

Подписано электронной подписью:  
Вержицкий Данил Григорьевич  
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»  
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00  
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кемеровский государственный университет»  
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики  
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ГИДРОДИНАМИКЕ**

*Методические указания по выполнению практических работ  
для обучающихся по направлению подготовки  
01.04.02 Прикладная математика и информатика, магистерская программа  
«Математическое моделирование»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.34: 532.51](072)  
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.253.3я73  
В 99

**Вячкина Е. А., Вячкин Е. С.**

В 99 Математические модели в гидродинамике: методические указания к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика, магистерская программа «Математическое моделирование» / Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 54 с.

Методические указания содержат описания практических работ к двум разделам дисциплины с подробным решением демонстрационных примеров, задания для решения на практических занятиях, указания к их выполнению; вопросы для самопроверки, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной и очно-заочной формы обучения направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика, магистерская программа «Математическое моделирование».

Рекомендовано на заседании  
кафедры математики, физики и  
математического моделирования  
Протокол № 4 от 10.11.2020

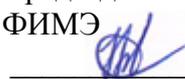
Заведующий каф. МФММ



/ Е.В.Решетникова

Утверждено методической комиссией  
факультета информатики, математики и  
экономики  
Протокол № 5 от 17.12.2020

Председатель методической комиссии  
ФИМЭ



/Г.Н.Бойченко

УДК [378.147.34: 532.51](072)  
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.253.3я73  
В 99

- © Вячкина Елена Александровна
- © Вячкин Евгений Сергеевич
- © Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет», Новокузнецкий институт (филиал), 2020

**Текст представлен в авторской редакции**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>4</b>
<b>РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ, ДИФФУЗИИ</b> .....	<b>5</b>
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ.....	5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.2. ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ.....	19
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.3. ЧАСТНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ.....	29
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.4. УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ИНТЕГРАЛ КОШИ-ЛАГРАНЖА	35
<b>РАЗДЕЛ 2. ПОНЯТИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ</b> .....	<b>41</b>
<b>ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ</b> .....	<b>52</b>
<b>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>54</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Математическое моделирование в гидродинамике» предназначены для студентов направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика, также может быть полезным для специалистов, занимающихся математическим моделированием физических явлений.

Дисциплина «Математические модели в гидродинамике» включена в образовательную программу 01.04.02 Прикладная математика и информатика магистерской программы «Математическое моделирование» для подготовки магистров, входит в состав выборных дисциплин и является авторским курсом. Преподавание «Математических моделей в гидродинамике» как вузовской дисциплины предполагает обращение к знаниям и научным понятиям и категориям, освоенным в блоках естественно-научных дисциплин в курсе подготовки бакалавров. Знания и навыки, сформированные в процессе изучения дисциплины «Математические модели в гидродинамике», необходимы для освоения других базовых профессиональных дисциплин и вариативных дисциплин, обеспечивающих профильность подготовки магистра.

Целью практических занятий по дисциплине «Математические модели в гидродинамике» является выработка практических навыков построения математических моделей, что позволит студенту самостоятельно разрабатывать математические модели при написании выпускной квалификационной работы и применять полученные знания в своей профессиональной деятельности.

Методические указания состоят из введения и двух основных разделов курса «Математические модели в гидродинамике». Каждый из разделов содержит перечень теоретических вопросов по теме, которые необходимо знать для решения практических задач, подробно описанное решение демонстрационного примера, задания для самостоятельного решения. В конце пособия приведены вопросы к зачету, список основной и дополнительной литературы. В ходе изучения дисциплины студент на занятиях выполняет задания из соответствующих разделов данных учебно-методических материалов. По окончании изучения дисциплины данные учебно-методические материалы могут быть полезны в ходе подготовки к зачету.

