систему координат XOY , затем поворачиваем оси OX и OY вокруг начала координат на угол 60° в положительном направлении, а затем полученные оси переносим в точку $O'(1; 3)$ (единица масштаба в новой системе координат $X'O'Y'$ остается той же, что и в системе XOY).

В новой системе координат $X'O'Y'$ строим точку M по координатам $(-2; 3)$.

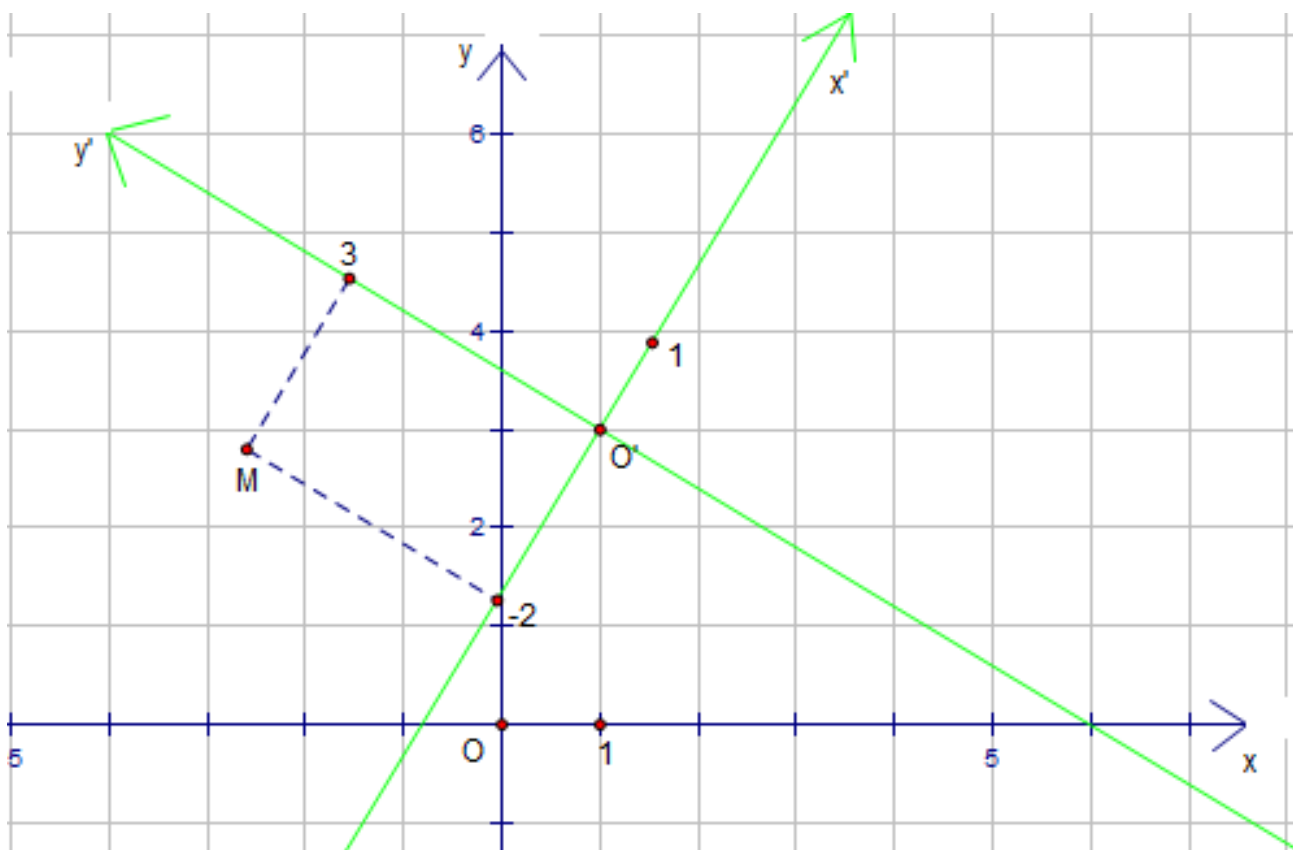


Рис. 9. Чертеж к задаче № 1 контрольной работы “Аналитическая геометрия на плоскости”

Найдем координаты точки M по формулам:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{cases}$$

Так как $\alpha = 60^\circ$, то $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $O'(1; 3)$, значит $a = 1, b = 3$

Имеем следующие формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 3 \end{cases}, \text{ где } (x, y) - \text{ координаты точки в старой системе координат}$$

$ХОУ, (x', y')$ - координаты точки в новой системе координат $X'O'Y'$.

