Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

А.В. Фомина

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические рекомендации по изучению дисциплины
для обучающихся по направлениям подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили: «Математика и Информатика», «Математика и Физика»,
«Технология и Информатика», «Информатика и физика»
44.03.01 Педагогическое образование
Профили: «Математика», «Информатика»

Новокузнецк

2019

УДК 519.6(072)

ББК 22.193я73
Ф 76

Фомина А.В.
Ф 76 Численные методы: методические рекомендации по изучению дисциплины для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Математика и Физика», «Технология и Информатика», «Информатика и Физика»),44.03.01 Педагогическое образование (профили «Математика», «Информатика») / А.В. Фомина; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 60 с.

В работе изложены методические рекомендации по изучению дисциплины «Численные методы»: основные теоретические сведения, примеры решения типовых заданий, варианты индивидуальных заданий, методические рекомендации к выполнению индивидуальных заданий, критерии оценки учебной деятельности студента, список основной и дополнительной литературы.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика и Информатика», «Математика и Физика», «Технология и Информатика», «Информатика и Физика»; 44.03.01 Педагогическое образование, профили: «Математика», «Информатика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 11 от 17.06.2019

Заведующий каф. МФММ
__________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 10 от 27.06.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
________________/ Г.Н. Бойченко

УДК 519.6(072)
ББК 22.193я73
Ф76

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические рекомендации адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика и Информатика», «Математика и Физика», «Технология и Информатика», «Информатика и Физика»; 44.03.01 Педагогическое образование, профили: «Математика», «Информатика» и направлены на оказание помощи студентам в организации наиболее рационального изучения курса «Численные методы».

Численные методы – раздел вычислительной математики, изучающий приближенные способы решения типовых математических задач, которые либо не решаются, либо трудно решаются точными аналитическими методами. Примерами типовых задач являются численное решение уравнений и систем уравнений, численные дифференцирование и интегрирование и др.

Целью изучения дисциплины «Численные методы» является формирование математической компетентности, основанной на исследовании математических моделей, изучении и применении методов вычислительной математики, реализации методов с использованием алгоритмизации и программирования.

Для достижения поставленной цели необходимо сформировать у студентов:

1) систему знаний численных методов алгебры, теории приближений, методов численного дифференцирования и интегрирования; численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений; численного решения дифференциальных уравнений в частных производных в естественнонаучном образовании будущего учителя;

2) навыков, умений и готовности использования в будущей профессиональной деятельности полученных знаний курса «Численные методы».

Программа изучения курса «Численные методы» разработана на модульной основе. Учебная дисциплина разделена на четыре основные структурные единицы, представляющие логически завершенные, информационно и методически обеспеченные блоки, называемые модулями, каждый из которых включает в себя несколько учебных элементов.

В методические рекомендации включено: основные теоретические сведения, примеры решения типовых заданий, варианты индивидуальных заданий, методические рекомендации к выполнению индивидуальных заданий, критерии оценки учебной деятельности студента, список основной и дополнительной литературы.

Теоретические сведения и приведенные примеры решения некоторых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям и выполнения индивидуальных заданий.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании курса “Численные методы”, подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальные задания. Методические рекомендации могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших профильных классах.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

1.1. Методы решения нелинейных уравнений

Отделение корней нелинейного уравнения

Большинство нелинейных уравнений с одной переменной не решается путем аналитических преобразований, поэтому на практике их решают численными методами. Решить такое уравнение – это значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значение корней с заданной точностью.

Запишем нелинейное уравнение в виде:

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Первый этап численного решения уравнения (1) состоит в отделении корней, т.е. в установлении довольно «малых» промежутков, содержащих только один корень.

Отделение корней во многих случаях можно произвести графически. Действительные корни уравнения (1) – это точки пересечения графика функции $F(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график $F(x)$ и отметить на оси OX отрезки, содержащие по одному корню.

Построение графиков удается упростить, заменив уравнение (1) равносильным ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$.

В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси OX отмечаются отрезки, содержащие абсциссы точек пересечения этих графиков.

Графическое отделение корней необходимо подкрепить вычислениями:

1) если непрерывная на $[a;b]$ функция $F(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т.е. $F(a) \cdot F(b) < 0$), то уравнение (1) имеет на этом отрезке по

меньшей мере 1 корень;

2) если функция $F(x)$ еще и строго монотонна, то корень на $[a;b]$ единственный.

Для отделения корней можно эффективно использовать ПК. Пусть все корни уравнения находятся на отрезке $[A;B]$, в котором $F(x)$ определена, непрерывна и $F(A)\cdot F(B)<0.$ Требуется отделить корни уравнения, т.е. указать все отрезки $[a;b]\subset[A;B]$, содержащие по одному корню. Будем вычислять значения $F(x)$, начиная с точки $x=A$, двигаясь вправо с некоторым шагом h до тех пор, пока не дойдем до конца отрезка $[A;B]$. Как только обнаружится пара соседних значений $F(x)$, имеющих разные знаки, то соответствующие значения аргумента x можно считать концами отрезка, содержащего корень. Результатом решения задачи будут выводимые на печать в цикле значения параметров x_1, x_2 (концов выделенных отрезков). Значения h должны быть достаточно малыми.

Представим программную реализацию данного метода на языке программирования Pascal. Рассмотрим пример задачи, в которой необходимо выбрать отрезки, содержащие корни уравнения: $F(x)=x^2-e^{-\frac{x}{2}}$, заданного на интервале $[-4;4]$. Для этого, начиная с начального значения, необходимо смещать отрезок длиной $h=0.1$ в цикле и каждый раз анализировать значения функции на концах этого отрезка. Корень присутствует, если эти значения разного знака.

Функция $F(x)$ меняет знак на отрезках: $[-1.5;-1.4]$, $[0.8;0.9]$, поэтому корни уравнения находятся на этих отрезках (рис. 1).

Метод простой итерации

Заменим уравнение (1) равносильным ему уравнением:

$$x=f(x). \tag{2}$$

Пусть $\gamma-$корень уравнения (2), а x_0-полученное каким-либо способом приближение к корню γ. Подставим x_0 в правую часть уравнения (2), получим число $x_1=f(x_0)$. Проделаем то же самое с x_1, получаем $x_2=f(x_1)$ и т.д. Применяя соотношение $x_n=f(x_{n-1})$, образуем числовую последовательность:

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \tag{3}$$

которую называют *итерационной последовательностью.*

Если последовательность (3) сходится, а функция $f(x)$ непрерывна, то предел последовательности (3) является корнем уравнения (2).

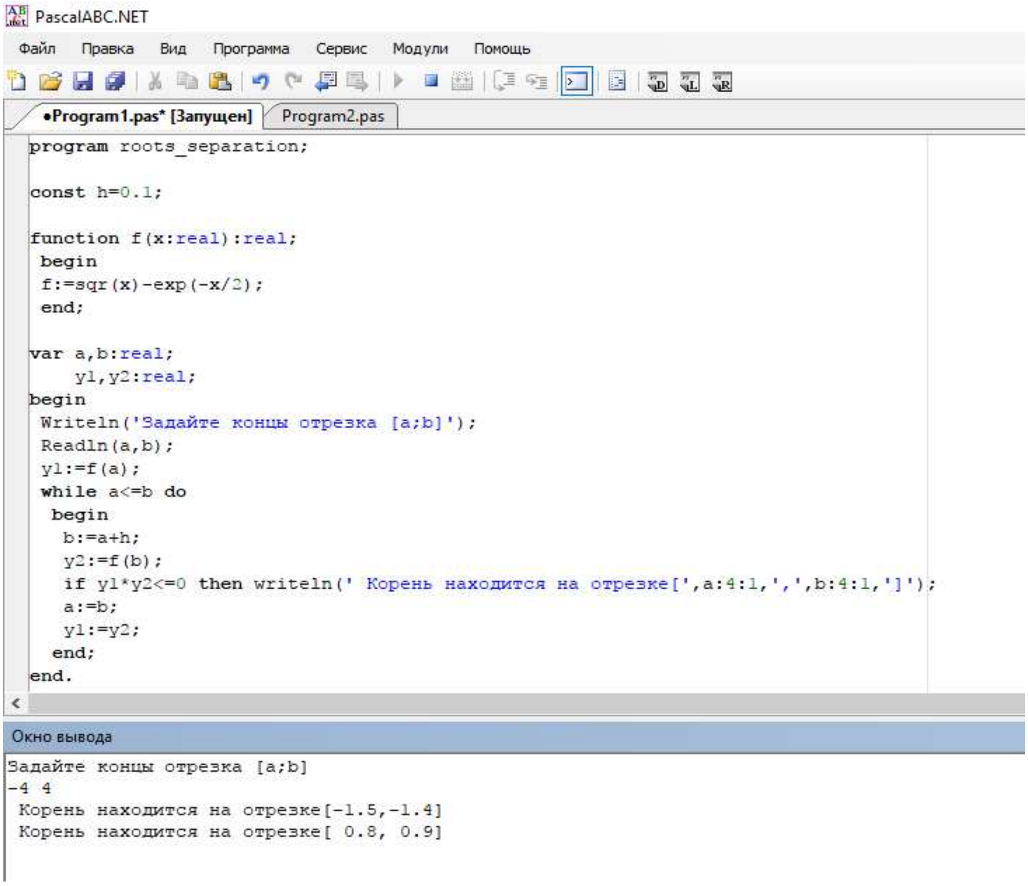


Рис. 1. Поиск отрезка в PascalABC, содержащего корень уравнения

Достаточные условия сходимости итерационного процесса

Пусть уравнение (2) имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$ и выполнены условия:

1) $f(x)$ определена и дифференцируема на $[a;b]$;

2) $f(x)\in[a;b]$ для всех $x\in[a;b]$;

3) существует действительное число q, что $\left|f'(x)\right|\le q<1$ для всех $x\in[a;b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ сходится при любом начальном члене $x_0\in[a;b]$.

Уравнение (1) приведем к итерационному виду (2), заменив его равносильным уравнением: $x = x - m\cdot F(x), m\ne 0$, где m – константа.

Тогда из уравнения (2): $f(x)=x-m\cdot F(x)$. Дифференцируем последнее равенство: $f'(x)=1-m\cdot F'(x)$. Для того, чтобы выполнились достаточные условия сходимости итерационного процесса, т. е. $\left|f'(x)\right|=\left|1-m\cdot F'(x)\right|\le q<1$, достаточно подобрать m так, чтобы для всех x отрезка $[a;b]$ значение $m\cdot F'(x)\le 1$. Найдем m по формуле: $m=\pm\dfrac{1}{\max\limits_{[a;b]}\left|F'(x)\right|}$, знак числа m выбираем из второго условия сходимости.

Для ручных вычислений корня по методу итераций используется таблица:

x_n	$x_{n+1} = f(x_n)$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
x_0	$x_1 = f(x_0)$	$\|x_1 - x_0\|$
x_1	$x_2 = f(x_1)$	$\|x_2 - x_1\|$
………..	………..	………..

Для нахождения корня уравнения (2) методом итераций с точностью ε нужно продолжить итерации до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{\varepsilon \cdot (1-q)}{q},$$

где ε – заданная точность вычисления.

Метод половинного деления

Пусть уравнение (1) имеет на отрезке $[a;b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок$[a;b]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если $F(c) \ne 0$, то возможны 2 случая:

1) $F(x)$ меняет знак на$[a;c]$;2) $F(x)$ меняет знак на$[c;b]$.

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Если $F(a) \cdot F(c) < 0$, то полагаем $b = c$, в противном случае, $a = c$. Для нахождения корня уравнения (1) методом половинного деления с точностью ε нужно продолжить итерации до тех пор, пока не будет выполнено условие:$|b-a| < 2\varepsilon$, где ε – заданная точность вычисления.

Корень уравнения найдем по формуле: $x = \frac{a+b}{2}$.

Представим программную реализацию метода деления отрезка пополам уравнения $F(x) = x^2 - e^{-\frac{x}{2}}$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$. Программа division, реализующая алгоритм, приведена ниже на рисунке 2.

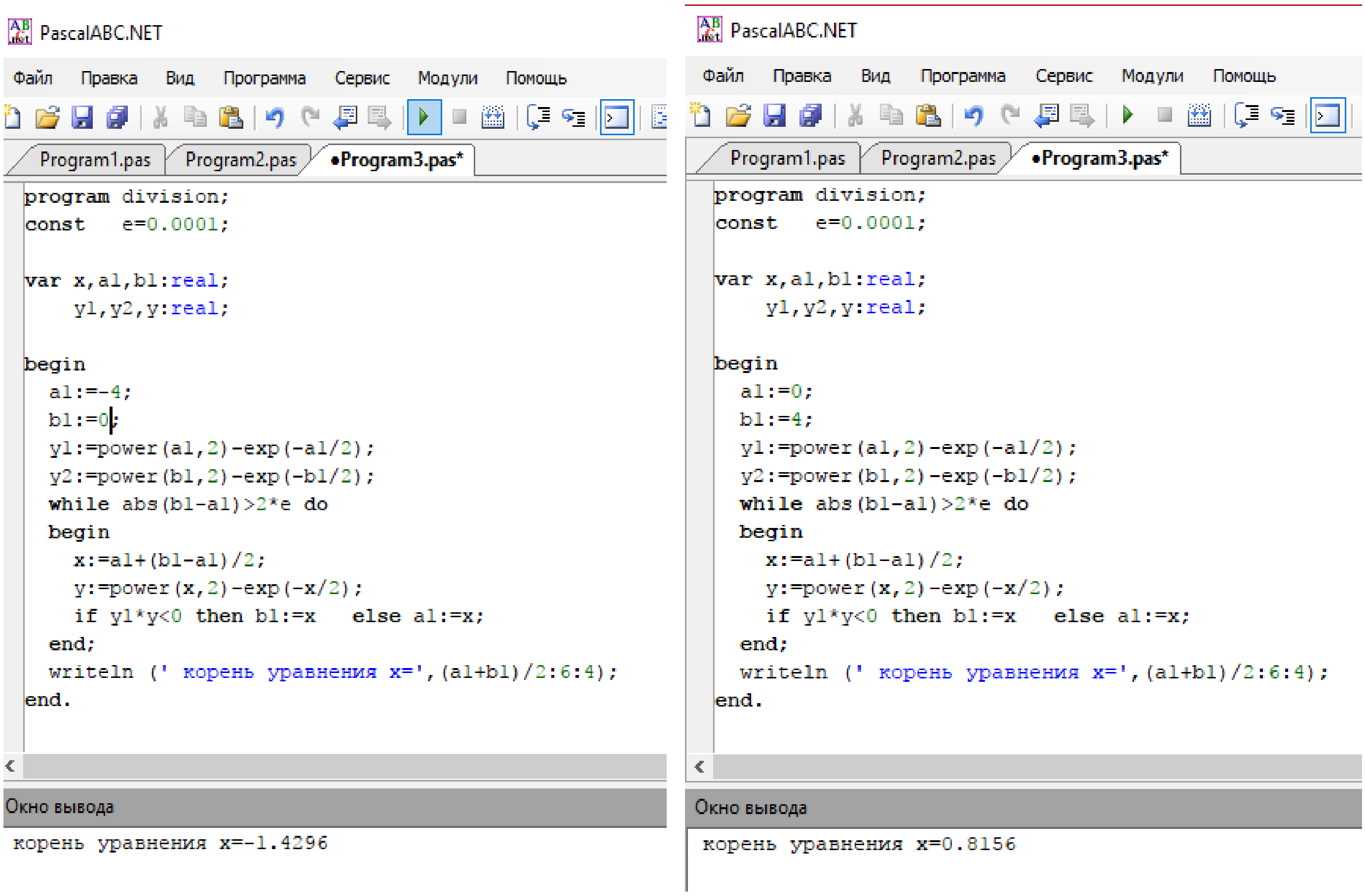


Рис. 2. Реализация в PascalABC метода половинного деления

Метод Ньютона (касательных)

Пусть корень уравнения (1) лежит на $[a;b]$. Возьмем на $[a;b]$ такое x_0, при котором $F(x_0)$ имеет тот же знак, что и $F''(x_0)$, т.е. $F(x_0)\cdot F''(x_0)>0$.

