Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

А.В. Фомина

МАТЕМАТИКА

Линейная алгебра

Методические рекомендации по изучению дисциплины
для обучающихся по направлениям подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),
Профили: «Технология и Информатика», «Информатика и физика»
44.03.01 Педагогическое образование, Профиль: «Информатика»
44.03.04 Профессиональное обучение, Профиль: «Экономика и управление»
09.03.03 Прикладная информатика, Профиль: «Прикладная информатика в образовании»

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:512.64](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.143я73
Ф45

Фомина А.В.

Ф45 Математика: линейная алгебра, методические рекомендации по изучению дисциплины для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили: «Технология и Информатика», «Информатика и Физика»), 44.03.01 Педагогическое образование (профиль: «Информатика»), 44.03.04 Профессиональное обучение (профиль: «Экономика и управление»), 09.03.03 Прикладная информатика (профиль: «Прикладная информатика в образовании») / А.В. Фомина; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020 – 48 с.

В работе изложены методические рекомендации по изучению темы «Линейная алгебра» дисциплины «Математика»: основные теоретические сведения, варианты контрольной работы, методические рекомендации к выполнению контрольной работы, критерии оценки учебной деятельности студента по дисциплине, список основной и дополнительной литературы.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Технология и Информатика», «Информатика и Физика»; 44.03.01 Педагогическое образование, профиль: «Информатика»; 44.03.04 Профессиональное обучение, профиль: «Экономика и управление»; 09.03.03 Прикладная информатика, профиль: «Прикладная информатика в образовании»

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 2 от 16.09.2020

И.о. заведующего каф. МФММ
_____/ Е.А. Вячкина

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 3 от 15.10.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_____/Г.Н.Бойченко

УДК [378.147.88:512.64](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.143я73
Ф45

© Фомина Анжелла Владимировна
© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет», Новокузнецкий институт (филиал), 2020

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

Оглавление 3
ПРЕДИСЛОВИЕ 4
1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 5
2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 10
3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА 13
4. ВАРИАНТЫ КОНТОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» 19
5. РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.. 35
6. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ 46
7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 46

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические рекомендации адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Технология и Информатика», «Информатика и Физика»; 44.03.01 Педагогическое образование, профиль: «Информатика»; 44.03.04 Профессиональное обучение, профиль: «Экономика и управление»; 09.03.03 Прикладная информатика, профиль: «Прикладная информатика в образовании» и направлены на оказание помощи студентам в организации наиболее рационального изучения темы «Линейная алгебра» курса «Математика».

Целью изучения дисциплины «Математика» является получение студентами необходимых знаний и приобретение практических умений в области математики, усвоения междисциплинарных связей с физикой, информатикой, экономикой. Освоение содержания учебной дисциплины «Математика» обеспечивает достижение студентами следующих результатов:

1) формирование представлений о математике как универсальном языке науки;

2) моделирование явлений и процессов методами математики;

3) развитие логического мышления, алгоритмической культуры;

4) овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни,

5) воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры;

6) приобретение навыков, умений и готовность использования в будущей профессиональной деятельности полученных знаний курса «Математика».

Линейная алгебра изучает матрицы и определители, системы линейных уравнений, элементы матричного анализа, элементы

векторной алгебры.

В методические рекомендации включено: основные теоретические сведения, варианты контрольной работы, методические рекомендации к выполнению контрольной работы, примеры решения типовых заданий, критерии оценки учебной деятельности студента, список основной и дополнительной литературы.

Теоретические сведения и приведенные примеры решения некоторых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям и выполнения заданий контрольной работы.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту представление о содержании темы «Линейная алгебра» курса “Математика”, подготовиться к практическим занятиям по соответствующей теме, успешно выполнить контрольную работу по данной теме.

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца. Обозначают матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{ij}, у которых $i=j$, образуют ***главную диагональ*** матрицы.