$M(-2; 3)$, значит $x' = -2, y' = 3$. Найдем x и y по формулам:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot (-2) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 3 + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{9}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $M(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2} - \sqrt{3})$

2. На оси ОУ найти точку, удаленную от прямой $3x-4y+12=0$ на 3 единицы. Сделать чертеж в системе координат.

Решение:

Пусть искомая точка $M(x; y)$ лежит на оси ОУ, тогда $x=0$, значит, будем искать точку $M(0; y)$. Известно расстояние от точки M до данной прямой l , т.е. $\rho(M, l) = 3$.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой l с уравнением $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле: $\rho = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Так как $M(0; y)$, $l: 3x-4y+12=0$ и $\rho(M, l) = 3$, то составляем уравнение:

$$\frac{|-4y + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3$$

$$|-4y + 12| = 15$$

$$\begin{cases} 12 - 4y = 15 \\ 12 - 4y = -15 \end{cases} \quad \begin{cases} -4y = 3 \\ -4y = -27 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{27}{4} \end{cases}$$

Так как получили два значения y , то имеем две искомые точки: $M_1(0; -\frac{3}{4})$; $M_2(0; \frac{27}{4})$.

Выполняем чертеж в системе координат, т.е. строим прямую l по уравнению $3x-4y+12=0$ и точки $M_1(0; -\frac{3}{4})$; $M_2(0; \frac{27}{4})$.

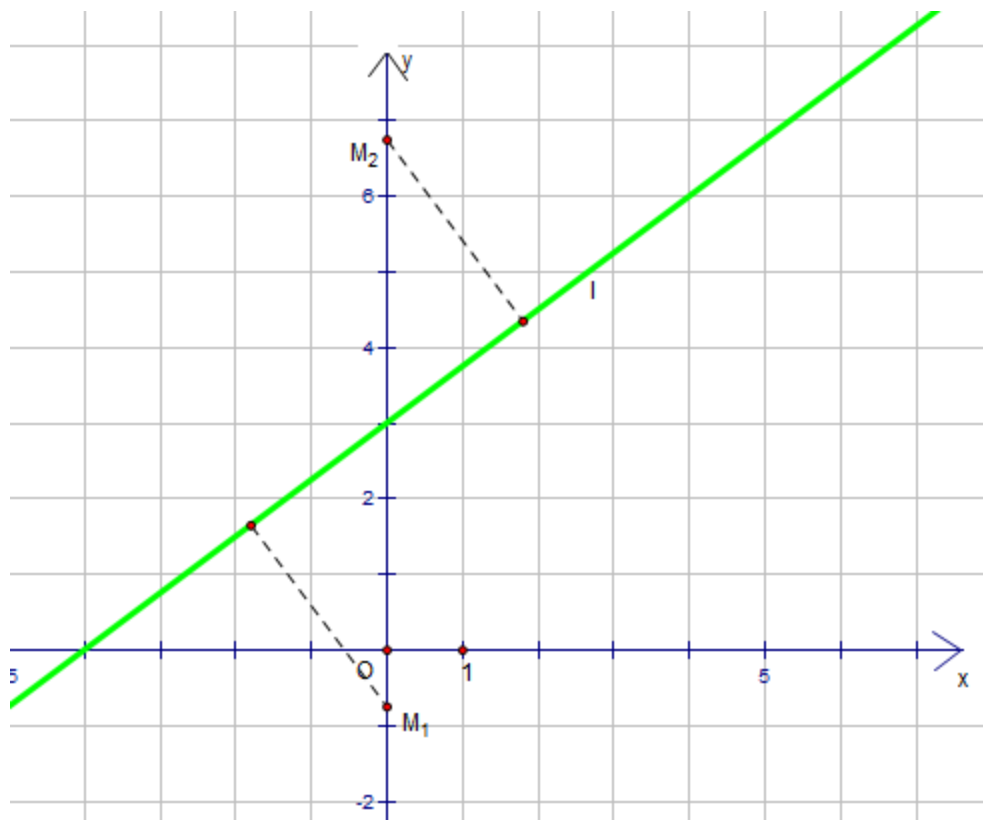


Рис. 10. Чертеж к задаче № 2 контрольной работы “Аналитическая геометрия на плоскости”

3. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $e=0,4$, фокус $F(4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x+3=0$.