Проведем в точке $M_0(x_0;F(x_0))$ касательную к кривой $y=F(x)$. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX. Это приближенное значение корня находится по формуле:

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Применив этот прием вторично в точке $M_1(x_1;F(x_1))$, найдем:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \text{ и т.д.}$$

В общем случае, имеем:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}.$$

Полученная последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ имеет своим пределом искомый корень. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \varepsilon -$ заданная точность.

1.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Метод Гаусса (схема единственного деления)

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (4)$$

В основе метода лежит идея последовательного исключения неизвестных. Существуют различные вычислительные схемы, реализующие этот метод. Рассмотрим одну из них – схему единственного деления. Ручные вычисления по схеме единственного деления удобно оформлять в виде специальной расчетной таблицы, в ней осуществляется прямой ход метода Гаусса – последовательное исключение неизвестных. Приведем пример такой таблицы для системы из 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными. Здесь Σ – столбец контрольных сумм, S – столбец строчных сумм. Эти столбцы осуществляют контроль над вычислениями, значения в них должны практически совпадать (таблица 1).

Элементы таблицы «со штрихами» вычисляются по формуле: $k' = k - p_в \cdot p_г$, здесь k' – вычисляемый элемент нового раздела; k – соответствующий элемент предыдущего раздела; $p_в$ – вертикальная проекция элемента k (находится в выделенной строке); $p_г$ – горизонтальная проекция элемента k (крайний левый элемент строки).

Обратный ход метода Гаусса состоит в нахождении значений неизвестных, которые определяются из выделенных строк таблицы путем составления уравнений (в обратном порядке).

Довольно часто, из-за округлений, результат решения системы содержит вычислительную погрешность. Значения разностей между свободными членами системы $b_i, i = \overline{1,n}$ и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных $B_i, i = \overline{1,n}$ называют невязками: $\varepsilon_i = b_i - B_i, i = \overline{1,n}$

Метод простой итерации

Перепишем систему (4) в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + b_n. \end{cases} \tag{5}$$

Выбрав начальную точку $X^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, можно построить итерационную последовательность точек $n-$мерного пространства:

$$X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}. \tag{6}$$

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	b	Σ	S	
a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	b_1 b_2 b_3	$\sum_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + b_1$ $\sum_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + b_2$ $\sum_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + b_3$		(1) (2) (3)
1	a_{12}/a_{11}	a_{13}/a_{11}	b_1/a_{11}	$\sum_2' = \sum_1 / a_{11}$	$S_1' = 1 + a_{12}/a_{11} + a_{13}/a_{11} + b_1/a_{11}$	(1’)
	a_{22}' a_{32}'	a_{23}' a_{33}'	b_2' b_3'	$\sum_2'$ $\sum_3'$	$S_2' = a_{22}' + a_{23}' + b_2'$ $S_3' = a_{32}' + a_{33}' + b_3'$	(2’) (3’)
	1	a_{23}'/a_{22}'	b_2'/a_{22}'	$\sum_2''$	$S_2'' = 1 + a_{23}'/a_{22}' + b_2'/a_{22}'$	(2’’)
		a_{33}''	b_3''	$\sum_3{}''$	$S_3'' = a_{33}'' + b_3''$	(3’’)
		1	b_3''/a_{33}''	$\sum_3{}'''$	$S_3''' = 1 + b_3''/a_{33}''$	(3’’’)

При определенных условиях последовательность (6) сходится и её предел является решением системы.

Введем определение.

Функцию $\rho(x,y)$, определяющую расстояние между точками x и y множества X, назовем *метрикой*, если выполнены условия:

1) $\rho(x,y) \geq 0,$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x),$

3) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

4) $\rho(x,y)\le \rho(x,z)+\rho(z,y)$.

При практическом применении метода итераций удобно рассматривать систему линейных уравнений в пространстве с одной из следующих трех метрик:

1) $\rho_1(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$,

2) $\rho_2(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$,

3) $\rho_3(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

Для того чтобы последовательность (6) была сходящейся, достаточно выполнения одного из следующих условий:

а) в пространстве с метрикой $\rho_1:\alpha=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1$,

б) в пространстве с метрикой $\rho_2:\alpha=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1$, (7)

в) в пространстве с метрикой $\rho_3:\alpha=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2}<1$.

Рассмотрим практическую схему решения систем линейных уравнений методом простой итерации.

Система (4) должна быть переписана в виде (5). При этом гарантией сходимости итерационного процесса может служить выполнение хотя бы одного из достаточных условий (7). Для обеспечения условий сходимости нужно получить систему вида (5) из системы (4) так, чтобы коэффициенты при неизвестных в правой части были существенно меньше единицы. Этого можно достичь, если исходную систему вида (4) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютные величины коэффициентов, стоящих на главной диагонали, были больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов при неизвестных в соответствующих уравнениях (такую систему называют системой с преобладающими диагональными коэффициентами). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестные с коэффициентом, равным 1, будет получена система вида (5), у которой все $|\alpha_{ij}|<1$. Если после указанных преобразований ни одно из условий (7) не выполняется, следует возвратиться к исходной системе и попытаться выполнить преобразования так, чтобы добиться лучшего эффекта. Далее находится значение α по одному из условий (7). За начальное приближение можно взять $X^{(0)}=(0,0,...,0)$. Подставляем в правую часть системы (5), находим $X^{(1)}$ и т.д. Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие: $\rho\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right)\le\frac{\varepsilon\cdot(1-\alpha)}{\alpha}$, $\rho-$метрика, по которой была установлена сходимость, $\varepsilon-$ заданная точность вычислений.

Метод Зейделя

Рассматривается система линейных уравнений (4) и эквивалентная ей приведенная система (5). Обозначим элементы имеющегося приближения через $x_1,x_2,...,x_n$, а элементы вычисляемого приближения – через $y_1,y_2,...,y_n$.

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения y_i учитываются уже полученные значения $y_1,y_2,...,y_{i-1}$. Соответствующие вычислительные формулы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j+\beta_1,\\
&y_2=\alpha_{21}y_1+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j+\beta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_i=\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}y_j+\sum_{j=i}^{n}\alpha_{ij}x_j+\beta_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{nj}y_j+\alpha_{nn}x_n+\beta_n
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Преимущество метода Зейделя состоит в том, что он обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Опишем практическую процедуру преобразования исходной системы (4), гарантирующую сходимость итерационного процесса метода Зейделя для соответствующей системы (5).

Запишем систему (4) в матричной форме:

$$A\cdot X=B.\qquad(9)$$

Обозначим через A^T результат транспонирования матрицы A. Умножим левую и правую части системы (9) слева на матрицу A^T:

$A^T\cdot A\cdot X=A^T\cdot B$.

Обозначим $C=A^T\cdot A, D=A^T\cdot B$.

Преобразованная система имеет вид: $C \cdot X = D$. Такого рода систему называют *нормальной*.

Нормальные системы обладают рядом свойств:

1) матрица C коэффициентов при неизвестных нормальной системы является *симметрической*, т.е. $a_{ij} = a_{ji}; i, j = 1, 2, ..., n;$

2) все элементы главной диагонали матрицы C нормальной системы положительны, т.е. $a_{ii} > 0; i = 1, 2, \ldots, n.$

Вводим начальное приближение $X^{(0)}$ в правую часть нормальной системы, находим $X^{(1)}$ и т.д. Получим итерационную последовательность (6). Окончанием итерационного процесса будем считать момент, когда для всех пар соответствующих значений в двух последовательных приближениях будет выполняться соотношение: $\max|y_i - x_i| < \varepsilon, \varepsilon -$ заданная точность.

1.3.Метод Ньютона (касательных) решения систем нелинейных уравнений

Пусть дана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Согласно методу Ньютона последовательные приближения вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{J(x_n, y_n)} \cdot \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{1}{J(x_n, y_n)} \cdot \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \end{cases} \qquad (11)$$

где $J(x, y) = \begin{vmatrix} F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \\ G'_x(x, y) & G'_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0.$

Начальные приближения x_0, y_0 будем определять приближенно (графически). Вводим начальные приближения в правую часть формул (11), найдем x_1, y_1 и т. д. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не будут выполнены условия: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ и $|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon, \varepsilon -$заданная точность.

Решим систему уравнений в PascalABC с использованием метода Ньютона:

$$\begin{cases} y^2 x^2 + 2^{3x-5y} - \left(\cos \dfrac{x}{y}\right)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Для этого найдем частные производные первого порядка функций двух переменных:

$$F_x'(x,y) = 2xy^2 + 2^{3x-5y} \cdot 3\ln 2 + 2\cos\frac{x}{y}\sin\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y},$$

$$F_y'(x,y) = 2yx^2 + 2^{3x-5y} \cdot (-5\ln 2) + 2\cos\frac{x}{y}\sin\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$G_X'(x,y) = 2 \cdot x,\ G_Y'(x,y) = 2 \cdot y.$$

Начальные приближения найдем, используя графический метод. Построение графиков функций возможно с использованием графопостроителей, специализированных онлайн-сервисов и математических пакетов, таких как: Scilab или wxMaxima. Достаточно хорошим средством является графопостроитель KmPlot, входящий в пакет образовательных программ KDE EducationProject и распространяемый согласно GNU GeneralPublicLicense. Программа KmPlot позволяет выявить закономерности зависимости свойств функции от её аналитического задания. Особенно эффективно применение программы при изучении взаимного расположения графиков функций и графического способа решения системы нелинейных уравнений.

Используем онлайн-сервис http://matematikam.ru/calculate-online/grafik.php, в котором построим графики неявно заданных функций. Исходя из рисунка 3, видно, что точка пересечения графиков уравнений, находящаяся в первой четверти, имеет координаты $x_0 = 0{,}34; y_0 = 2{,}98$.

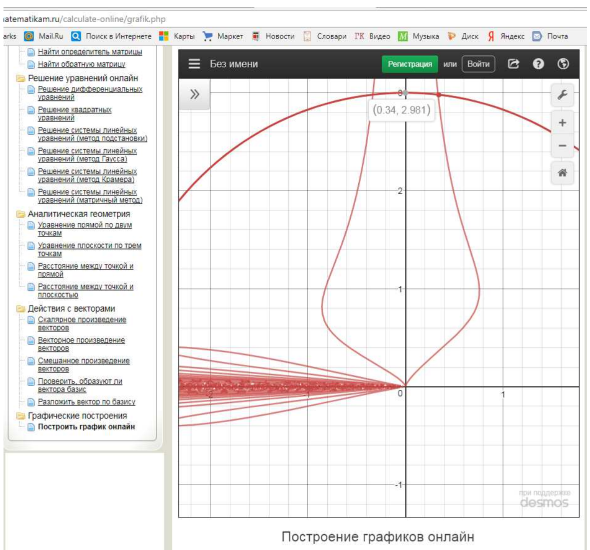
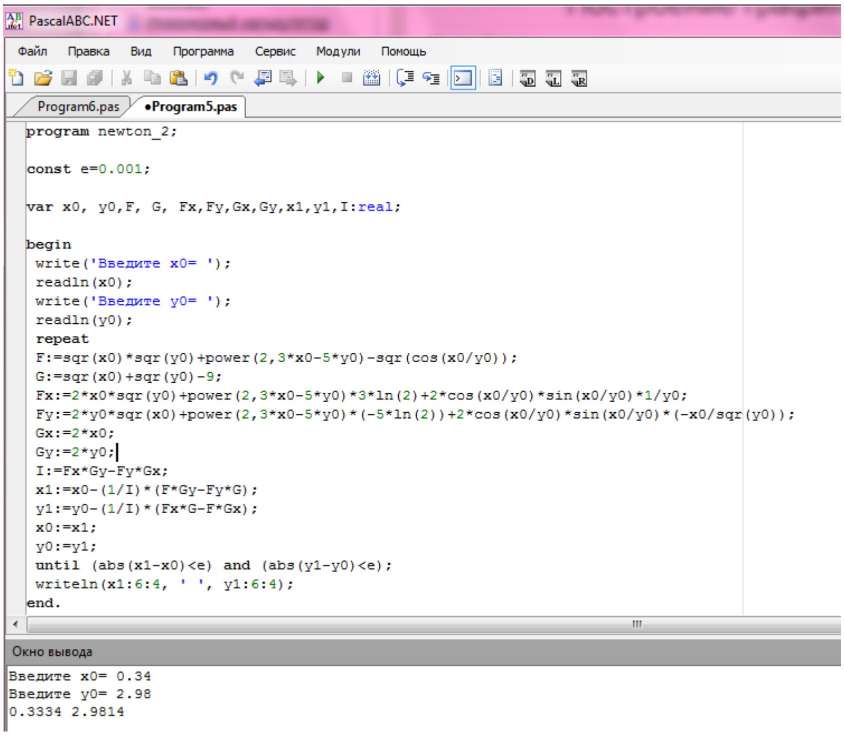


Рис. 3. Построение графиков неявных функций в онлайн-сервисе

На рисунке 4 представлена реализация решения системы нелинейных уравнений вPascalABC.




```
program newton_2;

const e=0.001;

var x0, y0,F, G, Fx,Fy,Gx,Gy,x1,y1,I:real;

begin
 write('Введите x0= ');
 readln(x0);
 write('Введите y0= ');
 readln(y0);
 repeat
 F:=sqr(x0)*sqr(y0)+power(2,3*x0-5*y0)-sqr(cos(x0/y0));
 G:=sqr(x0)+sqr(y0)-9;
 Fx:=2*x0*sqr(y0)+power(2,3*x0-5*y0)*3*ln(2)+2*cos(x0/y0)*sin(x0/y0)*1/y0;
 Fy:=2*y0*sqr(x0)+power(2,3*x0-5*y0)*(-5*ln(2))+2*cos(x0/y0)*sin(x0/y0)*(-x0/sqr(y0));
 Gx:=2*x0;
 Gy:=2*y0;
 I:=Fx*Gy-Fy*Gx;
 x1:=x0-(1/I)*(F*Gy-Fy*G);
 y1:=y0-(1/I)*(Fx*G-F*Gx);
 x0:=x1;
 y0:=y1;
 until (abs(x1-x0)<e) and (abs(y1-y0)<e);
 writeln(x1:6:4, ' ', y1:6:4);
end.
```

```
Введите x0= 0.34
Введите y0= 2.98
0.3334 2.9814
```

Рис. 4. Реализация в PascalABC метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений

1.4. Индивидуальное задание № 1 по теме «Численные методы алгебры»

<u>Задание 1.</u>

1) Отделить корни заданного уравнения:

а) графически;

б) с использованием ПК.