Матрицы ***равны*** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n-го порядка.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной*** и обозначается:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной*** к данной и обозначается: A^T.

Рассмотрим ***действия над матрицами***:

1) ***Суммой*** двух матриц одинакового размера $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$.

Аналогично определяется разность матриц.

2) ***Произведением*** матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на число k называется матрица $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$, такая что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$.

3) ***Произведением*** матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times p} = \left(c_{ik}\right)$, такая что $c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk}\left(i = \overline{1,m}, k = \overline{1,p}\right)$, т.е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Свойства операции умножения матриц.

1) Умножение матриц ***не коммутативно***, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо

матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются ***перестановочными.***

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Например, $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Для любых матриц выполняются следующее свойство: $A \cdot O = O;\ O \cdot A = O$, где O – ***нулевая*** матрица.

2) Операция перемножения матриц ***ассоциативна,*** т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство: $(AB)C=A(BC)$.

3) Операция умножения матриц ***дистрибутивна*** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно: $A(B + C) = AB + AC,\ (A + B)C = AC + BC$.

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство: $(AB)^T = B^T A^T$, где индексом T обозначается транспонированная матрица.

Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, называемое ее определителем (обозначается: $\det A$, $|A|$, ΔA), следующим образом:

1) $n=1 \Rightarrow \Delta A = |a_{11}| = a_{11}.$

2) $n=2 \Rightarrow \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$

3) $n=3 \Rightarrow$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}.$$

Свойства определителей

1) $\Delta A = \Delta A^T$.

2) $\Delta(A \cdot B) = \Delta A \cdot \Delta B.$

3) При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

4) Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

5) Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6) Если все элементы строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца), то такой определитель равен 0.

7) Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то ее определитель равен нулю.

8) Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

9) Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца на пересечении которых находится выбранный элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определитель n-го порядка может быть вычислен с помощью разложения по элементам i-й строки (или j-го столбца):

$\Delta A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$ (разложение определителя по элементам i-й строки),

$\Delta A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (разложение определителя по элементам j-го столбца).

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю. В противном случае, матрица A называется ***вырожденной***.

Матрицей, ***союзной*** к матрице A, называется матрица

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же размера, что и матрица A.

Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Обратная матрица находится по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$.

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Наибольший из порядков миноров матрицы A, отличных от нуля, называется ***рангом*** матрицы и обозначается $r(A), 0 \le r(a) \le \min(m, n)$. Минор, который определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы:

1) При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2) Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3) Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

4) Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Матрицей ***ступенчатого*** вида называется такая матрица, которая обладает свойствами:

1) в каждой строке матрицы имеется неравный нулю элемент;

2) в каждой строке матрицы, начиная со второй, первый слева неравный нулю элемент расположен правее первого слева неравного нулю элемента предыдущей строки матрицы.

Квадратную матрицу ступенчатого вида называют еще ***треугольной*** матрицей.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ называются ***коэффициентами*** системы, а числа b_i - ***свободными членами*** системы.

В матричной форме система имеет вид: $A \cdot X = B$, здесь A – матрица коэффициентов системы, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов.

Решением системы называется n значений неизвестных, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. Если система неопределенная, то каждое ее решение называется ***частным*** решением системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим*** решением.

Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Система линейных уравнений называется ***однородной***, если все свободные члены этой системы равны нулю.

Теорема Кронекера – Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Теорема 1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим решение невырожденных линейных систем. Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В матричной форме система имеет вид: $A \cdot X = B$.

Рассмотрим решение системы по ***формулам Крамера***.

Если определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – определитель матрицы системы, Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца *i* столбцом свободных членов b_i.

Например, рассмотрим систему, состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Ее определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Тогда $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Найдем значения неизвестных по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Отыскание решения системы линейных алгебраических уравнений по формуле $X = A^{-1} \cdot B$ называют ***матричным*** способом решения системы.