Решение:

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу. Тогда по директориальному свойству кривой второго порядка: $\frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = e$.

$$\rho(M, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}$$

$$\rho(M, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + 3|$$

Итак, получаем равенство: $\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = 0,4 \cdot |x + 3|$

$0,4 = \frac{2}{5}$. Тогда $5\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = 2 \cdot |x + 3|$

Возведем в квадрат обе части равенства:

$$25(x - 4)^2 + 25(y - 1)^2 = 4(x + 3)^2$$

Упростим получившееся уравнение:

$$25x^2 - 200x + 400 + 25(y - 1)^2 - 4x^2 - 24x - 36 = 0$$

$$21x^2 - 224x + 25(y - 1)^2 = -364$$

Выделяем полный квадрат для x:

$$21\left(x^2 - 2\frac{112}{21}x + \left(\frac{112}{21}\right)^2 - \left(\frac{112}{21}\right)^2\right) + 25(y - 1)^2 = -364$$

$$21\left(x^2 - 2\frac{112}{21}x + \left(\frac{112}{21}\right)^2\right) - \frac{112^2}{21} + 25(y - 1)^2 = -364$$

$$21\left(x - \frac{112}{21}\right)^2 + 25(y - 1)^2 = -364 + \frac{12544}{21}$$

$$21\left(x - \frac{112}{21}\right)^2 + 25(y - 1)^2 = \frac{4900}{21}$$

Поделим обе части уравнения на дробь $\frac{4900}{21}$.

$$\left(\frac{21}{70}\right)^2 \left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \frac{25 \cdot 21}{4900} (y - 1)^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(x - \frac{16}{3}\right)^2 + \frac{3}{28} (y - 1)^2 = 1$$

$$\frac{\left(x - \frac{16}{3}\right)^2}{\frac{100}{9}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{28}{3}} = 1$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $C(\frac{16}{3}; 1)$ и полуосями $a = \frac{10}{3}$; $b =$

$$\sqrt{\frac{28}{3}}$$

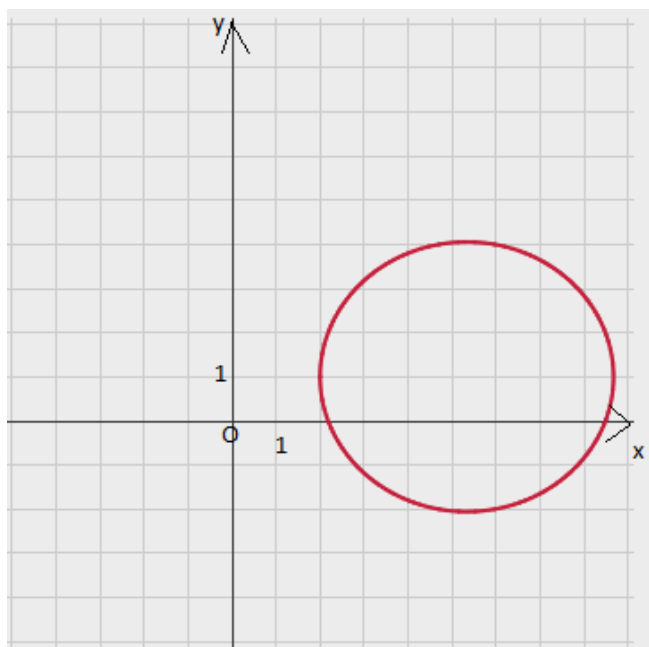


Рис. 11. Чертеж к задаче № 3 контрольной работы “Аналитическая геометрия на плоскости”

4. Привести уравнение кривой $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 2x - 14y - 13 = 0$ к каноническому виду и построить ее в системе координат.