## **РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ, ДИФФУЗИИ**

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ**

Гидродинамика является основой многих прикладных наук, в том числе связанных с проектированием и эксплуатацией водного транспорта и гидротехнических сооружений. Законы гидродинамики человечество постигало в течение всей своей истории, совершенствуя обводы и движители кораблей, создавая водяные мельницы, портовые сооружения, каналы, шлюзы, водопроводные системы и пр. Крупнейшие учёные создавали науку о движении жидкостей. Леонардо да Винчи, Г. Галилей и И. Ньютон исследовали сопротивление воздуха и воды движению тел.

Гидродинамика – это наука о движении жидкости (или газа). С точки зрения математического описания движения текучих сред, нет разницы между жидкостью и газом. Иногда жидкостью называют несжимаемую среду, а газом называют среду, у которой плотность существенно меняется.

Жидкость – такое состояние физической среды, при котором она легко деформируется под действием внешних и внутренних сил.

Вязкость жидкости характеризует ее способность сопротивляться сдвиговым деформациям.

Расход жидкости – это количество жидкости, протекающей через живое сечение потока в единицу времени. Расход может определяться в массовых долях  $G$  и объемных  $Q$ .

Средняя скорость движения жидкости – это средняя скорость частиц в живом сечении потока.

Идеальная или невязкая жидкость является упрощенной моделью реальной (вязкой) жидкости. По предположению, идеальная жидкость имеет все свойства реальной, кроме вязкости.

Ньютоновская жидкость (названная так в честь Исаака Ньютона) – вязкая жидкость, подчиняющаяся в своём течении закону вязкого трения Ньютона, то

есть касательное напряжение и градиент скорости в такой жидкости линейно зависимы.

В общем случае задачей гидромеханики является установление связи между скоростями и напряжениями в жидкости с одной стороны, и действующими на жидкость внешними силами и движениями тел – с другой. Для установления такой связи составляют математические уравнения движения или равновесия жидкости. Однако при этом возникают существенные трудности.

Первая из них заключается в том, что математические модели лишь частично отражают изучаемое явление, так как они строятся на многих упрощающих допущениях. Вторая трудность состоит в том, что в большинстве интересных для практики случаев точно решить математически поставленную задачу не удаётся. Приходится использовать дополнительные упрощающие допущения или приближённые (численные) методы решения. Отмеченные трудности приводят к необходимости корректировать и дополнять теоретические выводы гидромеханики результатами физических экспериментов (натурных или модельных). В результате теория и опыт взаимно дополняют и обогащают друг друга.

Так, опыт показывает, что в большинстве случаев при построении теоретических зависимостей можно использовать гипотезу непрерывности (сплошности) жидкой среды, согласно которой кинематические и динамические характеристики жидкости являются непрерывными функциями времени и пространства.

Другая гипотеза – допущение о несжимаемости жидкости, которое также подтверждается опытом. Так, при внешнем давлении 100 атмосфер вода изменяет свой объём лишь на 0.5 % от первоначального. Примерно так же ведут себя и другие капельные жидкости. Более того, даже воздух при небольших скоростях движения (порядка до 70 м/с) также можно считать несжимаемым. Лишь при больших скоростях движения, приближающихся к скорости звука (для воды около 1500 м/с, для воздуха – 340 м/с), необходимо учитывать сжимаемость

жидкостей и газов. Такие скорости характерны для задач удара о воду, взрывов, высокочастотных (акустических) колебаний, некоторых видов кавитации.

Наконец, ряд важных задач гидромеханики (поверхностное волнение, многие виды качки судов, удары о воду, течения в стороне от пограничного слоя и др.) в первом приближении можно решать, считая жидкость невязкой. Это означает пренебрежение сдвигающими усилиями (трением). Невязкая жидкость называется также идеальной.

Таким образом, подавляющее большинство задач гидродинамики решаются теоретически с допущениями о сплошности жидкости. Очень часто используются также допущения о несжимаемости и невязкости. Учёт каждого из этих факторов резко усложняет решение задачи. Во многих случаях этот учёт можно более просто произвести на основе эмпирических зависимостей и коэффициентов, полученных на основе физических опытов.