Решение систем линейных уравнений ***методом Гаусса*** состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. Система линейных уравнений приводится к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. К ***элементарным преобразованиям*** относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2) Перестановка уравнений местами.

3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех переменных.

Метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения;

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. Далее повторяем аналогичные действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д. до тех пока не получим систему ступенчатого вида. Затем последовательно, начиная с последнего уравнения, находим значения неизвестных. На практике удобно работать не с самой системой, а с расширенной матрицей этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками.

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. К векторам относится также и ***нулевой*** вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны. Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Произведением $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется новый вектор $\vec{b}$, который обладает свойствами:

1) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) направление вектора $\vec{b}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$,



Рис. 1

если $\lambda > 0$ (рис.1, а) и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$ (рис. 1, б).

Если точка *A* является началом вектора $\vec{a}$, то говорят что вектор $\vec{a}$ отложен от точки *A*. Отложим от точки *A* вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Затем от точки *B* отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

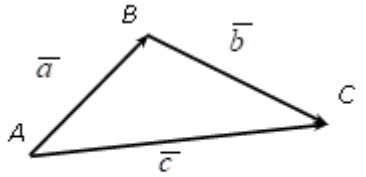


Рис. 2

Для любых трех точек *A*, *B*, *C* (рис.2) справедливо равенство (правило треугольника): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Два вектора называются ***противоположными***, если их длины равны, и они противоположно направлены. Из определения произведения вектора на число следует, что $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Разность векторов можно определить также равенством: $\vec{c} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

Множество всех векторов на плоскости (в пространстве) образуют ***линейное пространство***.

Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$, то числа α, β и γ - называются ***компонентами или координатами*** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

1) равные векторы имеют одинаковые координаты,

2) при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda\left(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}\right) = \left(\lambda\alpha\right)\vec{e_1} + \left(\lambda\beta\right)\vec{e_2} + \left(\lambda\gamma\right)\vec{e_3}.$$

3) при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3};\ \ \vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(\alpha_1 + \beta_1\right)\vec{e_1} + \left(\alpha_2 + \beta_2\right)\vec{e_2} + \left(\alpha_3 + \beta_3\right)\vec{e_3}.$$

Векторы $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ называются ***линейно зависимыми***, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \alpha_n\vec{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + ... + \alpha_n^{\,2} \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \alpha_n\vec{a_n} = 0$, то векторы называются ***линейно независимыми***.

Рассмотрим некоторые свойства линейно зависимых векторов.

1) Если среди векторов $\vec{a}_i$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

2) Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

3) Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

4) Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

5) Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

6) Любые 4 вектора линейно зависимы.

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется ***началом координат***. Прямые, проходящие через начало координат, называются ***осями координат***: 1-я ось *Ox* – ось ***абсцисс,*** 2-я ось *Oy* – ось ***ординат,*** 3-я ось *Oz* – ось ***аппликат.***

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала. Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ ***делит отрезок AB в соотношении λ/μ,*** считая от *A*, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda};\ y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda};\ z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты ***середины отрезка*** находятся следующим образом:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рассмотрим линейные операции над векторами в координатной форме. Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат

$\vec{a} = (x_A, y_A, z_A);\ \vec{b} = (x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B);\ \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A).$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

По определению получаем: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов ($\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$):

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\varphi-$ прямой угол ($\vec{a}\perp\vec{b}$),

   $\vec{a}\cdot\vec{b}>0\Leftrightarrow\varphi-$ острый угол,

   $\vec{a}\cdot\vec{b}<0\Leftrightarrow\varphi-$ тупой угол;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\vec{a}$

Скалярное произведение векторов в координатной форме равно сумме попарных произведений соответствующих координат этих векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Основные приложения скалярного произведения:

1) Вычисление угла между векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Вычисление проекции одного вектора на другой