Решение:

Воспользуемся алгоритмом приведения кривой второго порядка $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ к каноническому виду:

1. Выписываем коэффициенты $a_{11}, a_{22}, 2a_{12}, 2a_{13}, 2a_{23}, a_{33}$
2. Находим угол поворота координатных осей φ из уравнения:

$$a_{12}tg^2\varphi - (a_{22} - a_{11})tg\varphi - a_{12} = 0$$

3. Находим $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ по формулам: $1 + tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$;

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

4. Находим новые коэффициенты уравнения кривой по формулам:

$$b_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$$

$$b_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$$

$$b_{13} = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi$$

$$b_{23} = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi$$

$$b_{33} = a_{33}$$

5. Записываем уравнение кривой с новыми коэффициентами

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0$$

1. Выписываем коэффициенты $a_{11} = 3, a_{22} = 3, 2a_{12} = -10, 2a_{13} = 2, 2a_{23} = -14, a_{33} = -13$.

$$a_{11} = 3, a_{22} = 3, a_{12} = -5, a_{13} = 1, a_{23} = -7, a_{33} = -13$$

2. Находим угол поворота координатных осей φ из уравнения:

$$-5tg^2\varphi - (3 - 3)tg\varphi + 5 = 0$$

$$tg^2\varphi = 1; tg\varphi = \pm 1$$

Удобнее выбирать положительное значение $tg\varphi$, так как в этом случае $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, значит $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ принимают только положительные значения.

3. $tg\varphi = 1; \varphi = 45^\circ; \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Находим новые коэффициенты уравнения кривой по формулам:

$$b_{11} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = -2$$

$$b_{22} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$b_{13} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$b_{23} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2}$$

$$b_{33} = -13$$

6. Записываем уравнение кривой с новыми коэффициентами:

$$-2x^2 + 8y^2 - 6\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y - 13 = 0$$

$$2x^2 - 8y^2 + 6\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 13 = 0$$

$$2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{9}{2}\right) - 9 - 8\left(y^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}\right) + 4 + 13 = 0$$

$$2\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -8$$

Разделим обе части уравнения на -8:

$$\frac{\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1} - \frac{\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4} = 1$$

Выполним замену переменных: $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = y'$; $x + \frac{3\sqrt{2}}{2} = x'$

Таким образом, имеем параллельный перенос координатных осей в точку $O'(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ и поворот координатных осей на угол $\varphi=45^\circ$.

$\frac{y'^2}{1} - \frac{x'^2}{4} = 1$ – уравнение гиперболы, $a=2$ – мнимая полуось; $b=1$ – действительная полуось.

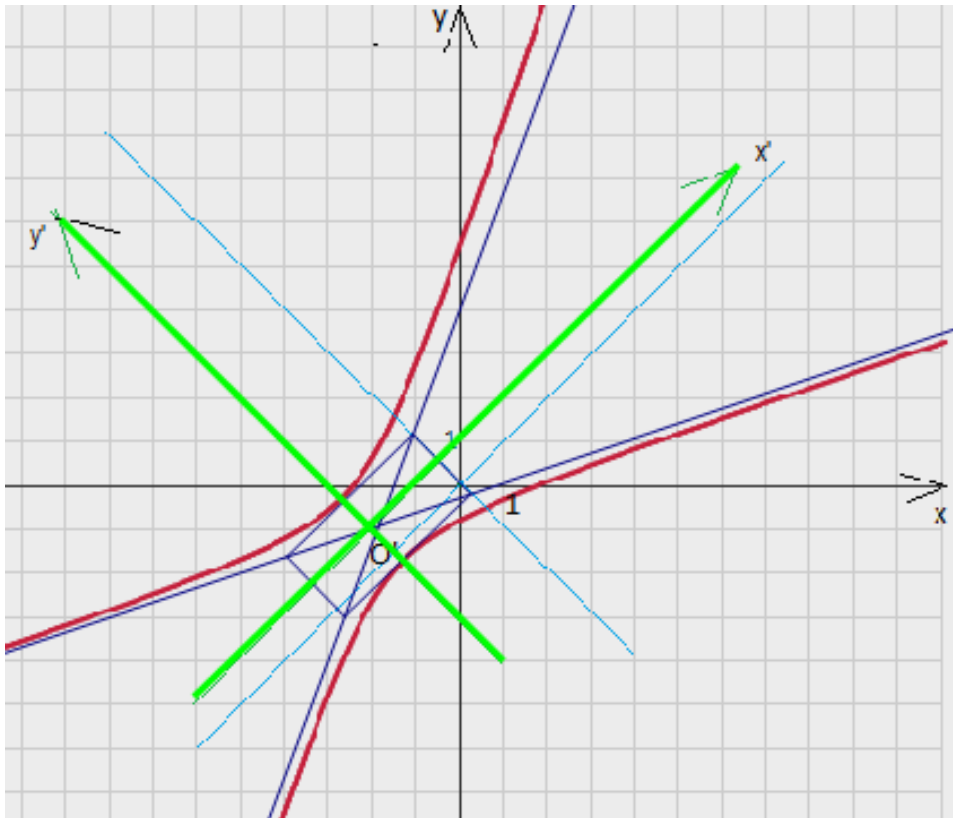


Рис. 12. Чертеж к задаче № 4 контрольной работы “Аналитическая геометрия на плоскости”