### **Вопросы для теоретической подготовки**

1. Основные понятия гидродинамики. Расход жидкости и средняя скорость потока.
2. Типы жидкостей (классификация). Идеальная и вязкая жидкости; понятие о неньютоновской жидкости.
3. Методы гидромеханики.
4. Дифференциальное уравнение Эйлера (идеальная жидкость).
5. Уравнения неразрывности или закон сохранения массы.
6. Закон сохранения массы для струйки тока.

### **Демонстрационные примеры**

#### Пример 1

Показать, что  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$ , если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  линейно зависимы. Проверить линейную зависимость (или независимость) следующей тройке векторов:

$$\mathbf{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\mathbf{v} = 4\vec{i} - \mathbf{j} - \vec{k},$$

$$\mathbf{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

### Решение

Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  линейно зависимы, если существуют константы  $\alpha$ ,  $\mu$  и  $\gamma$ , не все равные нулю и такие, что  $\alpha\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Это векторное уравнение дает в компонентах три скалярных

$$\alpha a_x + \mu b_x + \gamma c_x = 0,$$

$$\alpha a_y + \mu b_y + \gamma c_y = 0,$$

$$\alpha a_z + \mu b_z + \gamma c_z = 0.$$

Эта система имеет ненулевое решение для  $\alpha$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  только в том случае, когда определитель из коэффициентов обращается в нуль

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

а это эквивалентно равенству  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$ . Для предложенной тройки векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, эти векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  линейно зависимы. В самом деле,  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ .

### Пример 2

В трехмерном пространстве расшифровать следующие тензорные символы (тензоры декартовы):  $A_{ii}$ ,  $B_{ijj}$ ,  $R_{ij}$ ,  $a_i T_{ij}$ ,  $a_i b_j S_{ij}$ .

### Решение

$A_{ii}$  представляет одну сумму:  $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ;

$B_{ijj}$  представляет три суммы:

- 1) При  $i=1$   $B_{111} + B_{122} + B_{133}$ ,
- 2) При  $i=2$   $B_{211} + B_{222} + B_{233}$ ,
- 3) При  $i=3$   $B_{311} + B_{322} + B_{333}$ ;

$R_{ij}$  представляет собой девять компонент:  $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{31}, R_{32}, R_{33}$ ;

$a_i T_{ij}$  представляются три суммы:

1) При  $j=1$   $a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31}$ ,

2) При  $j=2$   $a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32}$ ,

3) При  $j=3$   $a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33}$ ;

$a_i b_j S_{ij}$  представляет сумму девяти членов. Первое суммирование по  $i$  дает  $a_i b_j S_{ij} = a_1 b_j S_{1j} + a_2 b_j S_{2j} + a_3 b_j S_{3j}$ . Затем каждое из этих трех слагаемых суммируем по  $j$ :

$$a_i b_j S_{ij} = a_1 b_1 S_{11} + a_1 b_2 S_{12} + a_1 b_3 S_{13} + a_2 b_1 S_{21} + a_2 b_2 S_{22} + a_2 b_3 S_{23} + a_3 b_1 S_{31} + a_3 b_2 S_{32} + a_3 b_3 S_{33}.$$

### Пример 3

Найти главные направления и главные значения декартова тензора  $\mathbf{T}$  второго порядка, который представлен матрицей

$$[T_{ij}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

### Решение

Для определения главных значений  $\alpha$  имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \alpha & -1 & 0 \\ -1 & 3 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha)[(3 - \alpha)^2 - 1] = 0.$$

Это кубическое уравнение

$$\alpha^3 - 7\alpha^2 + 14\alpha - 8 = (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 4) = 0,$$

корни которого  $\alpha_{(1)} = 1, \alpha_{(2)} = 2, \alpha_{(3)} = 4$ .