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

3) Условие перпендикулярности векторов

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

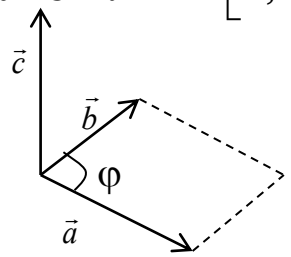
Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi,$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\sin\varphi \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi;$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) если заданы векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

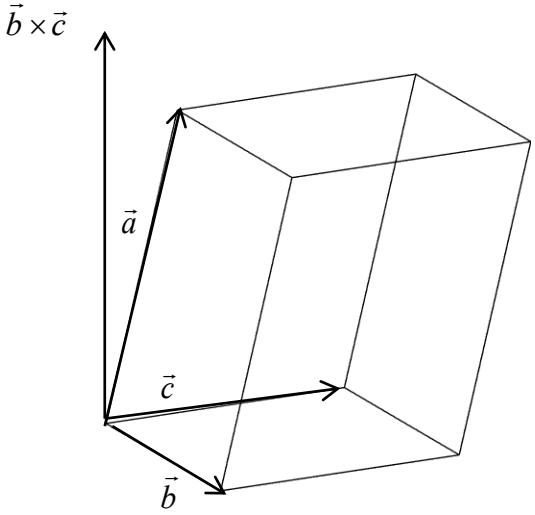
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1) Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

6) Если $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

4. ВАРИАНТЫ КОНТОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Вариант 1

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
   a) методом обратной матрицы;
   b) по формулам Крамера;
   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(1;-2;-1), \vec{b} = (3;0;-2), \vec{c} = (2;-1;1)$, и числам $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 2$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(3;1;-2), B(1;-2;1), C(-2;1;0); D(2;2;5)$. Найти:

   a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

   b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

   c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

   d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 2

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -7 & -1 & 8 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

   a) методом обратной матрицы;

   b) по формулам Крамера;

   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(2;1;-1), \vec{b} = (0;2;3), \vec{c} = (1;-1;2)$, и числам $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -2$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(1;-2;1), B(3;1;-2), C(2;2;5); D(-2;1;0)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overline{AD}}\overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 3

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -2 & 4 \\ 11 & -2 & 6 & -4 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
   a) методом обратной матрицы;
   b) по формулам Крамера;
   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1, \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(-1;2;2), \vec{b} = (3;1;1), \vec{c} = (1;0;-1)$, и числам $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(-2;1;0), B(2;2;5), C(3;1;2); D(1;-2;1)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overline{AD}}\overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 4

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1, \; A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 9 \\ -2 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

   a) методом обратной матрицы;

   b) по формулам Крамера;

   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4, \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(3;2;1), \vec{b} = (-1;0;1), \vec{c} = (1;-2;1)$, и числам $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 1$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(2;2;5), B(-2;1;0), C(1;-2;1); D(3;1;2)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 5

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 2,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -7 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
   a) методом обратной матрицы;
   b) по формулам Крамера;
   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(2;0;1), \vec{b} = (1;1;1), \vec{c} = (1;0;-2)$, и числам $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(1;-1;6), B(4;5;-2), C(-1;3;0); D(6;1;2)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 6

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 3, \; A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -7 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

   a) методом обратной матрицы;

   b) по формулам Крамера;

   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(-2;1;-1), \vec{b} = (1;-2;1), \vec{c} = (-1;1;1)$, и числам $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 2$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(6;1;5), B(-1;3;0), C(4;5;-2); D(1;-1;6)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 7

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 2x - 4,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 5 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
   a) методом обратной матрицы;
   b) по формулам Крамера;
   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(1;-1;2), \vec{b} = (1;3;1), \vec{c} = (2;-1;-1)$, и числам $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 3$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(-5;-1;8), B(2;3;1), C(4;1;-2); D(6;3;7)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 8

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 5, \; A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

   a) методом обратной матрицы;

   b) по формулам Крамера;

   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(1;1;-1), \vec{b} = (-2;1;2), \vec{c} = (3;1;-1)$, и числам $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(4;2;5), B(0;7;2), C(2;8;4); D(1;5;0)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overline{AD}}\overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 9