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ГЕОМЕТРИИ №2 «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы № 2

Контрольная работа № 2 “Решение задач аналитической геометрии в пространстве” является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Геометрия”, (модуль “Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве”), а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа по геометрии № 2 направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по геометрии;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В каждом из десяти вариантов содержится 7 задач, для решения которых требуется применить метод координат.

За правильное выполнение задач №№ 1.1, 1.4, 1.5, 1.6 выставляется по одному баллу. Задачи №№ 1.2, 1.3 и 2 оцениваются в два балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1.1	Построить пирамиду ABCD в прямоугольной декартовой системе координат	Выполнен верный, аккуратный, наглядный чертеж пирамиды в прямоугольной системе координат. Имеется приложение в виде чертежа пирамиды в онлайн-сервисе	1
		Выполнен верный, аккуратный, наглядный чертеж пирамиды в прямоугольной системе координат “от руки”. Отсутствует приложение в виде чертежа пирамиды в онлайн-сервисе	0,5
1.2	Составить уравнение граней ABC, BCD пирамиды ABCD.	Задача решена верно. Логично и последовательно выполнены все этапы решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена вычислительная ошибка на одном из этапов решения	1
1.3	Написать уравнение перпендикуляра из точки D на грань ABC, найти его длину и точку падения на ABC (основание перпендикуляра);	Задача решена верно. Логично и последовательно выполнены все этапы решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получены верные выводы.	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ допущена вычислительная ошибка на одном из этапов решения	1
1.4	Найти угол между прямой AC и гранью BCD	Задача решена верно. Логически обоснованы все этапы решения, получены верные выводы	1

1.5	Найти угол между гранями ABC и BCD.	Задача решена верно. Логически обоснованы все этапы решения, получены верные выводы	1
1.6	Найти угол между прямыми AD и BC	Задача решена верно. Логически обоснованы все этапы решения, получены верные выводы	1
2	В прямоугольной декартовой системе координат поверхность задана своим уравнением. Построить ее в системе координат OXYZ.	Задача решена верно. Обоснованно определен вид поверхности, выполнен аккуратный, правильный чертеж. Имеется приложение в виде чертежа поверхности в онлайн-сервисе	2
		Задача решена верно. Обоснованно определен вид поверхности, выполнен аккуратный, правильный чертеж. Отсутствует приложение в виде чертежа поверхности в онлайн-сервисе	1
ИТОГО			максимум 10

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы №2

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по геометрии

“Решение задач аналитической геометрии на плоскости”
студентки факультета информатики, математики и экономики
4 курса группы МИА-18 Ивановой Елизаветы Валерьевны

Вариант 1

1. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

2. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

3. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним. Чертежи обязательны, желательно при построении чертежа применять цвет. К задачам 1.1 и 2 рекомендуется сделать приложение в виде чертежа в онлайн-сервисе или компьютерной программе (например “GeoGebra”).

6. За правильное выполнение задач №№ 1.1, 1.4, 1.5, 1.6 выставляется по одному баллу. Задачи №№ 1.2, 1.3 и 2 оцениваются в два балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 10 баллов. Если набрано менее 5 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

Варианты контрольной работы № 2

I. В прямоугольной декартовой системе координат даны 4 точки A, B, C, D .

1. Построить пирамиду $ABCD$;
2. Составить уравнение граней ABC, BCD .
3. Написать уравнение перпендикуляра из точки D на грань ABC , найти его длину и точку падения на ABC (основание перпендикуляра);
4. Найти угол между прямой AC и гранью BCD ;
5. Найти угол между гранями ABC и BCD
6. Найти угол между прямыми AD и BC ;

II. В прямоугольной декартовой системе координат поверхность задана своим уравнением. Построить ее в системе координат $OXYZ$.

Варианты заданий контрольной работы № 2

Таблица к заданию I.