Пусть теперь  $n_i^{(1)}$  - компоненты единичного вектора главного направления, соответствующего  $\alpha_{(1)} = 1$ . Тогда два первых уравнения системы дают

$$2n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = 0 \text{ и } -n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} = 0, \text{ откуда } n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0, \text{ а из условия } n_i n_i = 1 \text{ получим } n_3^{(1)} = \pm 1.$$

Для  $\alpha_{(2)} = 2$  система уравнений дает  $n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 0$ ,  $-n_1^{(2)} + n_2^{(2)} = 0$  и  $-n_3^{(2)} = 0$ . Таким образом,  $n_3^{(2)} = 0$ , а  $n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , так как  $n_i n_i = 1$ .

Для  $\alpha_{(3)} = 4$  из системы уравнений получаем  $-n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0$ ,  $-n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0$  и  $3n_3^{(3)} = 0$ . Таким образом,  $n_3^{(3)} = 0$  и  $n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Ориентация главных осей  $x_i^*$  относительно исходной системы  $x_i$  определяется направляющими косинусами, которые даны в следующей таблице:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1^*$	0	0	$\pm 1$
$x_2^*$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$x_3^*$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0

Отсюда видно, что матрица тензора преобразования такова:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

#### Пример 4

Показать, что поле скоростей  $v_i = Ax_i/r^3$ , где  $x_i x_i = r^2$  и  $A$  - произвольная константа, удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости.

#### Решение

Для несжимаемой жидкости  $v_{k,k} = 0$ . В нашем случае

$$v_{i,k} = A \left( \frac{x_{i,k}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right) = A \left( \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3x_i x_k}{r^5} \right);$$

Следовательно,  $v_{k,k} = \frac{3-3}{r^3} = 0$  и уравнение неразрывности несжимаемой жидкости удовлетворяется.

#### Пример 5

Пусть определяющие уравнения имеют вид  $\sigma_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}$ . Доказать, что из-за симметрии тензоров напряжений и скоростей деформации тензор

четвертого ранга  $K_{ijpq}$  имеет не более 36 независимых компонент. Записать эти компоненты в виде матрицы шестого порядка.

### Решение

Так как,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , то  $K_{ijpq} = K_{jiqp}$ ; кроме того,  $K_{ijpq} = K_{ijqp}$ , поскольку  $D_{ij} = D_{ji}$ . Подобно внешнему произведению двух симметричных тензоров имеющих по шесть независимых компонент, тензор  $K_{ijpq}$  будет иметь более 36 различных компонент.

Обычно принято располагать компоненты следующим образом:

$$K_{ijpq} = \begin{pmatrix} K_{1111} & K_{1122} & K_{1133} & K_{1123} & K_{1131} & K_{1112} \\ K_{2211} & K_{2222} & K_{2233} & K_{2223} & K_{2231} & K_{2212} \\ K_{3311} & K_{3322} & K_{3333} & K_{3323} & K_{3331} & K_{3312} \\ K_{2311} & K_{2322} & K_{3333} & K_{2323} & K_{2331} & K_{2312} \\ K_{3111} & K_{3122} & K_{3133} & K_{3123} & K_{3131} & K_{3112} \\ K_{1211} & K_{1222} & K_{1233} & K_{1223} & K_{1231} & K_{1212} \end{pmatrix}$$

### **Задания для самостоятельного решения**

1. В трехмерном пространстве вычислить следующие выражения, содержащие символ Кронекера  $\delta_{ij}$ : а)  $\delta_{ii}$ , б)  $\delta_{ij}\delta_{ij}$ , в)  $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$ , г)  $\delta_{ij}\delta_{jk}$ , д)  $\delta_{ij}A_{ik}$ .

2. Показать, что сумма  $\alpha A_{ij} + \mu B_{ij}$  представляет компоненты тензора второго ранга, если известно, что  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  - тензоры второго ранга.