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

   a) методом обратной матрицы;

   b) по формулам Крамера;

   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(2;2;1), \vec{b} = (-1;1;3), \vec{c} = (1;1;-1)$, и числам $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -1$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(1;8;2), B(5;2;6), C(5;7;4); D(4;10;9)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

Вариант 10

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3, \; A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
   a) методом обратной матрицы;
   b) по формулам Крамера;
   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

9. По заданным векторам $\vec{a}(1;-1;1), \vec{b} = (-1;2;1), \vec{c} = (2;3;1)$, и числам $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = -2$ вычислить:
   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;
   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;
   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(7;2;2), B(5;7;7), C(5;3;1); D(2;3;7)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*
b) $np_{\overrightarrow{AD}} \overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);
c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);
d) V_{ABC} (объем пирамиды *ABCD*).

5. РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 1,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Найдем

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+2\cdot 3 & -1\cdot 2+2\cdot 0 \\ 3\cdot(-1)+0\cdot 3 & 3\cdot 2+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot(-1)+(-2)\cdot 3 & 7\cdot 2+(-2)\cdot 0 \\ -3\cdot(-1)+6\cdot 3 & -3\cdot 2+6\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ 21 & -6 \end{pmatrix};$$

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение матричного многочлена

$$f(A) = -A^3 + A^2 - 2A + E = -\begin{pmatrix} -13 & 14 \\ 21 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & -20 \\ -30 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 16 & -6 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

В матрице №2 сначала из втрой строки вычтем первую, затем из третьей строки вычтем первую, домноженную на 2 и, наконец, из четвертой строки вычтем первую строку, домноженную на 5.

В матрице №3 , третью строку домножим на 2 и прибавим вторую, затем из четвертой строки, домноженной на 2 вычтем вторую, домноженную на 7.

В матрице №4 из четвертой строки, домноженной на 10 вычтем третью, домноженную на 18. Последняя матрица приведена к ступенчатому виду. Ранг матрицы будет равен количеству строк в матрице ступенчатого вида, т.е. $r(A)=4$.

3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Решение:

Найдем определитель матрицы A по правилу треугольника:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 0\cdot 5+1\cdot 3\cdot 2+4\cdot 1\cdot 0-2\cdot 0\cdot 0-1\cdot 3\cdot 3-4\cdot 1\cdot 5=$$

$$=0+6+0-0-9-20=-23.$$

Так как определитель не равен 0, то обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=0-3=-3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=-(5-0)=-5;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3-0=3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(20-6) = -14;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15-0 = 15;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(9-0) = -9;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-0 = 4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-4 = -4.$$

Составим союзную матрицу к матрице A: $A^* = \begin{pmatrix} -3 & -14 & 4 \\ -5 & 15 & -1 \\ 3 & -9 & -4 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-23} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -14 & 4 \\ -5 & 15 & -1 \\ 3 & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-23} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -14 & 4 \\ -5 & 15 & -1 \\ 3 & -9 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} -3\cdot 3 + (-14)\cdot 1 + 4\cdot 0 & -3\cdot 4 + (-14)\cdot 0 + 4\cdot 3 & -3\cdot 2 + (-14)\cdot 1 + 4\cdot 5 \\ -5\cdot 3 + 15\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & -5\cdot 4 + 15\cdot 0 + (-1)\cdot 3 & -5\cdot 2 + 15\cdot 1 + (-1)\cdot 5 \\ 3\cdot 3 + (-9)\cdot 1 + (-4)\cdot 0 & 3\cdot 4 + (-9)\cdot 0 + (-4)\cdot 3 & 3\cdot 2 + (-9)\cdot 1 + (-4)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} -23 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