2) С помощью микрокалькулятора вычислить один корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя метод простой итерации.

3) Составить программу для вычисления с помощью ПК всех корней заданного уравнения методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

4) Составить программу для уточнения одного из корней уравнения методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

1. $cosx - (x-1)^2 = 0;$
2. $8cosx - x = 6;$
3. $0,5^x + 1 = (x-2)^2;$
4. $2x - \lg x - 7 = 0;$
5. $x \cdot \ln(x+1) = 1;$
6. $2 \cdot \lg(x+7) - 5\sin x = 0;$
7. $\log_2(-x) \cdot (x+2) = -1;$
8. $3x - \cos x - 1 = 0;$
9. $\sin(x-0,5) - 2x + 0,5 = 0;$
10. $2x^2 - 5 = 2^x;$
11. $x^2 - 2 + 0,5^x = 0;$
12. $x - \sin x = 0,25;$
13. $1,2 - \ln x = 4\cos 2x;$
14. $x \cdot \log_3(x+1) = 1;$

15. $x^2+4\sin x=0;$

16. $x+2-e^x=0;$

17. $2^{-x}=10-0,5x^2;$

18. $3x+\cos x+1=0;$

19. $\sqrt{4x+7}=3\cos x;$

20. $tg\left(0,3x+0,4\right)=x^2;$

Задание2.

Решить систему линейных уравнений с точностью $\varepsilon=10^{-4}$ различными способами:

1) методом Гаусса (по схеме единственного деления) с применением микрокалькулятора;

2) методом простой итерации на ПК;

3) методом Зейделя на ПК.

$$1.\begin{cases}3,01x_1-0,14x_2-0,15x_3=1,00,\\1,11x_1+0,13x_2-0,75x_3=0,13,\\0,17x_1-2,11x_2+0,71x_3=0,17;\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}9,12x_1+5,63x_2+7,81x_3=9,80,\\3,84x_1+5,15x_2+2,86x_3=6,77,\\4,18x_1+5,79x_2+1,21x_3=5,82;\end{cases}$$

$$3.\begin{cases}-1,14x_1-0,04x_2+0,21x_3=-1,24,\\0,25x_1-1,23x_2-0,17x_3=0,95,\\-0,21x_1-0,17x_2+0,80x_3=2,56;\end{cases}$$

$$4.\begin{cases}0,73x_1+1,24x_2-0,38x_3=0,58,\\1,25x_1+0,66x_2-0,78x_3=0,66,\\0,75x_1+1,22x_2-0,83x_3=0,92;\end{cases}$$

$$5.\begin{cases}-9,11x_1+1,02x_2-0,73x_3=-1,25,\\7,61x_1+6,25x_2-2,32x_3=2,33,\\-4,64x_1+1,13x_2-8,88x_3=-3,75;\end{cases}$$

$$6.\begin{cases}5,43x_1-2,36x_2+3,44x_3=-3,51,\\4,28x_1+1,75x_2-2,30x_3=2,73,\\3,47x_1+2,49x_2+7,41x_3=1,88;\end{cases}$$

$$7.\begin{cases}1,08x_1+0,21x_2-1,8x_3=-1,24,\\0,25x_1-1,23x_2+0,22x_3=-1,16,\\0,15x_1-0,31x_2-1,16x_3=2,56;\end{cases}$$

$$8.\begin{cases}1,02x_1+0,72x_2-0,65x_3=1,27,\\0,74x_1-1,24x_2-1,73x_3=0,77,\\1,78x_1+2,32x_2+0,74x_3=1,16;\end{cases}$$

$$9.\begin{cases}1,02x_1+0,72x_2-0,65x_3=1,27,\\0,74x_1-1,24x_2-1,73x_3=0,77,\\1,78x_1+2,32x_2+0,74x_3=1,16;\end{cases}$$

$$10.\begin{cases}-0,20x_1+1,60x_2-0,10x_3=0,30,\\-0,30x_1+0,10x_2-1,50x_3=0,40,\\1,20x_1-0,20x_2+0,30x_3=-0,60;\end{cases}$$

$$11.\begin{cases}0,78x_1-0,02x_2-0,12x_3=0,56,\\0,02x_1-0,86x_2+0,04x_3=0,77,\\0,12x_1+0,44x_2-0,72x_3=1,01;\end{cases}$$

$$12.\begin{cases}3,85x_1+4,10x_2-2,35x_3=4,84,\\-2,11x_1+3,94x_2-5,88x_3=3,37,\\1,82x_1+1,16x_2-2,13x_3=5,89;\end{cases}$$

$$13.\begin{cases}-1,13x_1-0,04x_2-1,8x_3=-1,24,\\-0,21x_1+0,14x_2-0,13x_3=2,56,\\0,15x_1-0,31x_2+0,87x_3=-1,13;\end{cases}$$

$$14.\begin{cases}1,53x_1-1,63x_2-0,76x_3=2,18,\\0,86x_1+1,17x_2+0,84x_3=1,95,\\0,32x_1-0,65x_2+1,11x_3=-0,47;\end{cases}$$

$$15.\begin{cases}0,66x_1+0,44x_2+0,22x_3=-0,58\\1,54x_1+0,74x_2+1,54x_3=-0,32,\\1,42x_1+1,42x_2+0,86x_3=0,83;\end{cases}$$

$$16.\begin{cases}7,12x_1+6,84x_2+6,13x_3=7,04,\\5,06x_1+4,87x_2+5,35x_3=6,11,\\8,26x_1+7,89x_2+7,10x_3=5,85;\end{cases}$$

$$17.\begin{cases}0,15x_1-0,31x_2+0,06x_3=1,25,\\1,25x_1-0,04x_2+0,21x_3=-1,24,\\-0,21x_1-0,14x_2+0,80x_3=2,56;\end{cases}$$

$$18.\begin{cases}1,06x_1+0,34x_2+1,26x_3=1,17,\\2,54x_1-1,16x_2+0,55x_3=2,23,\\1,34x_1-0,47x_2-0,83x_3=3,26;\end{cases}$$

$$19.\begin{cases}7,12x_1+6,84x_2+6,13x_3=7,04,\\5,06x_1+4,87x_2+5,35x_3=6,11,\\8,26x_1+7,89x_2+7,10x_3=5,85;\end{cases}$$

$$20.\begin{cases}0,15x_1-0,31x_2+0,06x_3=1,25,\\1,25x_1-0,04x_2+0,21x_3=-1,24,\\-0,21x_1-0,14x_2+0,80x_3=2,56;\end{cases}$$

Задание3.

Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

$$1.\ \begin{cases}\sin(x+y)-1,6x=0,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases}tg(xy+0,4)=x^2,\\0,6x^2+2y^2=1;\end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases}e^{xy}=x^2-y+1,\\(x+0,5)^2+y^2=0,6;\end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases}\sin(x+y)-1,1x=0,1,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$$

$$5.\ \begin{cases}\sin(x+y)-1,2x=0.2,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$$

$$6.\ \begin{cases}tg(xy+0,1)=x^2,\\x^2+2y^2=1;\end{cases}$$

$$7.\begin{cases}e^{xy}=x^2-y+1,1,\\(x+0,5)^2+y^2=0,7;\end{cases}$$

$$8.\ \begin{cases}tg(xy+0,3)=x^2,\\0,5x^2+2y^2=1;\end{cases}$$

$$9.\ \begin{cases}\sin(x+y)-1,3x=0,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$$

$$10.\ \begin{cases}tg(xy+0,3)=x^2,\\0,9x^2+2y^2=1;\end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases}e^{xy}=x^2-y+1,2,\\(x+0,5)^2+y^2=0,8;\end{cases}$$

$$12.\ \begin{cases}\sin(x+y)-1,2x=0,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$$

13. $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x=0{,}1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

14. $\begin{cases} tg(xy)=x^2, \\ 0{,}8x^2+2y^2=1; \end{cases}$

15. $\begin{cases} e^{xy}=x^2-y+1{,}3, \\ (x+0{,}5)^2+y^2=0{,}9; \end{cases}$

16. $\begin{cases} tg(xy)=x^2, \\ 0{,}6x^2+2y^2=1; \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}2x=0{,}1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

18. $\begin{cases} tg(xy)=x^2, \\ 0{,}7x^2+2y^2=1; \end{cases}$

19. $\begin{cases} e^{xy}=x^2-y+1{,}4, \\ (x+0{,}5)^2+y^2=1; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(x+y)-1{,}5x=0{,}2, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

1.5 Рекомендации к выполнению индивидуального задания № 1

Задание 1.

1) а) Графически находятся отрезки небольшой длины, содержащие по одному корню уравнения. Результат выполнения задания (перечень отрезков) проверяется аналитическим способом.

б) Для заданного уравнения устанавливается отрезок, содержащий все корни (см. п.а)). Составляется программа отделения корней уравнения. Значение шага h полагается равным 0,1. Выписывается результат работы программы – список отрезков, содержащих по одному корню уравнения.

2) Для выполнения задания выбирается отрезок, изолирующий один из корней уравнения. Исходное уравнение приводится к виду $x=f(x)$ так, чтобы на выбранном отрезке функция $f(x)$ удовлетворяла достаточным условиям сходимости итерационного процесса. Для вычислений корня по методу итераций используется расчетная таблица:

n	x_n	$x_{n+1} = f(x_n)$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
…	…	…	…

3)Составляется программа вычисления всех корней уравнения методом половинного деления. Программа может быть получена путем объединения алгоритмов отделения и последующего уточнения корней методом половинного деления. Выписывается результат работы программы – все корни заданного уравнения.

4) Для выполнения задания выбирается отрезок, изолирующий один из корней уравнения, на котором выполняются условия применяемости метода, а также соответствующее начальное приближение x_0. Составляется программа вычисления одного корня уравнения методом Ньютона. Выписывается результат работы программы – корень заданного уравнения на выбранном отрезке.

Задание 2.

1) Составляется расчетная таблица, которая предусматривает осуществление контроля над вычислениями в прямом и обратном ходе метода Гаусса. Полученное решение подставляется в исходную систему, производятся вычисления и находятся невязки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (значения разностей между свободными членами исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных).

2) Исходная система преобразуется к системе с преобладающими диагональными коэффициентами, а затем к приведенному виду. Производится проверка условий сходимости итерационной последовательности, находится значение α по одной из метрик ρ_1, ρ_2 или ρ_3 пространства R^3. Составляется программа решения заданной

системы линейных уравнений с учетом достаточных условий сходимости. Находится приближенное решение системы с заданной точностью.

3) Исходная система $A \cdot X = B$ преобразуется к нормальной системе $C \cdot X = D$ ($C = A^T \cdot A$, $D = A^T \cdot B$, A^T – результат транспонирования матрицы A), а затем к приведенному виду. Составляется программа решения методом Зейделя заданной системы линейных уравнений. Находится приближенное решение системы с заданной точностью ε.

Задание 3.

Графически находятся начальные приближения x_0, y_0. Если система имеет несколько решений, то методом Ньютона уточняется одно из них. Составляется программа решения методом Ньютона заданной системы уравнений. Находится приближенное решение системы с заданной точностью ε.

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

2.1. Интерполирование функций

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть известные значения некоторой функции $f(x)$ образуют таблицу:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Требуется получить значение функции $f(x)$ для такого значения аргумента x, которое входит в отрезок $[x_0; x_n]$, но не совпадает ни с одним из табличных значений $x_i (i = 0,1,...,n)$. Подход к задаче построения приближающей функции $F(x)$ основывается на требовании строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках $x_i (i = 0,1,...,n)$, т.е. $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, ..., F(x_n) = y_n$.

Нахождение приближенной функции называют *интерполяцией* (или *интерполированием*), а точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – *узлами интерполяции*.

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей. Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$, степень которого не больше n.

Будем искать $L_n(x)$ в виде: $L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + ... + l_n(x)$, где $l_i(x)$ – многочлен степени n, причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_i, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}. \tag{12}$$

Многочлены $l_i(x)$ составим следующим способом:

$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)$, где c_i – постоянный коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (12):

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Подставим c_i в $L_n(x)$, получим интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Рассмотрим процедуру организации вычислений по формуле Лагранжа.

Введем обозначения:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdot(x - x_1)...(x - x_n),$$

$$\Pi'_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdot(x - x_1)...(x - x_{i-1})\cdot(x - x_{i+1})...(x - x_n),$$

при $x = x_i : \Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)\cdot(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)$.

Тогда формуле Лагранжа можно придать более сжатый вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\cdot\Pi'_{n+1}(x_i)} = \Pi_{n+1}(x)\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x - x_i)\cdot\Pi'_{n+1}(x_i)}.$$

Организация вычислений по формуле Лагранжа улучшится, если пользоваться специальной вычислительной схемой.

Построим схему для 4 узлов $(i = 0,1,2,3)$ (таблица 2).

$p_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$, $p_1 = (x_1 - x_0)(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$ и т.д.

$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)$, $L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\cdot S$.

Если известно аналитическое выражение интерполируемой функции $f(x)$, то можно применять формулы для оценки погрешности интерполирования:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)|,$$

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)|, \quad \text{где } M_{n+1} = \max_{x_0 \le x \le x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Таблица 2

Вычислительная схема

x	x_0	x_1	x_2	x_3	p_i	y_i	$\frac{y_i}{p_i}$
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$x_0 - x_3$	p_0	y_0	$\frac{y_0}{p_0}$
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_1 - x_3$	p_1	y_1	$\frac{y_1}{p_1}$
x_2	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$x_2 - x_3$	p_2	y_2	$\frac{y_2}{p_2}$

x_3	$x_3 - x_0$	$x_3 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x - x_3$	p_3	y_3	$\frac{y_3}{p_3}$
							$S = \sum_{i=0}^{3} \frac{y_i}{p_i}$

Интерполяционные многочлены Ньютона

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицей с равноотстоящими значениями аргумента. В этом случае шаг таблицы $h = x_{i+1} - x_i (i = 0,1,2,...)$ является величиной постоянной.

Пусть функция задана таблицей с постоянным шагом. Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются *конечными разностями первого порядка*: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i = 0,1,2,...)$.

Из конечных разностей первого порядка образуются *конечные разности второго порядка*: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i (i = 0,1,2,...)$ и т.д.

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$ и т.д.

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-1} - ... + (-1)^k y_i.$$

Таблица конечных разностей имеет вид:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	…
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	…	
x_3	y_3	Δy_3	…		
x_4	y_4	…			
…	…				

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 - \textit{первая}$$

интерполяционная формула Ньютона.

Эта формула применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции.