№	A	B	C	D
1.	(2; 0; 0)	(0; 1; 0)	(0; 0; 2)	(2; 2; 0)
2.	(1; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 2)	(2; 0; 2)
3.	(2; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 1)	(0; 2; 2)
4.	(2; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 1)	(2; 0; 2)
5.	(1; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 2)	(2; 2; 0)
6.	(2; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 1)	(0; 2; 4)
7.	(2; 0; 2)	(0; 1; 0)	(0; 0; 3)	(0; 2; 2)
8.	(1; 0; 1)	(0; 2; 0)	(0; 0; 2)	(2; 2; 0)
9.	(4; 0; 0)	(0; 1; 0)	(0; 0; 1)	(2; 0; 2)
10.	(0; 4; 1)	(0; 1; 0)	(1; 0; 4)	(2; 0; 0)

Таблица к заданию II.

№	
1.	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 24 = 0$
2.	$9y^2 - 4z^2 = 36$
3.	$x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 6 = 0$
4.	$x^2 - 2y^2 + 4 = 0$
5.	$36x^2 - 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$
6.	$y^2 - 2z + 4 = 0$
7.	$9x^2 + 4y^2 = 36$
8.	$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$
9.	$3x^2 + 4y^2 - 12z^2 - 12 = 0$
10.	$y^2 - 2z = 1$

Образец решения варианта контрольной работы № 2

Вариант 0

I. В прямоугольной декартовой системе координат даны 4 точки $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;4)$, $D(3;1;0)$.

1. Построить пирамиду $ABCD$.

Решение:

Строим систему координат в пространстве. Выбираем единичные отрезки по осям Ox , Oy , Oz . По координатам строим точки A , B , C , D . Соединяем вершины пирамиды отрезками.

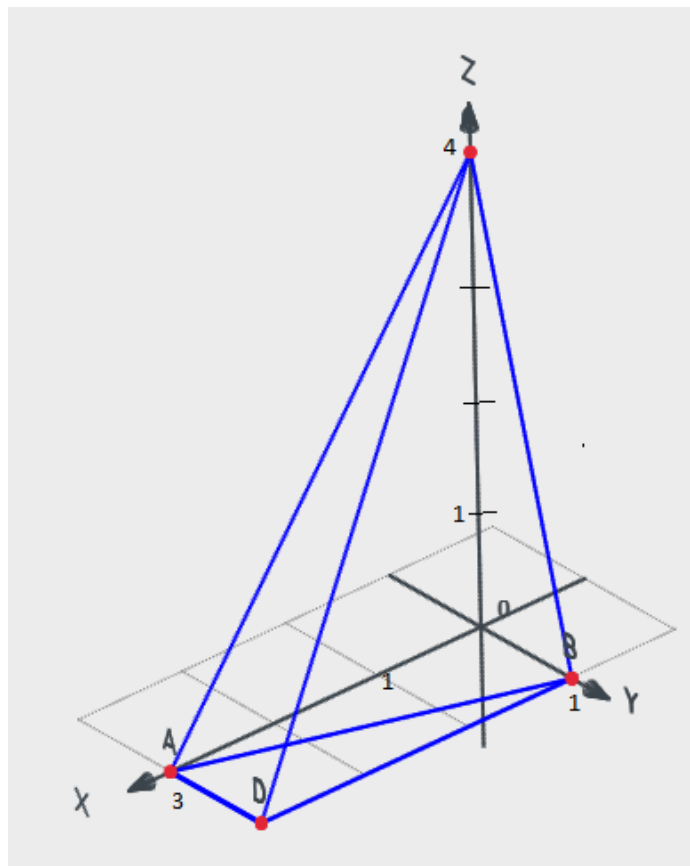


Рис. 13. Чертеж к задаче № 1 контрольной работы “Аналитическая геометрия в пространстве”

2. Составить уравнение граней ABC , BCD .

Решение

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, заданной тремя точками:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Уравнение грани } ABC: \begin{vmatrix} x - 3 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 3 & 1 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 3 & 0 - 0 & 4 - 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x - 3 & y & z \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

Раскроем определитель по элементам первой строки и получим общее уравнение плоскости: $4(x - 3) + 12y + 3z = 0$; $4x + 12y + 3z - 12 = 0$.

$$\text{Уравнение грани } BCD: \begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 0 \\ 0 - 0 & 0 - 1 & 4 - 0 \\ 3 - 0 & 1 - 1 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x & y - 1 & z \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

Раскроем определитель по элементам первой строки и получим общее уравнение плоскости: $12(y - 1) + 3z = 0$; $4y + z - 4 = 0$

3. Написать уравнение перпендикуляра из точки D на грань ABC, найти его длину и точку падения на ABC (основание перпендикуляра).