Вычислим определитель разложением по первой строке.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (6 - 28) - (-2 - 35) + 9 \cdot (-8 - 30) = -3 \cdot (-24) + 37 + 9 \cdot (-38) =$$

$$= 72 + 37 - 342 = -233.$$

5. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, Найдем определитель матрицы A: $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \cdot A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2-3 & 8+1 & 10-0 \\ -2+3 & 8-1 & 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений тремя способами:

   a) методом обратной матрицы;

   b) по формулам Крамера;

   c) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение:

а) Решим систему методом обратной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение имеет вид: $A \cdot X = B.$ Откуда $X = A^{-1} \cdot B.$

Найдем обратную матрицу к матрице $A.$ Для этого вычислим определитель матрицы A и определим алгебраические дополнения элементов этой матрицы.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-27 + 54) + 4 \cdot (-63 + 42) + 9 \cdot (63 - 21) = 2 \cdot 27 - 84 + 9 \cdot 42 =$$

$$= 54 - 84 + 378 = 348.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} = -27 + 54 = 27;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -(-63 + 42) = 21;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 63 - 21 = 42;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} = -(36 - 81) = 45;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -18 - 63 = -81;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(18 + 28) = -46;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 24 - 27 = -3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -(-12 - 63) = 75;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 28 = 34.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{348}\begin{pmatrix} 27 & 45 & -3 \\ 21 & -81 & 75 \\ 42 & -46 & 34 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{348}\begin{pmatrix} 27 & 45 & -3 \\ 21 & -81 & 75 \\ 42 & -46 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{348} \cdot \begin{pmatrix} 696 \\ 1044 \\ 1392 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) Решим систему по формулам Крамера. Из решения системы методом обратной матрицы имеем: $\Delta A = 348$.

Найдем определители Δ_i, получаемые из матрицы A системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 28 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 28 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 28 \cdot (-27 + 54) + 4 \cdot (9 + 30) + 9 \cdot (-9 - 15) = 28 \cdot 27 + 4 \cdot 39 + 9 \cdot (-24) =$$

$$= 756 + 156 - 216 = 696.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 9 \\ 7 & -1 & -6 \\ 7 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} - 28 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (9 + 30) - 28 \cdot (-63 + 42) + 9 \cdot (35 + 7) = 2 \cdot 39 - 28 \cdot (-21) + 9 \cdot 42 =$$

$$= 78 + 588 + 378 = 1044.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 28 \\ 7 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 28 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (15+9) + 4 \cdot (35+7) + 28 \cdot (63-21) = 2 \cdot 24 + 4 \cdot 42 + 28 \cdot 42 =$$

$$= 48 + 168 + 1176 = 1392.$$

Найдем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta A} = \frac{696}{348} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta A} = \frac{1044}{348} = 3; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta A} = \frac{1392}{348} = 4.$$

c) Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 46 & -81 & -186 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -348 & -1392 \end{array}\right).$$

В матрице №2 сначала из второй строки вычтем третью, а затем из третьей строки, умноженной на 2, вычтем первую строку, умноженную на 7.

В матрице №3 к третьей строке, умноженной на 6, прибавим вторую строку, умноженную на 46.

Из последней строки матрицы №3 составим уравнение и найдем x_3: $-348 \cdot x_3 = -1392 \Rightarrow x_3 = 4.$

Составим уравнение из второй строки и найдем x_2:

$$-6 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = -6 \Rightarrow -6x_2 = -6 - 3 \cdot 4 \Rightarrow x_2 = 3.$$

Составим уравнение из первой строки и найдем x_1:

$$2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 28 \Rightarrow 2x_1 = 28 + 4 \cdot 3 - 9 \cdot 4 \Rightarrow x_1 = 2.$$

Таким образом, получаем, что решением системы является тройка чисел: $(2;3;4)$.

7. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду.

В матрице №2 поменяем местами первую и вторую строки.

В матрице №3 из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 3; из четвертой строки вычтем первую, умноженную на 2; из пятой строки вычтем первую.