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применяется *вторая интерполяционная формула Ньютона*, которая записывается в виде:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

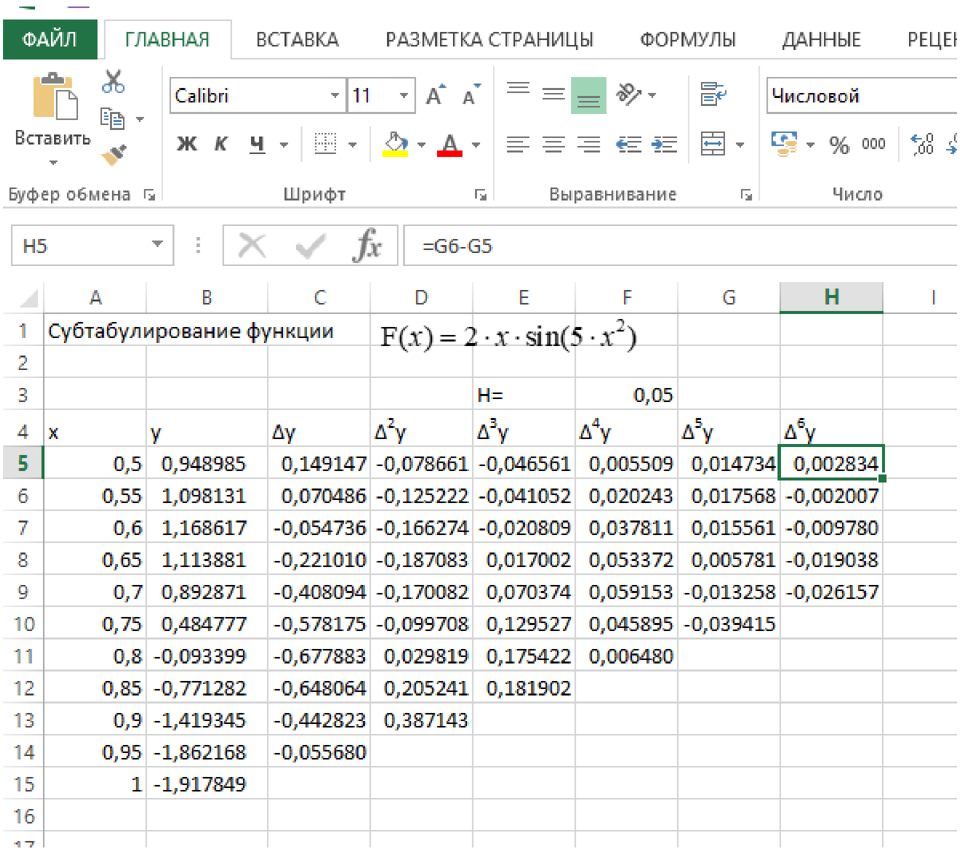
Субтабулирование функций

Интерполирование может применяться для уплотнения заданной таблицы функции, т.е. вычисления по исходной таблице новой таблицы с большим числом значений аргумента на прежнем участке его изменения. Эту операцию называют иногда *субтабулированием* функции.

В случае, когда исходная таблица задается с постоянным шагом, применяется интерполяционный многочлен Ньютона.

Выполним субтабулирование функции $\mathrm{F}(x) = 2\cdot x\cdot \sin(5\cdot x^2)$, пользуясь интерполяционными формулами Ньютона.

Предварительно в электронных таблицах MicrosoftExcell 2013 рассчитаем конечные разности от первого до шестого порядка для $x \in [0{,}5;1]$ с шагом $H = 0{,}05$ (рис. 5).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Субтабулирование функции			$\mathrm{F}(x) = 2\cdot x\cdot \sin(5\cdot x^2)$				
2								
3					H=	0,05		
4	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
5	0,5	0,948985	0,149147	-0,078661	-0,046561	0,005509	0,014734	0,002834
6	0,55	1,098131	0,070486	-0,125222	-0,041052	0,020243	0,017568	-0,002007
7	0,6	1,168617	-0,054736	-0,166274	-0,020809	0,037811	0,015561	-0,009780
8	0,65	1,113881	-0,221010	-0,187083	0,017002	0,053372	0,005781	-0,019038
9	0,7	0,892871	-0,408094	-0,170082	0,070374	0,059153	-0,013258	-0,026157
10	0,75	0,484777	-0,578175	-0,099708	0,129527	0,045895	-0,039415	
11	0,8	-0,093399	-0,677883	0,029819	0,175422	0,006480		
12	0,85	-0,771282	-0,648064	0,205241	0,181902			
13	0,9	-1,419345	-0,442823	0,387143				
14	0,95	-1,862168	-0,055680					
15	1	-1,917849						
16								

Рис. 5. Расчет таблицы конечных разностей в Microsoft Excell 2013

Составим программу в PascalABC для уплотнения части таблицы заданной функции. Возьмем интервал $[0{,}6;0{,}7]$ с шагом субтабулирования $h = 0{,}01$, так как выбранный интервал находится в начале отрезка интерполяции, то будем использовать первую интерполяционную формулу Ньютона (рис. 6).

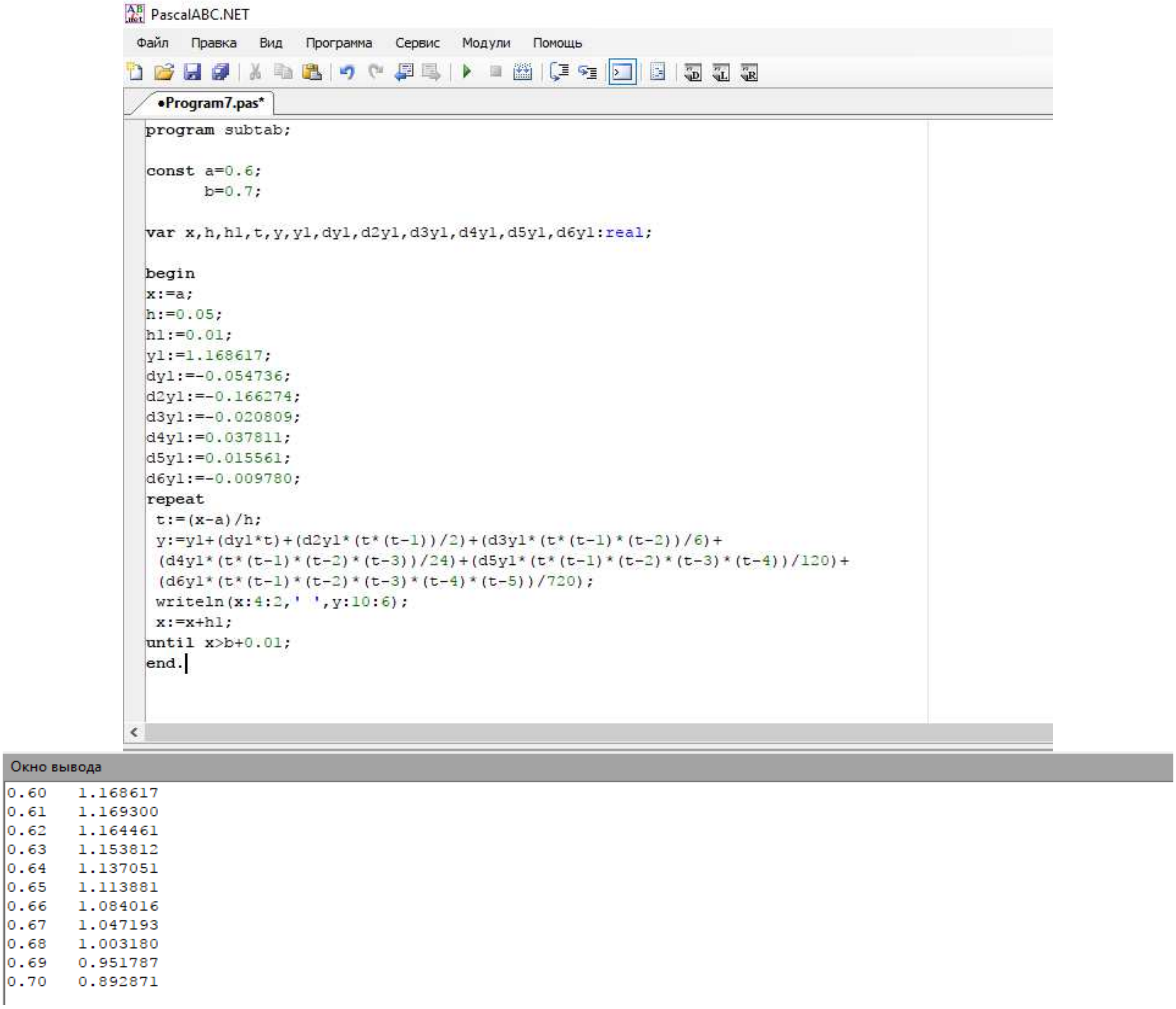


Рис. 6. Программная реализация уплотнения заданной функции

Как видно из рисунка 6, при значении $x = 0{,}65 : y = 1{,}113881$. Полученное значение совпадает со значением в таблице конечных разностей, представленной на рисунке 5.

2.2. Приближение табличных функций методом наименьших квадратов

Линейная регрессия

Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица некоторой зависимости f:

x	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

Нужно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически.

Поставим задачу так: найти функцию заданного вида

$$y = F(x), \qquad (13),$$

которая в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ принимает значения как можно более близкие к табличным значениям $y_1, y_2, ..., y_n$.

Формула (13) называется *эмпирической формулой* или *уравнением регрессии у на х.*

Рассмотрим способ нахождения формулы (13). Предположим, что приближающая функция $F(x)$ в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет значения

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n. \qquad (14)$$

Будем рассматривать совокупность значений функции $f(x)$ из таблицы и совокупность (14) как координаты двух точек $n-$мерного пространства.

С учетом этого, задача приближения функции может быть переформулирована следующим образом: найти такую функцию $F(x)$ заданного вида, чтобы расстояние между точками $M(y_1, y_2, ..., y_n)$ и $\bar{M}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n)$ было наименьшим. Таким образом, приходим к требованию, чтобы величина

$$\sqrt{(y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + ...(y_n - \bar{y}_n)^2} \qquad (15)$$

была наименьшей, что равносильно следующему: сумма квадратов

$$(y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + ...(y_n - \bar{y}_n)^2 \qquad (16)$$

должна быть наименьшей.

Такая задача носит название приближения функции методом наименьших квадратов.

Значения разностей $y_i - F(x_i) = \varepsilon_i (i = 1, 2, ..., n)$ называются *отклонениями измеренных значений у от вычисленных* по формуле (13).

Для эмпирической формулы (13) можно найти сумму квадратов отклонений:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2, \qquad (17)$$

которая, в соответствии с принципом наименьших квадратов, должна быть наименьшей.

Найдем приближающую функцию в виде линейной функции:

$$F(x, a, b) = ax + b.$$

Тогда частные производные по параметрам: $\dfrac{\partial F}{\partial a} = x; \dfrac{\partial F}{\partial b} = 1.$

Составим систему: $\begin{cases} \sum (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0, \\ \sum (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$

Далее, выполняя преобразования уравнений и поделив каждое уравнение на n, получаем: $\begin{cases} \left(\frac{1}{n}\sum x_i^2\right)\cdot a + \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)\cdot b = \frac{1}{n}\sum x_i y_i, \\ \left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)\cdot a + b = \frac{1}{n}\sum y_i. \end{cases}$

Введем обозначения: $\frac{1}{n}\sum x_i = M_x; \frac{1}{n}\sum y_i = M_y; \frac{1}{n}\sum x_i y_i = M_{xy}; \frac{1}{n}\sum x_i^2 = M_{x^2}$.

Тогда система примет вид: $\begin{cases} M_{x^2}\cdot a + M_x \cdot b = M_{xy}, \\ M_x \cdot a + b = M_y. \end{cases}$

Решив систему, получим значения параметров a и b, а следовательно, и конкретный вид линейной функции.

Квадратичная регрессия

Найдем приближающую функцию в виде квадратичной функции:

$$F(x,a,b,c) = ax^2 + bx + c;$$

Частные производные по параметрам: $\frac{\partial F}{\partial a} = x^2; \frac{\partial F}{\partial b} = x; \frac{\partial F}{\partial c} = 1.$

Составим систему: $\begin{cases} \sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot x_i^2 = 0, \\ \sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot x_i = 0, \\ \sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0, \end{cases}$

Или с учетом аналогичных обозначений для случая линейной регрессии:

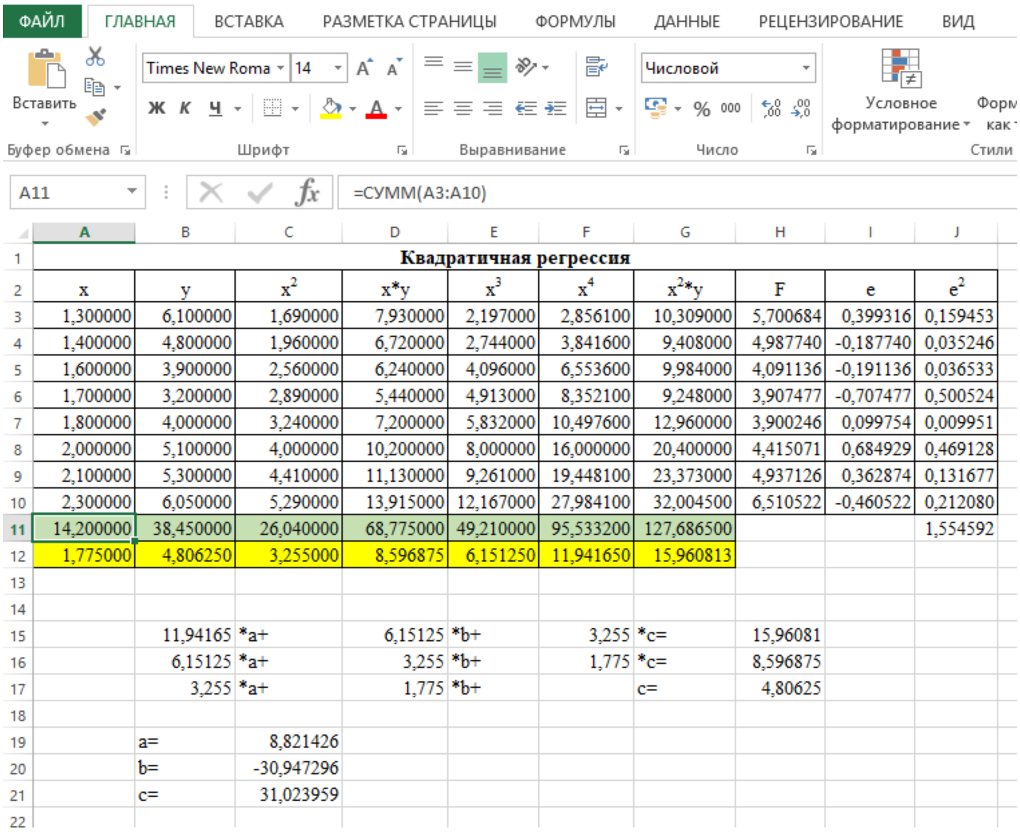
$$\begin{cases} M_{x^4}\cdot a + M_{x^3}\cdot b + M_{x^2}\cdot c = M_{x^2y}, \\ M_{x^3}\cdot a + M_{x^2}\cdot b + M_x \cdot c = M_{xy}, \\ M_{x^2}\cdot a + M_x \cdot b + c = M_y. \end{cases}$$

Решение этой системы дает значения параметров a,b,c для заданной приближающей функции.