Решение:

Пусть DH – искомая прямая, значит $DH \perp (ABC)$. Тогда вектор нормали $\vec{n}$ плоскости (ABC) является направляющим вектором для прямой DH.

$$ABC: 4x + 12y + 3z - 12 = 0; D(3; 1; 0); \vec{n}\{4; 12; 3\}$$

Используем уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{k}$,

$$DH: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{12} = \frac{z-0}{3} - \text{каноническое уравнение прямой}$$

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 12t + 1 \\ z = 3t \end{cases} - \text{параметрические уравнения прямой}$$

Найдем длину перпендикуляра DH по формуле расстояния от точки до плоскости: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$DH = \frac{|4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$$

Найдем основание перпендикуляра – точку H.

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 12t + 1; \quad 4x + 12y + 3z - 12 = 0 \\ z = 3t \end{cases}$$

$$4(4t + 3) + 12(12t + 1) + 3(3t) - 12 = 0;$$

$$16t + 12 + 144t + 12 + 9t - 12 = 0$$

$$169t = -12; \quad t = -\frac{12}{169}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-48}{169} + 3 = \frac{459}{169} \\ y = -\frac{144}{169} + 1 = \frac{25}{169} \\ z = -\frac{36}{169} \end{cases}$$

Итак, точка H $(\frac{459}{169}; \frac{25}{169}; -\frac{36}{169})$

4. Найти угол между прямой AC и гранью BCD .

Решение

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ можно

найти по формуле: $\sin \varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

$$BCD: 4y + z - 4 = 0$$

Найдем направляющий вектор прямой $AC: A(3;0;0), C(0;0;4), \overrightarrow{AC}\{-3;0;4\}$

$$\sin \varphi = \frac{|0 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 1^2}\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{4}{5\sqrt{17}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{5\sqrt{17}}\right)$$

5. Найти угол между гранями ABC и BCD .

Решение

Угол α между плоскостями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, (i = 1, 2)$ может быть

найден по формуле: $\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

$$ABC: 4x + 12y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow A_1 = 4; B_1 = 12; C_1 = 3$$

$$BCD: 4y + z - 4 = 0 \Rightarrow A_2 = 0; B_2 = 4; C_2 = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{4 \cdot 0 + 12 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} \sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{51}{13\sqrt{17}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{51}{13\sqrt{17}}\right)$$

6. Найти угол между прямыми AD и BC .

Решение

Угол β между прямыми с направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$ может быть найден по формуле

$$\cos \beta = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

Найдем направляющие векторы прямых AD и $BC: A(3;0;0), B(0;1;0), C(0;0;4), D(3;1;0). \overrightarrow{AD}\{0;1;0\}; \overrightarrow{BC}\{0;-1;4\}$

$$\cos\beta = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}; \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$$

II. В прямоугольной декартовой системе координат поверхность задана своим уравнением $y^2 + 2x = 2$. Построить ее в системе координат OXYZ.

Решение

Так как в уравнении $y^2 + 2x = 2$ отсутствует координата z , то в пространстве этим уравнением задана цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей является парабола $y^2 = -2x + 2$, лежащая в плоскости Oxy .

Чтобы построить заданную поверхность, в плоскости Oxy строим параболу по точкам, координаты которых находим по таблице. Строим образующие, параллельные оси Oz (на одном расстоянии от точек параболы). В результате получаем искомую поверхность.