В матрице №4 из третьей строки, вычтем вторую, умноженную на 3; из четвертой строки, вычтем вторую, умноженную на 2.

В матрице №5 разделим третью строку на (-5); разделим пятую строку на 3.

В матрице №6 к четвертой строке прибавим третью, умноженную на 3; из пятой строки вычтем третью, умноженную на 2.

В матрице №7 разделим пятую строку на (-5).

Четвертая и пятая строки матрицы №7 содержат одинаковые элементы. Из этих двух строк в матрице №8 оставим только одну.

Из последней строки матрицы №8 получаем, что $x_4 = 1$.

Последовательно находим остальные неизвестные.

$x_3 + 2x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$

$-x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \Rightarrow -x_2 = 4 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 1 \Rightarrow x_2 = -1.$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 + 2 \cdot 0 - (-1) = 1.$

Ответ: (1;-1;0;1)

8. Решить однородную систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 = x_4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 - x_5, \\ x_2 = x_4 - x_6, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

Если $x_4 = t_1, x_5 = t_2, x_6 = t_3,\ t_1, t_2, t_3 \in R,$ то получим решение:

$(t_1 - t_2; t_1 - t_3; t_1),\ t_1, t_2, t_3 \in R.$

9. По заданным векторам $\vec{a}(2;1;1), \vec{b} = (-1;1;2), \vec{c} = (1;0;-1),$ и числам $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1$ вычислить:

   a) скалярное произведение $\left(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\right)$;

   b) векторное произведение $\left[\vec{b}, \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}\right]$;

   c) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Решение:

a) Найдем скалярное произведение векторов $\left(\vec{a}, \vec{d}\right)$, где $\vec{d} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{d} = a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z$. Найдем координаты вектора $\vec{d} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$: $\vec{d} = 1 \cdot (-1;1;2) + 2 \cdot (1;0;-1) = (-1;1;2) + (2;0;-2) = (1;1;0).$

Тогда скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{d} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3.$

b) Определим векторное произведение $\left[\vec{b}, \vec{e}\right]$, где $\vec{e} = \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}$ по формуле: $\vec{b} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_b & y_b & z_b \\ x_e & y_e & z_e \end{vmatrix}$. Найдем координаты вектора $\vec{e} = \gamma\vec{a} + \alpha\vec{c}$:

$\vec{e} = -1 \cdot (2;1;1) + 1 \cdot (1;0;-1) = (-1;-1;-2).$ Тогда

$$\vec{b} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (0;-4;2).$$

c) Найдем смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по формуле $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-1)-(-3)+(-1)=0.$$

10. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: $A(5;2;2), B(5;6;6), C(5;2;1); D(2;3;6)$. Найти:

a) косинус угла между ребрами *AB* и *AD;*

b) $np_{\overline{AD}}\overrightarrow{AC}$ (проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$);

c) S_{ABC} (площадь грани *ABC*);

d) V_{ABCD} (объем пирамиды *ABCD*).

Решение:

a) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}=(5-5;6-2;6-2)=(0;4;4),\ \overrightarrow{AD}=(2-5;3-2;6-2)=(-3;1;4).$

Косинус угла между ребрами *AB* и *AD* найдем по формуле:

$\cos\varphi=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$. Для наших векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеем:

$$\cos\varphi=\frac{0\cdot(-3)+4\cdot1+4\cdot4}{\sqrt{0^2+4^2+4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+4^2}}=\frac{20}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{26}}=\frac{20}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{52}}=\frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

b) Определим проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$ по формуле:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AC}=(5-5;2-2;1-2)=(0;0;-1).$

$$np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AC} = np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\left|0\cdot(-3)+0\cdot 1+(-1)\cdot 4\right|}{\sqrt{(-3)^2+1^2+4^2}} = \frac{\left|-4\right|}{\sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

c) Вычислим S_{ABC} (площадь грани ABC). Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т.е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Имеем: $\overrightarrow{AB} = (0;4;4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;0;-1)$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot\vec{i} - 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = (-4;0;0).$$