Приведем пример вычисления по заданной таблице значений функции расчет квадратичной регрессии в MicrosoftExcel 2013.

x	1,30	1,40	1,60	1,70	1,80	2,00	2,10	2,30
y	6,10	4,80	3,90	3,20	4,00	5,10	5,30	6,05

Для этого диапазон A3:B10 заполняем исходными данными, далее выполняем промежуточные вычисления: $x^2, x\cdot y, x^3, x^4, x^2\cdot y$. Затем в диапазоне ячеек A11:G11 рассчитываем суммы значений по столбцам и средние значения в диапазоне A12:G12. Мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными a,b,c (рис. 7).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Квадратичная регрессия									
2	x	y	x^2	x*y	x^3	x^4	x^2*y	F	e	e^2
3	1,300000	6,100000	1,690000	7,930000	2,197000	2,856100	10,309000	5,700684	0,399316	0,159453
4	1,400000	4,800000	1,960000	6,720000	2,744000	3,841600	9,408000	4,987740	-0,187740	0,035246
5	1,600000	3,900000	2,560000	6,240000	4,096000	6,553600	9,984000	4,091136	-0,191136	0,036533
6	1,700000	3,200000	2,890000	5,440000	4,913000	8,352100	9,248000	3,907477	-0,707477	0,500524
7	1,800000	4,000000	3,240000	7,200000	5,832000	10,497600	12,960000	3,900246	0,099754	0,009951
8	2,000000	5,100000	4,000000	10,200000	8,000000	16,000000	20,400000	4,415071	0,684929	0,469128
9	2,100000	5,300000	4,410000	11,130000	9,261000	19,448100	23,373000	4,937126	0,362874	0,131677
10	2,300000	6,050000	5,290000	13,915000	12,167000	27,984100	32,004500	6,510522	-0,460522	0,212080
11	14,200000	38,450000	26,040000	68,775000	49,210000	95,533200	127,686500			1,554592
12	1,775000	4,806250	3,255000	8,596875	6,151250	11,941650	15,960813			
13										
14										
15		11,94165	*a+	6,15125	*b+	3,255	*c=	15,96081		
16		6,15125	*a+	3,255	*b+	1,775	*c=	8,596875		
17		3,255	*a+	1,775	*b+		c=	4,80625		
18										
19		a=	8,821426							
20		b=	-30,947296							
21		c=	31,023959							
22										

Рис.7. Расчет квадратичной регрессии

Для решения полученной системы относительно параметров a,b,c можно использовать онлайн-сервис http://matrixcalc.org/slu.html.

2.3 Индивидуальное задание № 2 по теме «Приближение функций»

Задание 1.

1) По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график и отметить на нем узловые точки.

1.

x	-1	0	3
y	-3	5	2

2.

x	2	3	5
y	4	1	7

3.

x	0	2	3
y	-1	-4	2

4.

x	-3	-1	3
y	7	-1	4

5.

x	-2	-1	2
y	4	9	1

6.

x	-4	-2	0
y	2	8	5

7.

x	2	4	7
y	-1	-6	3

8.

x	0	1	4
y	7	-1	8

9.

x	-7	-5	-4
y	4	-4	5

10.

x	7	9	13
y	2	-2	3

11.

x	1	2	4
y	-3	-7	2

12.

x	2	4	5
y	9	-3	6

13.

x	-1	1	3
y	4	-7	1

14.

x	-9	-7	-4
y	3	-3	4

15.

x	-8	-5	0
y	9	-2	4

16.

x	1	4	9
y	-2	9	3

17.

x	7	8	10
y	6	-2	7

18.

x	-3	-1	1
y	11	-1	6

19.

x	0	1	4
y	-2	6	3

20.

x	1	3	4
y	0	-3	3

2) Вычислить с помощью калькулятора одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оценить погрешность интерполяции.

3) Составить программу для уплотнения части таблицы заданной функции, пользуясь интерполяционными формулами Ньютона; шаг субтабулирования H=0,01.

Таблица 2.1

x	$f(x)=\dfrac{\lg x}{x}+x^2$
1,3	1,7777
2,1	4,5634
3,7	13,8436
4,5	20,3952
6,1	37,3387
7,7	59,4051
8,5	72,3593

Таблица 2.2

x	$f(x)=\ln(2,3x)-\dfrac{0,8}{x}$
1,2	0,3486
1,9	1,0537
3,3	1,7844
4,7	2, 2103
5,4	2,3712
6,8	2,6322
7,5	2,7411

Таблица 2.3

x	$f(x)=2,1\cdot\sin(0,37x)$
-3,2	-1,9449
-0,8	-0,6126
0,4	0,3097
2,8	1,8068
4,0	2,0913
6,4	1,4673
7,6	0,6797

Таблица 2.4

x	$f(x)=1,7\sqrt[3]{x}-\cos(0,4-0,7x)$
2,6	2,1874
3,3	2,8637
4,7	3,8161
6,1	3,8524
7,5	3,1905
8,2	2,8409
9,6	2,6137

Номер варианта	*таблица*	*x*
1	2.1	3,8
2	2.2	3,5
3	2.3	0,5
4	2.4	4,8
5	2.1	4,1
6	2.2	3,9
7	2.3	3,3
8	2.4	4,0
9	2.1	2,9
10	2.2	5,3
11	2.3	4,1
12	2.4	7,6
13	2.1	4,4
14	2.2	2,5
15	2.3	5,2
16	2.4	6,8
17	2.1	6,5
18	2.2	5,5
19	2.3	5,0
20	2.4	5,0

Таблица 2.5

x	*sinx*
0,60	0,56464
0,65	0,60519
0,70	0,64422
0,75	0,68164
0,80	0,71736
0,85	0,75128
0,90	0,78333
0,95	0,81342
1,00	0,84147
1,05	0,86742
1,10	0,89121

Таблица 2.6

x	*cosx*
0,05	0,99875
0,10	0,99500
0,15	0,98877
0,20	0,98007
0,25	0,96891
0,30	0,95534
0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,45	0,90045
0,50	0,87758
0,55	0,85252

Таблица 2.7

X	*sinx*
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356
1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
1,55	0,99978
1,60	0,99957

Таблица 2.8

X	*cosx*
1,00	0,54030
1,05	0,49757
1,10	0,45360
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,40	0,16997
1,45	0,12050
1,50	0,07074

Номер варианта	*таблица*	*Концы отрезка субтабулирования*	
		а	*В*
1	2.5	0,65	0,75
2	2.6	0,10	0,20
3	2.7	1,15	1,25
4	2.8	1,05	1,15
5	2.5	0,70	0,80
6	2.6	0,15	0,25
7	2.7	1,20	1,30
8	2.8	1,10	1,20
9	2.5	0,75	0,85
10	2.6	0,20	0,30
11	2.7	1,25	1,35
12	2.8	1,15	1,25
13	2.5	0,80	0,90
14	2.6	0,25	0,35
15	2.7	1,30	1,40
16	2.8	1,20	1,30
17	2.5	0,85	0,95
18	2.6	0,30	0,40
19	2.7	1,35	1,45
20	2.8	1,25	1,35

Задание 2.

По заданной таблице значений функции построить методом наименьших квадратов линейную и квадратичную регрессии с использованием:

1) калькулятора;

2) ПК.

Сравнить величины среднеквадратических отклонений.

1.

x	0,10	0,30	0,40	0,60	0,70	0,80	1,00	1,10
y	0,25	0,50	0,65	0,55	0,42	0,30	0,22	0,15

2.

x	1,30	1,40	1,60	1,70	1,80	2,00	2,10	2,30
y	6,10	4,80	3,90	3,20	4,00	5,10	5,30	6,05

3.

x	1,30	1,40	1,60	1,70	2,00	2,10	2,30	2,50
y	2,40	1,80	1,20	1,40	2,30	2,90	3,00	3,20

4.

x	0,40	0,70	0,90	1,10	1,40	1,60	1,70	2,00
y	0,15	0,83	1,65	1,52	0,90	0,31	0,25	0,10

5.

x	2,00	2,50	2,70	2,90	3,20	3,40	3,70	4,00
y	0,11	0,81	1,05	0,90	0,23	0,18	0,10	0,05

6.

x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,80	1,00	1,20
y	2,30	1,20	1,05	0,90	1,20	2,10	2,25	2,40

7.

x	1,10	2,00	2,50	2,90	3,50	4,00	4,30	4,80
y	0,62	0,35	0,10	0, 80	0,22	0,37	0,45	0,58

8.

x	0,30	0,50	0,80	0,90	1,20	1,40	1,50	2,00
y	1,10	0,60	0,40	0,38	0,65	0,90	1,00	1,15

9.

x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,70	0,90	1,20
y	1,30	3,50	4,20	4,00	2,80	1,60	1,45	1,20

10.

x	1,20	1,40	1,50	1,60	1,80	2,10	2,40	2,80
y	0,90	3,30	4,10	3,90	2,80	1,10	0,85	0,70

11.

x	0,10	0,20	0,40	0,50	0,80	0,90	1,20	1,50
y	0,15	0,61	1,20	1,25	1,10	0,70	0,22	0,10

12.

x	0,20	0,30	0,40	0,70	0,80	1,00	1,20	1,50
y	1,40	0,90	0,65	0,51	0,40	0,75	0,86	1,30

13.

x	0,20	0,30	0,50	0,70	0,90	1,20	1,50	1,70
y	0,10	2,50	4,15	4,60	4,10	3,90	2,20	0,20

14.

x	2,20	2,50	2,60	2,80	3.10	3,20	3,40	3,60
y	1,70	0,80	0,52	0,30	0,10	0,54	0,891	1,50

15.

x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,70	0,90	1,20	1,50
y	1,10	2,30	4,00	4,55	2,40	2,00	1,15	0,52

16.

x	2,10	3,30	4,40	4,60	4,70	4,80	5,00	5,10
y	1,25	1,50	1,65	1,55	1,42	1,30	1,22	1,15

17.

x	3,30	3,40	3,60	3,70	3,80	4,00	4,10	4,30
y	7,10	5,80	4,90	4,20	5,00	6,10	6,30	7,05

18.

x	2,40	2,70	2,90	3.10	3,40	3,60	3,70	4,00
y	1,15	1,83	2,65	2,52	1,90	1,31	1,25	1,10

19.

x	4,00	4,50	4,70	4,90	5,20	5,40	5,70	6,00
y	1,11	1,81	2,05	1,90	1,23	1,18	1,10	1,05

20.

x	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,80	3,00	3,20
y	3,30	2,20	2,05	1,90	2,20	3,10	3,25	3,40

2.4 Рекомендации к выполнению индивидуального задания № 2

Задание 1.

1) При выполнении задания составляется многочлен Лагранжа, производятся необходимые вычисления и приведение подобных членов. По полученной формуле строится график интерполирующей функции, на котором отмечаются узловые точки.

2) Вычисления проводятся с помощью калькулятора (таблиц Excel) по специальной расчетной схеме и заносятся в таблицу. Результат интерполирования сравнивается с вычислением значения функции по её выражению, заданному в таблице; оценивается погрешность интерполирования.

3) По заданной таблице функции с равноотстоящими значениями

аргумента составляется таблица конечных разностей и определяется порядок интерполяционного многочлена Ньютона. В зависимости от расположения отрезка субтабулирования относительно исходной таблицы выбирается первая или вторая интерполяционная формула Ньютона. Составляется программа для уплотнения части таблицы заданной функции с применением выбранной формулы Ньютона. Выписывается результат работы программы – уплотненная таблица с шагом H на отрезке [a;b].

Задание 2.

1) Вычисления с использованием калькулятора осуществляются в расчетных таблицах. Находятся параметры линейной и квадратичной регрессий. Определяются среднеквадратические отклонения σ для каждой из найденных приближающих функций и сравниваются между собой. На координатной плоскости строится точечный график заданной таблицы, а также линейная и квадратичная регрессии.

2) Составляется программа с выводом значений параметров приближающих функций заданного вида (линейная и квадратичная) и соответствующих им среднеквадратических отклонений. Результаты работы программы сравниваются с результатами расчетов п. 1).

3. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

3.1. Численное дифференцирование

Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Лагранжа

Выведем формулу численного дифференцирования, для этого многочлен Лагранжа запишем в виде:

$$L_n(x)=\prod\nolimits_{n+1}(x)\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\cdot\prod\nolimits'_{n+1}(x_i)},\text{ где }\prod\nolimits_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n),$$

$$\prod\nolimits'_{n+1}(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n).$$

Примем подстановку: $\dfrac{x-x_0}{h}=t,\ x_{i+1}-x_i=h,\ h-const,$ тогда

$$x - x_0 = ht,$$
$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = ht - h = h(t-1),$$
$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = ht - 2h = h(t-2),$$
....
$$x - x_i = h(t - i).$$
$$\prod_{n+1}(x) = h^{n+1} t(t-1)(t-2)...(t-n).$$

Введем обозначение: $t^{[n+1]} = t(t-1)(t-2)...(t-n)$, следовательно, $\prod_{n+1}(x) = h^{n+1} \cdot t^{[n+1]}$.

При постоянном шаге:
$$x_i = x_0 + ih; i = 0,1,...,n.$$
$$x_i - x_0 = ih,$$
$$x_i - x_1 = x_i - (x_0 + h) = x_i - x_0 - h = ih - h = h(i-1),$$
$$x_i - x_2 = x_i - (x_0 + 2h) = x_i - x_0 - 2h = ih - 2h = h(i-2),$$
....
$$x - x_n = h(i - n).$$

Всего n строк, причем значения разностей из первых i строк положительны, а остальные – отрицательны, в этом случае:
$$\prod_{n+1}'(x_i) = h^n \cdot i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot ... \cdot 1 \cdot (-1)...(-(n-i)) = h^n \cdot i! \cdot (n-i)! \cdot (-1)^{n-i}.$$

Подставим полученное в первоначальную формулу Лагранжа и получим формулу для равноотстоящих узлов: $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \dfrac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)}$.

Далее продифференцируем многочлен Лагранжа по x как функцию от t:
$$f'(x) \approx L_n'(x)\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{d}{dt}\left[\frac{t^{[n+1]}}{t-i}\right].$$

Учитывая, что $x = x_0 + th, \dfrac{dx}{dt} = h,$ окончательно получаем *формулу численного дифференцирования на основе интерполяционной формулы Лагранжа*: $L_n'(x) \approx \dfrac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} y_i \dfrac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t^{[n+1]}}{t-i}\right].$

Оценка погрешности численного дифференцирования в узлах находится по формуле: $|r_n(x_i)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^n i!(n-i)!$, где $M_{n+1} = \max\limits_{x_0 \le x \le x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

<u>Пример.</u>

Вычислить приближенное значение производной функции, заданной таблицей в точке $x = 4$.

x	3	4	5
$f(x)$	2	-1	6

<u>Решение.</u>

Из таблицы видно, что $n = 2, h = 1$. Подставим данные таблицы в формулу численного дифференцирования:

$$f'(x) \approx \frac{1}{1}\left(2\cdot\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\big((t-1)(t-2)\big) - \frac{-1}{1}\frac{d}{dt}\big(t(t-2)\big) + 6\cdot\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\big(t(t-1)\big)\right) = 10t - 8,$$

Найдем $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{4-3}{1} = 1,$ и тогда $f'(4) \approx 2.$

Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Ньютона

Первый интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Перепишем многочлен, раскрывая скобки:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots.$$

Дифференцируем предыдущее равенство по переменной t, тогда получим:

$$P_n'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots\right).$$

Пусть $x = x_0 \Rightarrow t = 0$, следовательно, *формула численного дифференцирования на основе интерполяционной формулы Ньютона* имеет вид: $P_n'(x_0) \approx \dfrac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \dfrac{\Delta^2 y_0}{2} + \dfrac{\Delta^3 y_0}{3} - \dfrac{\Delta^4 y_0}{4} + \dfrac{\Delta^5 y_0}{5} - \ldots\right).$

Оценка погрешности численного дифференцирования по формуле Ньютона: $r_n(x_0) \approx \dfrac{(-1)^n \Delta^n y_0}{h(n+1)}.$

<u>Пример.</u>

Найти значение производной функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 32$, заданной таблицей.

x	32	33	34	35	36
$y=\sqrt{x}$	5,657	5,745	5,831	5,916	6,0

Решение.