y	0	± 1	± 2	± 3	± 4
x	1	$\frac{1}{2}$	-1	-3,5	-7

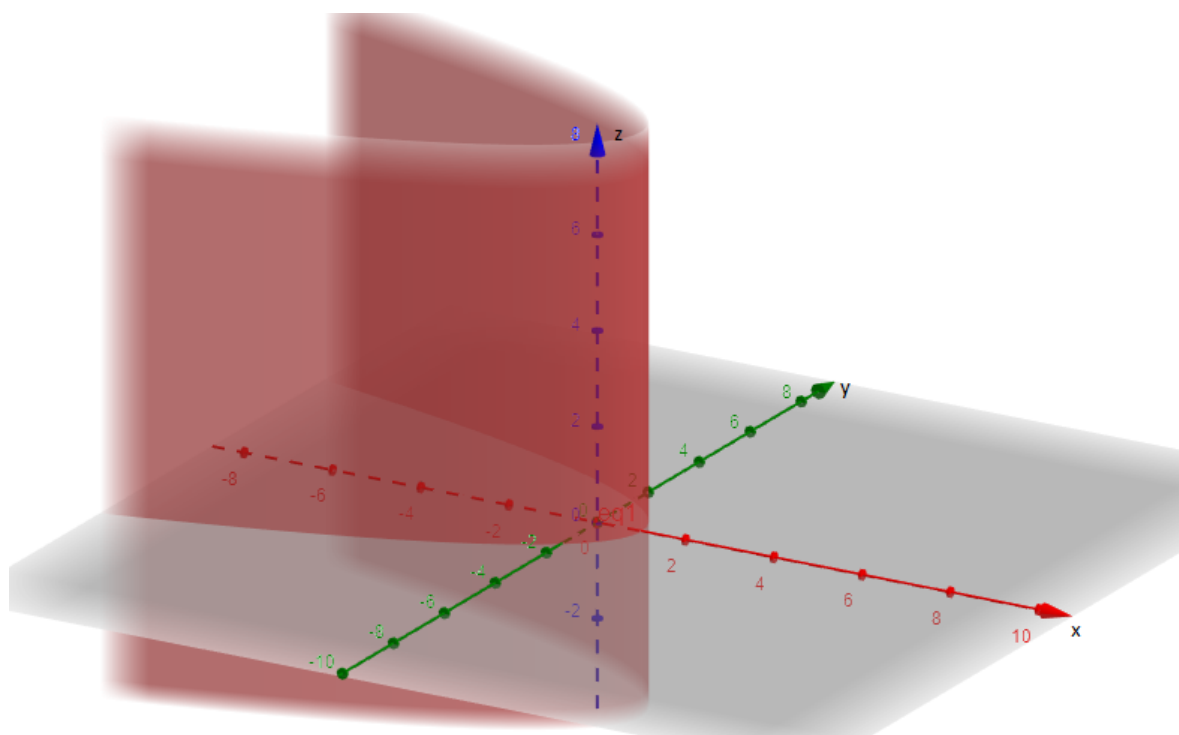


Рис. 14. Чертеж к задаче № 2 контрольной работы “Аналитическая геометрия в пространстве”

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1: учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский. — Москва : Лаборатория знаний, 2017. — 334 с. — ISBN 978-5-00101-452-2. — URL: <https://e.lanbook.com/book/94095>. — Текст: электронный.
2. Атанасян, С.Л. Геометрия 2 : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 547 с. — ISBN 978-5-9963-2876-5. - URL: <https://e.lanbook.com/book/66314> . — Текст: электронный.
3. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия: учебник для вузов / И. И. Привалов. — 40-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 233 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01262-0. - URL: <https://urait.ru/bcode/451192>. — Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Потапов, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 309 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01232-3. — URL: <https://urait.ru/bcode/451035>. - Текст : электронный.

Электронные ресурсы

1. Дистанционное образование в МГУ : интернет-портал Московского государственного университета. - Москва, 1997 - 2019. — URL: <http://www.msu.ru/study/dist-learn.html> (дата обращения: 30.09.2019). — Текст : электронный.
1. Открытый класс. Коллекция ЦОР : сетевые образовательные сообщества. — [Б. м.], 2008–2019. — URL: <http://www.openclass.ru>, (дата обращения: 30.09.2019). — Текст : электронный.

2. ПЕДCOBET.ORG : медиатека, включающая ЦОР и методические разработки. – [Б. м.], 2012-2019. – URL: <http://pedsovet.org/> (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.
3. Российский образовательный портал. Коллекция ЦОР – [Б. м.], 2015-2019. – URL: <http://www.school.edu.ru>, (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.
4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов / ФЦИОР. – Москва, 2015-2019. – URL: <http://fcior.edu.ru/> (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - <http://www.mathnet.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - <http://www.window.edu.ru>.
3. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов - <http://fcior.edu.ru>. Доступ свободный.