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2.$

d) Найдем V_{ABCD} (объем пирамиды $ABCD$). Объем пирамиды определяется по формуле $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$. Имеем: $\overrightarrow{AB} = (0;4;4)$, $\overrightarrow{AC} = (0;0;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3;1;4)$. Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{Vmatrix} = \frac{1}{6}\left|0-0+(-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|(-3)\cdot(-4)\right| = \frac{1}{6}\cdot 12 = 2.$$

6. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

На изучение темы «Линейная алгебра» дисциплины «Математика» отводится один семестр. Максимальное количество, которое может набрать студент по итогам изучения данной темы (в ходе текущей работы и её контроля) по обязательным формам работы, – ***80 баллов***. Это составляет 80% от общего возможного количества баллов.

1. Посещение лекций и конспектирование добавляет в рейтинг студента по ***2 балла*** за каждое занятие.

2. Посещение практического занятия с конспектированием – 2 ***балла***.

3. По итогам изучения темы «Линейная алгебра» студент выполняет контрольную работу, за выполнение которой, он может заработать до ***25 баллов***.

4. Публичное решение задачи на практическом занятии добавляет в рейтинг студента 2 ***балла.***

5. Составление конспекта или реферата по теме, выделенной на самостоятельное изучение, добавляет в рейтинг студента ***8 баллов***.

Зачетное задание включает в себя 2 части: теоретическую и практическую. По теоретической части проводится собеседование, по итогам которого студент может набрать до ***4 баллов***. Практическая часть представлена заданиями, за выполнение которых студент может набрать до ***16 баллов***.

Рейтинг студента по дисциплине определяется в результате суммирования данных текущей работы и итогового контроля. Максимальное число баллов – ***100***. Студент, набравший по итогам работы в семестре менее ***30 баллов***, не получает допуск к зачёту.

Оценка «зачтено» ставится в случае, если студент набирает ***51–100 баллов,*** «не зачтено» – ниже ***51 балла***.

В случае зачёта с оценкой набранные баллы переводятся в традиционные оценки по следующей шкале:

– 86 и более – «отлично»;

– 66 – 85 – «хорошо»;

– 51 – 65 – «удовлетворительно»;

– 50 и менее – «неудовлетворительно».

7. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Кузнецов, Б.Т. Математика : учебник / Б.Т. Кузнецов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юнити, 2015. – 719 с. : ил., табл., граф. – (Высшее профессиональное образование: Экономика и управление). – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114717 (дата обращения:

12.10.2020). – Библиогр. в кн. – ISBN 5-238-00754-X. – Текст : электронный.
2. Муратова, Г.З. Математика: вводно-предметный курс : [16+] / Г.З. Муратова, А.И. Бурмистрова ; Казанский федеральный университет. – Казань : Казанский федеральный университет (КФУ), 2014. – 104 с. : ил., табл., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276357 (дата обращения: 12.10.2020). – Библиогр. в кн. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Высшая математика. Практикум для студентов технических и экономических специальностей : учебное пособие / Г. Н. Горелов, Б. А. Горлач, Н. Л. Додонова [и др.] ; под общей редакцией Б. А. Горлача. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 676 с. — ISBN 978-5-8114-4423-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/140738 (дата обращения: 12.10.2020).
2. Карасева, Р. Б. Высшая математика: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной : учебное пособие / Р. Б. Карасева. — Омск : СибАДИ, 2019. — 301 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149522 (дата обращения: 12.10.2020).
3. Кучер, Н. А. Курс высшей математики : учебное пособие : в 2 частях / Н. А. Кучер, О. В. Малышенко, А. А. Жалнина. — Кемерово : КемГУ, 2019 — Часть I : Основы алгебры — 2019. — 132 с. — ISBN 978-5-8353-2579-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/141565 (дата обращения: 12.10.2020).