Составим таблицу конечных разностей:

x	$y=\sqrt{x}$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
32	5,657	0,088	-0,002	0,001	-0,001
33	5,745	0,086	-0,001	0	
34	5,831	0,085	-0,001		
35	5,916	0,084			
36	6,0				

Подставим значения первой строки таблицы в формулу численного дифференцирования на основе интерполяционной формулы Ньютона: $f'(32)\approx 0{,}088+\dfrac{0{,}002}{2}+\dfrac{0{,}001}{3}=0{,}089$.

3.2 Численное интегрирование

Формула прямоугольников численного интегрирования

Метод прямоугольников непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой. Пусть на $[a;b]$ задана функция $y=f(x)$. С помощью точек $x_0,x_1,...,x_n$ разобьем отрезок $[a;b]$ на n элементарных отрезков $[x_{i-1};x_i]\,(i=1,2,...,n)$, причем $x_0=a, x_n=b$. На каждом из этих отрезков выберем произвольную точку $\gamma_i\,(x_{i-1}\le\gamma_i\le x_i)$ и найдем произведение s_i значения функции в этой точке $f(\gamma_i)$ на длину элементарного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$s_i = f(\gamma_i)\cdot\Delta x_i. \tag{18}$$

Составим сумму всех таких произведений:

$$S_n = s_1+s_2+\ldots+s_n=\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\cdot\Delta x_i. \tag{19}$$

Сумма S_n называется интегральной суммой. Геометрический смысл введенных понятий проиллюстрируем для случая $f(x)>0$ (рис. 8).

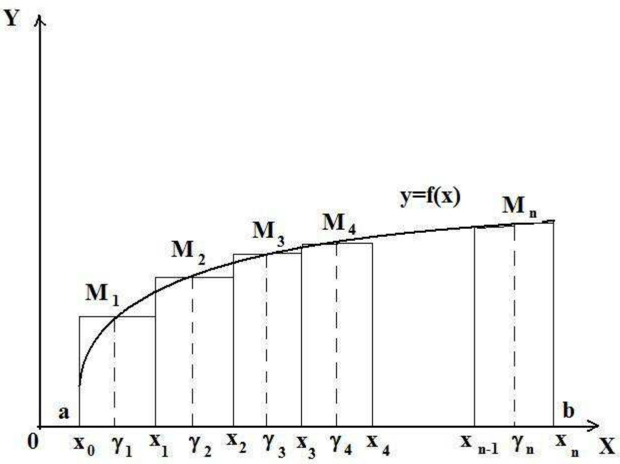


Рис. 8. Геометрическая интерпретация формулы прямоугольников

Выражения (18) при $i = 1, 2, ..., n$ описывают площади элементарных прямоугольников. Интегральная сумма (19) – площадь ступенчатой фигуры, образуемой этими прямоугольниками. При неограниченном увеличении числа точек деления и стремлении к нулю всех элементов Δx_i верхняя граница фигуры (ломаная) переходит в линию $y = f(x)$.

Площадь полученной фигуры, которую называют криволинейной трапецией, равна определенному интегралу.

В методе прямоугольников в качестве точек γ_i можно выбирать левые $(\gamma_i = x_{i-1})$ или правые $(\gamma_i = x_i)$ границы элементарных отрезков.

Широко распространенным и более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах): $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2})$, где $x_{i-1/2} = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \dfrac{h_i}{2}, i = 1, 2, ..., n.$

Под *методом прямоугольников* будем понимать последний алгоритм (он еще называется методом средних). Важным частным случаем рассмотренных формул является их применение при численном интегрировании с постоянным шагом $h_i = h = const(i = 1, 2, ..., n)$.

Формула прямоугольников принимает вид: $\int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$.

Расчетная таблица для $n=10$:

i	x_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
0	x_0	$x_{1/2}=\dfrac{x_0+x_1}{2}$	$y_{1/2}=f(x_{1/2})$
1	x_1	$x_{3/2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$	$y_{3/2}=f(x_{3/2})$
2	x_2	$x_{5/2}=\dfrac{x_2+x_3}{2}$	$y_{5/2}=f(x_{5/2})$
3	x_3	.	.
4	.	.	.
5	.	.	.
6	.	.	.
7	.	.	.
8	.	.	.
9	x_9	$x_{19/2}=\dfrac{x_9+x_{10}}{2}$	$y_{19/2}=f(x_{19/2})$
10	x_{10}	-	-
-	-	-	$S=\sum y_{i-1/2}$

На основе расчетной таблицы интеграл вычисляется по формуле: $I=h\cdot\sum\limits_{i=1}^{10} y_{i-1/2}=h\cdot S.$

Оценка погрешности формулы прямоугольников:

$$|R|\le\frac{|b-a|\cdot h^2}{24}\cdot M_2, \text{где } M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

Численное интегрирование с помощью формулы трапеций

Формулы, используемые для приближенного (численного) вычисления однократных интегралов, называют *квадратурными формулами*. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом, например, Лагранжа $L_n(x)$. Получается приближенное равенство: $\int\limits_a^b f(x)dx\approx\int\limits_a^b L_n(x)dx$ или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot \Pi'_{n+1}(x_i)}dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot \Pi'_{n+1}(x_i)}dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i A_i, \text{ где } A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\cdot \Pi'_{n+1}(x_i)}dx.$$

Разделим отрезок $[a;b]$ на n равных частей $x_{i+1} - x_i = h,\ h - const,\ h = \dfrac{b-a}{n}.$

Для равноотстоящих узлов: $A_i = \displaystyle\int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dx, i = 0,1,...,n.$

Перейдем в интеграле к переменной t. $t = \dfrac{x - x_0}{h} \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{h}, dx = hdt = \dfrac{b-a}{n}dt.$

При $x = x_0 \Rightarrow t = 0;\ x = x_n \Rightarrow t = \dfrac{x_n - x_0}{h} = n.$

Тогда $A_i = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt = (b-a)H_i,$

где $H_i = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt, i = 0,1,...,n.$

Числа H_i называются коэффициентами Котеса.

Окончательно получаем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \sum_{i=0}^{n} y_i H_i - \textit{квадратурные формулы Ньютона – Котеса.}$$

При $n = 1$ имеем $i = 0;1.$

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t}dt = -\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2},\ H_1 = -\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

Тогда на $[x_0; x_1]$ получаем интеграл:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0)\cdot\left(H_0 y_0 + H_1 y_1\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right).$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной фигуры заменяется площадью трапеции.

Распространим формулу на все отрезки разбиения, получим общую *формулу трапеций* для отрезка $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Расчетная таблица для вычисления определенного интеграла по формуле трапеций:

x_i	$\frac{y_i}{2}(i=0;n)$	$y_i(i=1,...,n-1)$
x_0	$\frac{y_0}{2}$	-
x_1	-	y_1
x_2	-	y_2
.	-	.
.	-	.
x_n	$\frac{y_n}{2}$	-
-	$S_1 = \frac{y_0}{2} + \frac{y_n}{2}$	$S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i$

На основе расчетной таблицы интеграл вычисляется по формуле:

$$I = h \cdot (S_1 + S_2).$$

Оценка погрешности численного интегрирования по формуле трапеций: $|R_n| \le M_2 \cdot \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}$, где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

Формула Симпсона численного интегрирования

При $n = 2$ имеем $i = 0;1;2$. Коэффициенты Котеса в этом случае:

$$H_0 = -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t}dt = \frac{1}{6},\ H_1 = -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1}dt = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-2}dt = \frac{1}{6}.$$

Тогда на $[x_0; x_2]$ получаем интеграл:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = (x_2 - x_0) \cdot (H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2) = 2h\left(\frac{1}{6}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2\right),$$ т.е.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{2h}{3} \cdot \left(\frac{y_0}{2} + 2y_1 + \frac{y_2}{2}\right).$$

Геометрически, в соответствии со смыслом интерполяционной формулы Лагранжа, при $n=2$ использование этой формулы означает замену подынтегральной функции $f(x)$ параболой $L_2(x)$, проходящей через точки $M_i(x_i, y_i)(i=0;1;2)$.

Если считать, что n – четное ($n=2m$), то получим общую *формулу Симпсона*: $\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{3}\cdot\left(\frac{y_0+y_{2m}}{2}+2y_1+y_2+...+2y_{2m-1}\right)$.

Расчетная таблица для вычисления определенного интеграла по формуле Симпсона:

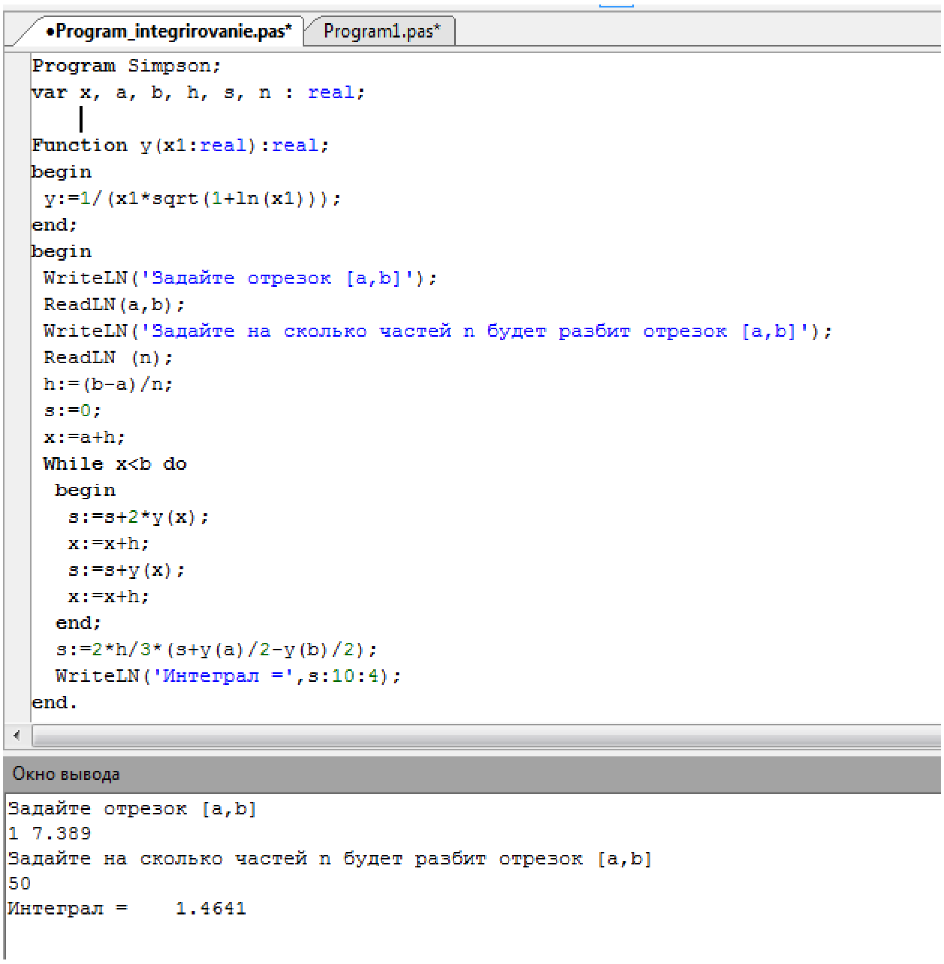
x_i	$\frac{y_i}{2}(i=0;n)$	$2y_i(i=1,3,5,...,n-1)$	$y_i(i=2,4,6,...)$
x_0	$\frac{y_0}{2}$	-	-
x_1	-	$2y_1$	-
x_2	-	-	y_2
x_3	-	$2y_3$	
.	-	.	
.	-	.	
x_{n-1}	-	$2y_{n-1}$	-
x_n	$\frac{y_n}{2}$	-	-
-	$S_1=\frac{y_0}{2}+\frac{y_n}{2}$	$S_2=\sum 2y_i$	$S_3=\sum y_i$

На основе расчетной таблицы интеграл вычисляется по формуле:

$$I=\frac{2h}{3}\cdot(S_1+S_2+S_3).$$

Оценка погрешности численного интегрирования по формуле Симпсона: $|R_n|\le M_4\cdot\frac{|b-a|\cdot h^4}{180}$, где $M_4=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^4(x)\right|$.

Представим программу вычисления определенного интеграла $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ по формуле Симпсона в PascalABC (рис. 9).




```
Program Simpson;
var x, a, b, h, s, n : real;

Function y(x1:real):real;
begin
 y:=1/(x1*sqrt(1+ln(x1)));
end;
begin
 WriteLN('Задайте отрезок [a,b]');
 ReadLN(a,b);
 WriteLN('Задайте на сколько частей n будет разбит отрезок [a,b]');
 ReadLN (n);
 h:=(b-a)/n;
 s:=0;
 x:=a+h;
 While x<b do
  begin
   s:=s+2*y(x);
   x:=x+h;
   s:=s+y(x);
   x:=x+h;
  end;
  s:=2*h/3*(s+y(a)/2-y(b)/2);
  WriteLN('Интеграл =',s:10:4);
end.
```

Окно вывода

```
Задайте отрезок [a,b]
1 7.389
Задайте на сколько частей n будет разбит отрезок [a,b]
50
Интеграл =    1.4641
```

Рис. 9. Алгоритм вычисления определенного интеграла в PascalABC

Выполним проверку решения в онлайн-сервисе (рис. 10).

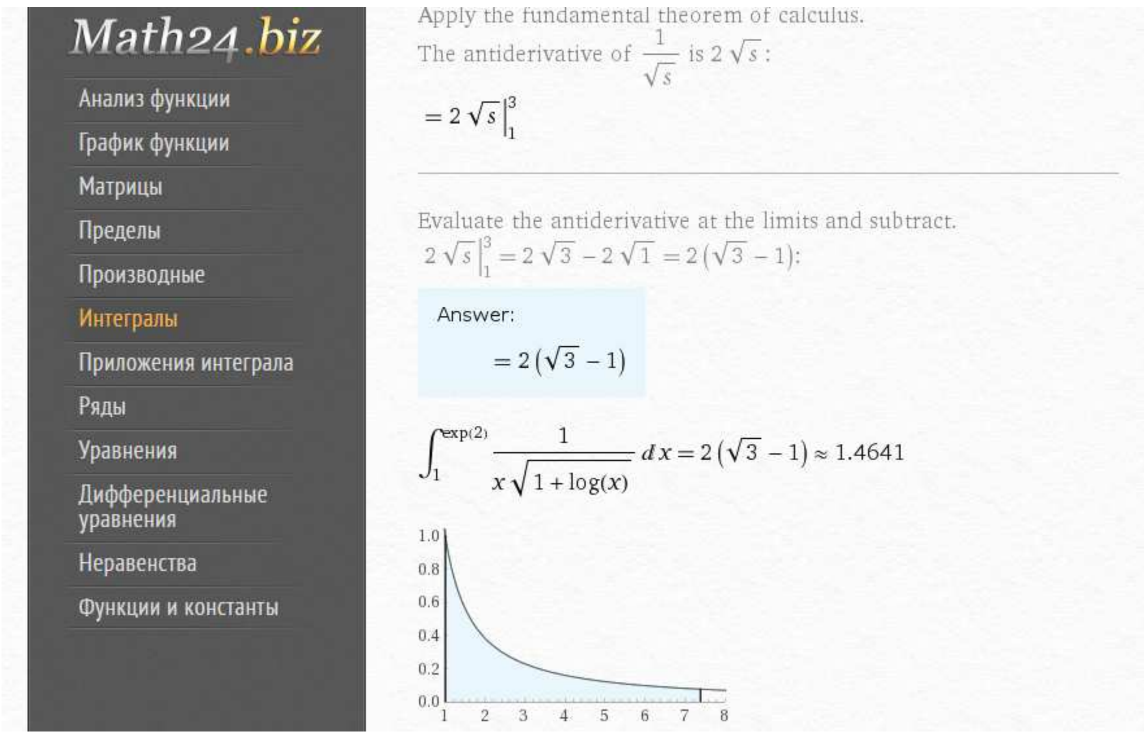


Рис. 10. Проверка решения определенного интеграла в онлайн-сервисе

3.3 Индивидуальное задание № 3 по теме «Численное дифференцирование и интегрирование»

Задание 1.

Вычислить с помощью калькулятора значение производной функции, заданной таблично, используя:

1) интерполяционную формулу Лагранжа, оценить погрешность метода;

2) интерполяционную формулу Ньютона, оценить погрешность метода.

номер варианта	*функция* $f(x)$	x_0	*номер варианта*	*функция* $f(x)$	x_0
1	$\sin x$	0,60	11	$\sin x$	1,20
2	$\cos x$	0,05	12	$\cos x$	1,10
3	$\sin x$	1,10	13	$\sin x$	0.75
4	$\cos x$	1,00	14	$\cos x$	0,20
5	$\sin x$	0,65	15	$\sin x$	1,25
6	$\cos x$	0,10	16	$\cos x$	1,15
7	$\sin x$	1,15	17	$\sin x$	0,80
8	$\cos x$	1,05	18	$\cos x$	0,25
9	$\sin x$	0,70	19	$\sin x$	1,30
10	$\cos x$	0,15	20	$\cos x$	1,20

Задание 2.

1) Вычислить с помощью калькулятора интеграл заданной функции при n=10 по формуле:

а) прямоугольников;

б) трапеций;

в) Симпсона.

Произвести оценку погрешности методов интегрирования.

1. $\int\limits_{1,2}^{2,2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx;$

2. $\int\limits_{0,4}^{2,4} \frac{e^{0,03x}}{x} dx;$

3. $\int\limits_{0,4}^{1,4} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx;$

4. $\int\limits_{1,6}^{3,6} \frac{x}{2} \cdot \lg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx;$

5. $\int\limits_{-1}^{1} \left(x - e^{2x}\right)dx;$

6. $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{\cos x}{x+1}dx;$

7. $\int\limits_{1}^{3} \frac{\ln(4+x) - \ln 8}{(4-x)\cdot\sqrt{x}}dx;$

8. $\int\limits_{0,4}^{1,4} \frac{1}{\sqrt{0,5x^2 + 2}}dx;$

9. $\int\limits_{1,2}^{2,2} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \sin\frac{x}{2}dx;$

10. $\int\limits_{1,2}^{2,2} \frac{\lg\left(x^2 + 0,8\right)}{x-1}dx;$

11. $\int\limits_{0,4}^{1,4} \left(2x + 0,5\right) \cdot \sin x dx;$

12. $\int\limits_{0,6}^{3,6} \frac{1}{x + \sin(0,5x)}dx;$

13. $\int\limits_{1,3}^{2,3} \frac{\sin(x^2 - 1)}{2\cdot\sqrt{x}}dx;$

14. $\int\limits_{1}^{2} (x + 1,9) \cdot \sin\frac{x}{3}dx;$

15. $\int\limits_{1,5}^{2,5} x^2 \cdot tg\frac{x}{2}dx;$

16. $\int\limits_{0,2}^{2,2} \sqrt{x+1}\cos(x^2)dx;$

17. $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}dx;$

18. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{tg\left(x^2 + 0,5\right)}{2x^2 + 1}dx;$

19. $\int\limits_{0,1}^{1,1} \frac{3x^2 + \sin x}{x^2}dx;$

20. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} (3x^2 + tgx)dx;$

2) Составить программу вычисления интеграла заданной функции по формуле Симпсона.

3.4 Рекомендации к выполнению индивидуального задания № 3

Задание 1.

Для выполнения задания составляется таблица из шести равноотстоящих значений аргумента, начиная с x_0 и шагом h= 0,05 ($x_i = x_0 + i * h$; i = 0, 1, 2, 3, 4, 5) и соответствующих значений заданной функции$f(x)$:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

Для вычисления производной используются данные составленной таблицы.

Выбираются следующие участки таблицы для дифференцирования с использованием:

1) формулы Лагранжа – первые три табличных значения:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

2) формулы Ньютона – пять табличных значений, начиная со второго:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

Производная определяется в точке x_1. Оцениваются погрешности методов.

Задание 2.

Отрезок интегрирования разбивается на 10 равных частей, и производится вычисление интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона в расчетных таблицах. Оцениваются погрешности методов.

Составляется программа вычисления интеграла заданной функции по формуле Симпсона. Выписывается результат работы программы.

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши

Метод Эйлера

Методы решения дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы:

1) *Графические методы* используют геометрические построения (решение – в виде графика);

2) *Аналитические методы* изучаются в курсе «Дифференциальные уравнения» (решение – в виде аналитического выражения);

3) *Приближенные методы* используют различные упрощения самих уравнений путем обоснованного отбрасывания некоторых содержащихся в них членов;

4) *Численные методы*, когда искомая функция получается в виде

таблицы.

Задача Коши формулируется следующим образом:

Для заданных x_0, y_0 найти такое решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, что $y(x_0) = y_0$.

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме. Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием: $y(x_0) = y_0$. Получение таблицы значений искомой функции $y(x)$ по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$\Delta y_k = h \cdot f(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, k = 0,1,2,...,n.$

Рекомендуемая расчетная таблица решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ методом Эйлера на отрезке $[a;b]$:

x_k	y_k	$\Delta y_k = h \cdot f(x_k, y_k)$
$x_0 = a$	y_0	$\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0)$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$\Delta y_1 = h \cdot f(x_1, y_1)$
…	…	…
$x_n = x_{n-1} + h = b$	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$	-

Метод Эйлера обладает малой точностью. К тому же погрешность каждого нового шага систематически возрастает.

Метод Эйлера – Коши

Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность. Модификации метода Эйлера обычно направлены на то, чтобы более точно определить направление перехода из точки (x_i, y_i) в точку (x_{i+1}, y_{i+1}). Метод Эйлера – Коши рекомендует следующий порядок вычислений: $y^*_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})}{2}$.

Геометрически это означает, что мы определяем направление интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y^*_{i+1}), а в качестве окончательного берем среднее этих направлений.

Рекомендуемая расчетная таблица решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ методом Эйлера на отрезке $[a;b]$:

x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	y^*_{k+1}	$f(x_{k+1}, y^*_{k+1})$	$\Delta y_k = h \cdot \dfrac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})}{2}$
x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$y^*_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$	$f(x_1, y^*_1)$	$\Delta y_0 = h \cdot \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)}{2}$
x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$y^*_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y^*_2)$	$\Delta y_1 = h \cdot \dfrac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y^*_2)}{2}$
	…	…	…	…	…
x_n	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$	-	-	-	-

Представим решение задачи для дифференциального уравнения $y' = \cos(x - y^2)$ на отрезке [-1; 1] при заданном начальном условии $y(a) = 0.2$ и шаге интегрирования $h = 0.2$ в MicrosoftExcel методами Эйлера и Эйлера-Коши (рис. 11).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	метод Эйлера	метод Эйлера-Коши					
2	-1	0,2	0,2					
3	-0,8	0,301244	0,313505087			h=	0,2	
4	-0,6	0,42701	0,447314904					
5	-0,4	0,568864	0,593183977					
6	-0,2	0,718748	0,743530679					
7	0	0,869557	0,891684766					
8	0,2	1,015056	1,031896974					
9	0,4	1,149982	1,159745796					
10	0,6	1,270754	1,272909729					
11	0,8	1,376309	1,371560649					
12	1	1,468056	1,457808575					

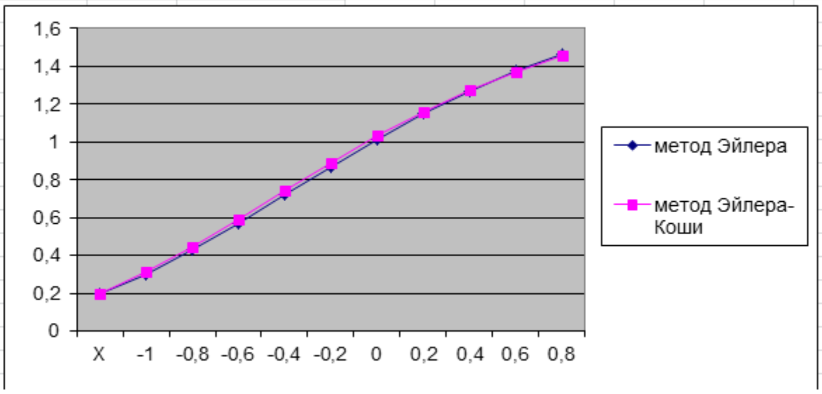


Рис. 11. Решение обыкновенного дифференциального уравнения методами Эйлера и Эйлера – Коши

Метод Рунге – Кутта

Метод Эйлера и метод Эйлера – Коши относятся к семейству методов Рунге – Кутта, имеющих следующий вид. Фиксируем некоторые числа: $\alpha_2, ..., \alpha_q; p_1, ..., p_q; \beta_{ij}, 0 < j < i \le q;$ последовательно вычисляем:

$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$

$k_2(h) = h \cdot f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)),$

....

$k_q(h) = h \cdot f(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \ldots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h)).$

И полагаем: $y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h).$

В вычислительной практике наиболее часто используется метод Рунге – Кутта с $q = 4.$ Соответствующие расчетные формулы:

$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$

$k_2(h) = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}),$

$k_3(h) = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}),$

$k_4(h) = h \cdot f(x + h, y + k_3),$

$\Delta y = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).$

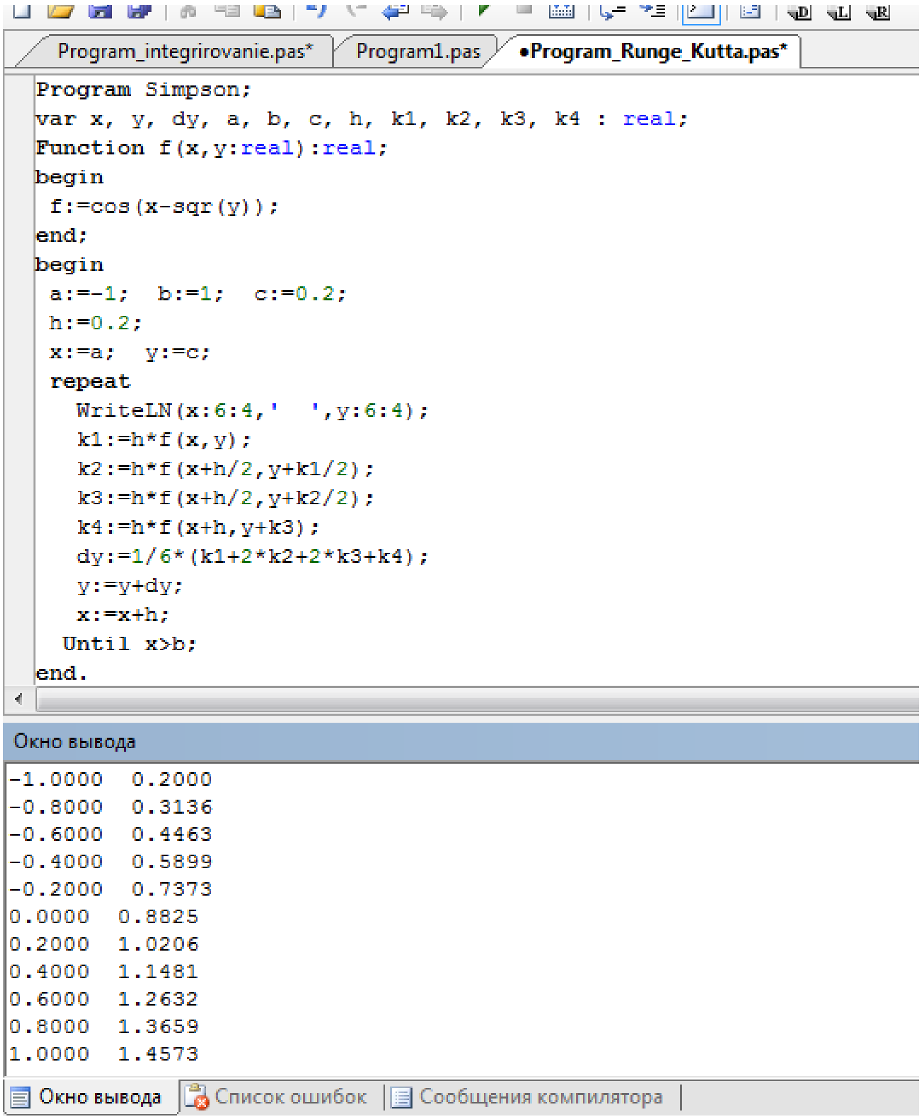
Полученное методом Рунге – Кутта решение будет близким к точному.

Решим задачу для дифференциального уравнения $y' = \cos(x - y^2)$ на отрезке [-1; 1] при заданном начальном условии $y(a) = 0.2$ и шаге интегрирования $h = 0.2$ в PascalABC методом Рунге – Кутта (рис. 12).

4.2. Уравнения с частными производными

Метод конечных разностей решения уравнений эллиптического типа

Метод сеток или метод конечных разностей является одним из самых распространенных методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Значения искомой функции $u = u(x, y)$ в узлах сетки обозначим через $u_{i,k} = u(x_0 + i \cdot h, y_0 + k \cdot l).$



Program_integrirovanie.pas* | Program1.pas | •Program_Runge_Kutta.pas*

```
Program Simpson;
var x, y, dy, a, b, c, h, k1, k2, k3, k4 : real;
Function f(x,y:real):real;
begin
 f:=cos(x-sqr(y));
end;
begin
 a:=-1;  b:=1;  c:=0.2;
 h:=0.2;
 x:=a;  y:=c;
 repeat
   WriteLN(x:6:4,'  ',y:6:4);
   k1:=h*f(x,y);
   k2:=h*f(x+h/2,y+k1/2);
   k3:=h*f(x+h/2,y+k2/2);
   k4:=h*f(x+h,y+k3);
   dy:=1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
   y:=y+dy;
   x:=x+h;
  Until x>b;
end.
```

Окно вывода

```
-1.0000  0.2000
-0.8000  0.3136
-0.6000  0.4463
-0.4000  0.5899
-0.2000  0.7373
0.0000  0.8825
0.2000  1.0206
0.4000  1.1481
0.6000  1.2632
0.8000  1.3659
1.0000  1.4573
```

Окно вывода | Список ошибок | Сообщения компилятора

Рис. 12. Реализация решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге – Кутта

В каждом внутреннем узле заменим частные производные разностными отношениями: $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k} \approx \dfrac{u_{i+1,k}-u_{i-1,k}}{2h}$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k} \approx \dfrac{u_{i,k+1}-u_{i,k-1}}{2l}$.

В граничных узлах будем пользоваться менее точными формулами:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,k} \approx \frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{h}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,k} \approx \frac{u_{i,k+1}-u_{i,k}}{l}.$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,k} \approx \frac{u_{i+1,k}-2u_{i,k}+u_{i-1,k}}{h^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,k} \approx \frac{u_{i,k+1}-2u_{i,k}+u_{i,k-1}}{l^2}.$$

Замены производных в каждом узле сетки позволяют свести решение уравнений с частными производными к решению системы разностных уравнений.

Первая краевая задача, или задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{20}$$

ставится следующим образом: найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри некоторой области Gуравнению (20), а на границе Г условию:

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \tag{21}$$

где $\varphi(x, y)$ – заданная непрерывная функция.

Заменим уравнение (20) конечно-разностными уравнениями:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{i,k} \ . \tag{22}$$

Уравнения (22) образуют систему линейных алгебраических уравнений. Наиболее простой вид эта система имеет для прямоугольной области и для $l = h$.

В этом случае уравнения (22) записываются так:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4 \cdot u_{i,k} = h^2 \cdot f_{i,k}. \tag{23}$$

При $f(x, y) = 0$ уравнение (20) называется уравнением Лапласа и соответствующие конечно-разностные уравнения имеют вид:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4 \cdot u_{i,k} = 0. \tag{24}$$

При составлении уравнений (23) и (24) была использована схема узлов:

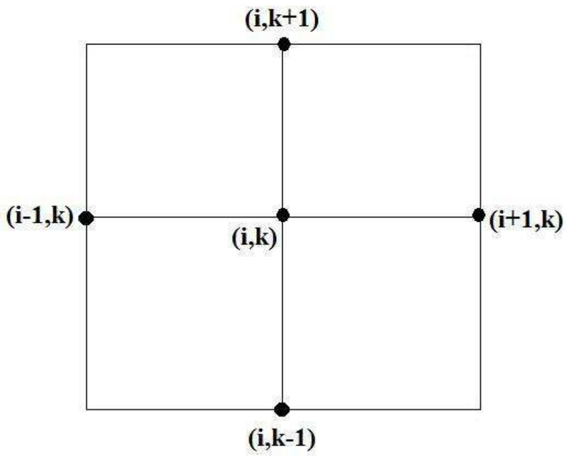


Рис. 13. Схема узлов

Метод конечных разностей решения уравнений параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{25}$$

начальному условию:

$$u(x,0) = f(x), (0 < x < s) \tag{26}$$

и краевым условиям:

$$u(0,t) = \varphi(t); u(s,t) = \psi(t). \tag{27}$$

К этой задаче приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s.

Пусть а=1, тогда уравнение (25) примет вид: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Заменим частные производные конечно-разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{28}$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ одним из двух разностных отношений:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l}. \tag{30}$$

Тогда для уравнения (25) при а=1 получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{31}$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \tag{32}$$

Обозначим $\sigma = \frac{l}{h^2}$, приведем уравнения (31), (32) к виду:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{33}$$

$$(1 + 2\sigma)u_{i,j} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \tag{34}$$

Для составления уравнения (31) была использована явная схема узлов (рис. 14).

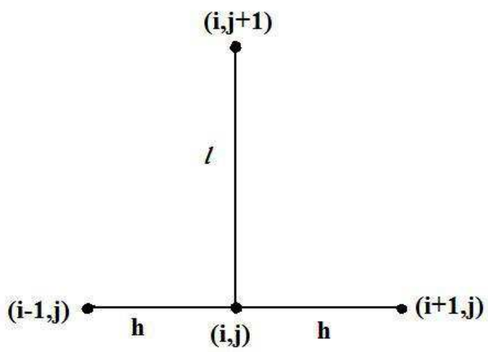


Рис. 14. Явная схема узлов

Для уравнения (32) – неявная схема узлов (рис. 15).

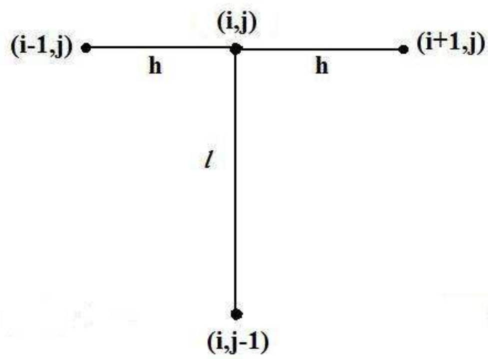


Рис. 15. Неявная схема узлов

Наиболее удобный вид уравнение (33) имеет при $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}; \tag{35}$$

и $\sigma = \frac{1}{6}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}.\left(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}\right). \tag{36}$$

4.3 Индивидуальное задание № 4 по теме «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными»

Задание 1.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a;b]$ при заданном начальном условии $y(a) = c$ и шаге интегрирования h:

1) методом Эйлера:

а) на калькуляторе; б) на ПК; в) построить график интегральной кривой;

2) методом Эйлера – Коши:

а) на калькуляторе; б) построить график интегральной кривой;

3) методом Рунге – Кутта на ПК.

Номер варианта	$f(x, y)$	A	b	c	h
1	$1-\sin(0,75x-y)+\dfrac{1,75y}{x+1}$	0	1	0	0,2
2	$x+\cos\dfrac{y}{\sqrt{5}}$	1,8	2,8	2,6	0,2
3	$xy+\sin x$	0	1	2	0,2
4	$\cos(1,5x-y^2)-1,3$	-1	1	0,2	0,4
5	$1+0,2y\cdot\sin x-y^2$	0	1	0	0,2
6	$\cos(x-y)+\dfrac{1,25y}{1,5+x}$	0	1	0	0,2
7	$x+\cos\dfrac{y}{3}$	1,6	2,6	4,6	0,2
8	$x+3\sin\dfrac{y}{3}$	1,6	2,6	2	0,2
9	$e^{-(y^2+1)}+2x$	0	0,5	0,3	0,1
10	$\dfrac{\cos x}{x+1}-0,5y^2$	0	1	0	0,2
11	$1-(x-1)\cdot\sin y+2\cdot(x+y)$	0	1	0	0,2
12	$x+\cos\dfrac{y}{\sqrt{10}}$	0,6	1,6	0,8	0,2
13	$xy+e^x$	-1	0	0,5	0,2
14	$\cos(1,5y+x^2)+1,4$	1	2	0,9	0,2
15	$1+0,4y\cdot\sin x-1,5y^2$	0	1	0	0,2
16	$\dfrac{\cos y}{1,5+x}-1,25y^2$	0	1	0	0,2
17	$x+\cos\dfrac{y}{\sqrt{7}}$	0,5	1,5	0,6	0,2
18	$0,6\cdot\sin x-1,2y+1$	0	1	0	0,2

19	$x+\cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	2,1	3,1	2,5	0,2
20	$\cos(1,5x+y)+(x-y)$	0	1	0	0,2

Задание 2.

1)Применяя метод конечных разностей, найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в квадрате *ABCD* с вершинами *A*(0;0), *B*(0;1), *C*(1;1), *D*(1;0) с шагом $h=\frac{1}{5}$.

Краевые условия приведены в таблице вариантов.

Номер варианта	$U\|_{AB}$	$U\|_{BC}$	$U\|_{CD}$	$U\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
3	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
4	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
5	$30y$	30	$30\sin\frac{\pi y}{2}$	0
6	$40\sqrt{y}$	$40(1-x)$	$20y(1-y)$	0
7	$20\sqrt{y}$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$
8	$50y(1-y)$	$20x^2(1-x)$	0	$40x(1-x^2)$
9	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
10	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
11	$20\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
12	$20\sin\pi y$	$30x$	$30y$	$20x(1-x)$
13	40	40	$40y^2$	$40\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$
14	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
15	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
16	$30y^2(1-y)$	$50\sin\pi x$	0	$10x^2(1-x)$
17	$30y^2$	$30(1-x)$	0	$40x^2(1-x)$
18	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
19	$20y$	$20(1-x^2)$	$30\sqrt{y}\,(1-y)$	0
20	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$40(1-x)$

2) Используя метод сеток, решить смешанную задачу для дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнения теплопроводности) при заданных начальных условиях $u(x,0)=f(x)$,$u(0, t)=\varphi(t)$, $u(0{,}6,\ t)=\psi(t)$, где x є [0; 0,6]. Решение выполнить при h=0,1 для t є [0; 0,01], считая σ=1/6: а) на калькуляторе; б) на ПК.

Начальные условия приведены в таблице вариантов:

Номер варианта	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\Psi(t)$
1	$\cos 2x$	$1-6t$	0,3624
2	$2x(1-x)+0{,}2$	0,2	$t+0{,}68$
3	$0{,}3+x(x+0{,}4)$	0,3	$6t+0{,}9$
4	$lg(2{,}63-x)$	$3(0{,}14-t)$	0,3075
5	$x(x+1)$	0	$2t+0{,}96$
6	$\sin x+0{,}08$	$0{,}08+2t$	0,6446
7	$(x-0{,}2)(x+1)+0{,}2$	$6t$	0,84
8	$1{,}5-x(1-x)$	$3(0{,}5-t)$	1,26
9	$1{,}2+lg(x+0{,}4)$	$0{,}8+t$	1,2
10	$\cos(2x+0{,}19)$	0,982	0,1798
11	$x(0{,}3+2x)$	0	$6t+0{,}9$
12	$\cos(x+0{,}845)$	$6(t+0{,}11)$	0,1255
13	$\sin 2x$	$2t$	0,932
14	$2x(x+0{,}2)+0{,}4$	$2t+0{,}4$	1,36
15	$\sin(x+0{,}48)$	0,4618	$3t+0{,}882$
16	$lg(2{,}42+x)$	0,3838	$6(0{,}08-t)$
17	$3x(2-x)$	0	$t+2{,}52$
18	$lg(x+0{,}26)+1$	$0{,}415+t$	0,9345
19	$\sin(x+0{,}02)$	$3t+0{,}02$	0,581
20	$0{,}6+x(0{,}8-x)$	0,6	$3(0{,}24+t)$
21	$1-lg(x+0{,}4)$	1,4	$t+1$
22	$\sin(x+0{,}45)$	$0{,}435-2t$	0,8674
23	$\cos(x+0{,}48)$	$6t+0{,}887$	0,4713
24	$\cos(x+0{,}66)$	$3t+0{,}79$	0,3058
25	$\sin(0{,}55x+0{,}03)$	$t+0{,}03$	0,354

4.4 Рекомендации к выполнению индивидуального задания № 4

Задание 1.

1) а) Вычисления с использованием калькулятора с шагом h осуществляются в расчетной таблице.

б) Составляется программа решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера с шагом h. Результаты работы программы сравниваются с результатами расчетов п. а) в соответствующих узлах.

в) По вычисленной на калькуляторе таблице функции строится точечный график и проводится плавная кривая.

2) а) Вычисления с использованием калькулятора с шагом h осуществляются в расчетной таблице. Результаты расчетов сравниваются с расчетами, проведенными в п. 1).

б) По вычисленной на калькуляторе таблице в п.а) строится точечный график и проводится плавная кривая. Интегральные кривые, полученные с применением методов Эйлера и Эйлера – Коши, строятся в одной системе координат.

3) Составляется программа решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге – Кутта с шагом h. Результаты работы программы сравниваются с результатами расчетов п. 1) и п. 2) в соответствующих узлах.

Задание 2.

1) Строится область решения и покрывается сеткой с шагом $h=\frac{1}{5}$. Вычисляются значения искомой функции $u(x, y)$ в граничных точках области. Для каждой внутренней точки области заданное уравнение Лапласа заменяется конечно-разностным уравнением. Полученная система линейных уравнений решается любым из известных методов, и выписывается ответ.

2) а) Параболическое уравнение решается методом сеток постепенным переходом от значений функции $u(x_i, t_j)$ к значениям $u(x_i, t_{j+1})$; причем $t_{j+1}=t_j+k$, где $k=\sigma\cdot h^2$. Вычисления с использованием калькулятора осуществляются в расчетной таблице с четырьмя десятичными знаками.

б) Составляется программа решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Результаты работы программы сравниваются с результатами расчетов п. а).

5. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Максимальное количество, которое может набрать студент по итогам изучения четырех модулей (в ходе текущей работы и её контроля) по обязательным формам работы – ***80 баллов***. Это составляет 80% от общего возможного количества баллов.

1. Посещение лекций и конспектирование добавляет в рейтинг студента по ***1 баллу*** за каждое занятие.

2. Посещение практического занятия с конспектированием – ***1 балл***.

3. По итогам изучения каждого модуля студент выполняет индивидуальное задание, за выполнение каждого пункта которого, он может заработать ***2 балла***.

Студент может воспользоваться возможностью увеличить число набранных баллов, используя формы работы дополнительного модуля. При этом, если студент набирает от 10 до 20 баллов дополнительного модуля, он освобождается от прохождения итогового контроля (в виде зачёта). Зачетное задание включает в себя 2 части: теоретическую и практическую. За каждую из частей зачетного задания студент может набрать до ***10 баллов.***

Рейтинг студента по дисциплине определяется в результате суммирования данных текущей работы и итогового контроля. Максимальное число баллов – ***100***. Студент, набравший по итогам работы в семестре менее ***30 баллов***, не получает допуск к зачёту.

Оценка «зачтено» ставится в случае, если студент набирает ***50–100 баллов,*** «не зачтено» – ниже ***50 баллов***.

В случае зачёта с оценкой набранные баллы переводятся в традиционные оценки по следующей шкале:

– 86 и более – «отлично»;

– 70–85– «хорошо»;

– 50–69 – «удовлетворительно»;

– 49 и менее – «неудовлетворительно».

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – Москва : Лаборатория знаний, 2015. – 637 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=70767

2. Введение в численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова.–Электрон. текстовые данные. – Москва: ИНФРА-М, 2017. – 368 с. –(Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=883943

3. Численные методы [Электронный ресурс] : учебник и практикум для академического бакалавриата / У. Г. Пирумов [и др.] ; под ред. У. Г. Пирумова. – 5-е изд., перераб. и доп. – Электрон. текстовые данные. – Москва: Юрайт, 2017. – 421 с. – (Бакалавр. Академический курс).– Режим доступа:https://biblio-online.ru/book/43F523F2-5AD9-448D-A8FF-212707F6A238

4. Численные методы. Практикум [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцева. – Электрон. текстовые дан. – Москва :ИНФРА-М, 2017. – 512 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=652316

Дополнительная литература

1. Введение в численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В. А. Морозова. – Москва: ИНФРА-М, 2017. – 368 с. – (Высшее образование: Бакалавриат).–Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=883943

2. Лапчик, М. П. Численные методы [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина Е. К. Хеннер ; под ред. М. П. Лапчика. – Изд. 5-е; стер. – Москва : Академия, 2009. – 384 с.

3. Численные методы [Электронный ресурс]: лекции: учеб. пособие / В. Д. Слабнов; Институт экономики, управления и права (г. Казань). – Электрон. текстовые данные. – Казань: Познание, 2012. – 192 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=364221