3. Найти главные значения симметричной части тензора

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -6 & -6 \\ -3 & -18 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. В исходной декартовой системе координат известны компоненты тензора  $A_{ij}$ . Найти его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной на некоторый угол вокруг одной из осей:

а).  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , вокруг оси  $O_x$  на  $30^\circ$ ;

б).  $A_{ij} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ , вокруг оси  $O_y$  на  $45^\circ$ ;

в).  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ , вокруг оси  $O_z$  на  $135^\circ$ .

5. В системе координат, полученной из исходной декартовой системы путём её поворота на некоторый угол вокруг одной из осей, известны компоненты тензора  $A'_{ij}$ . Найти его компоненты в исходной системе координат (до поворота):

а).  $A'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , вокруг оси  $O_x$  на  $60^\circ$ ;

б).  $A'_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ , вокруг оси  $O_y$  на  $120^\circ$ ;

в).  $A'_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , вокруг оси  $O_z$  на  $30^\circ$ .

6. В некоторой декартовой системе координат даны компоненты тензора

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На какой угол  $\varphi$  вокруг оси  $O_z$  нужно повернуть систему координат, чтобы в новой системе координат компонента  $T'_{12}$  стала равной нулю? Чему равны остальные компоненты  $T'_{ik}$  в новой системе координат?

7. Доказать, что сумма  $\alpha A_{ij} + \beta B_{ij}$  представляет собой компоненты тензора второго ранга, если известно, что  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  - тензоры второго ранга, а  $\alpha$  и  $\beta$  - скаляры.

8. Доказать, что произведение  $\delta_{ij} A_j B_n C_n$  является вектором, если  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$  - векторы.

9. В некоторой декартовой системе координат известно соотношение  $M_{ijk} = A_i B_{jk}$ . Известно, что  $A_i$  и  $B_{jk}$  составляют компоненты тензоров I-го и II-го рангов соответственно. Доказать, что  $M_{ijk}$  - тензор III-го ранга.

10.  $R_{nkml}$  - тензор IV-го ранга. Доказать, что  $D_{nl} = R_{nkkl}$  - тензор II-го ранга.

11. В некоторой декартовой системе координат известно соотношение  $F_k H_n = T_{kn}$ , где  $T_{kn}$  – тензор II-го ранга,  $\vec{F}$  – вектор. Доказать, что  $H_n$  образует вектор.

12. В некоторой декартовой системе координат известно соотношение  $A_i B_{ik} = C_k$ . Доказать, что

а).  $B_{ik}$  – тензор II-го ранга, если  $\vec{A}$  и  $\vec{C}$  – векторы;

б).  $A_i$  – вектор, если  $B_{ik}$  – тензор II-го ранга,  $\vec{C}$  – вектор.

13. В некоторой декартовой системе координат известно соотношение  $F = A_{ij} B_{jk} C_{ki}$ . Доказать, что

а).  $F$  – скаляр, если  $A_{ij}, B_{jk}, C_{ki}$  – тензоры второго ранга;

б).  $B_{jk}$  – тензор второго ранга, если  $F$  – скаляр, а  $A_{ij}, C_{ki}$  – тензоры второго ранга.

14. В некоторой декартовой системе координат имеет место соотношение  $T_{nkm} = A_{mi} R_{ink}$ . Доказать, что

а).  $A_{mi}$  – тензор II-го ранга, если  $T_{nkm}$  и  $R_{ink}$  – тензоры III-го ранга;

б).  $R_{ink}$  – тензор III-го ранга, если  $T_{nkm}$  и  $A_{mi}$  – тензоры III-го и II-го рангов соответственно.

15. В некоторой декартовой системе координат имеет место соотношение  $S_k = A_m T_{mkn} R_{nl}$ . Доказать, что

а).  $A_m$  – вектор, если  $S_k$  – вектор, а  $T_{mkn}$  и  $R_{nl}$  – тензоры IV-го и II-го рангов соответственно;

б).  $T_{mkn}$  – тензор IV-го ранга, если  $S_k$  и  $A_m$  – векторы, а  $R_{nl}$  – тензор II-го ранга; в).  $R_{nl}$  – тензор II-го ранга, если  $S_k$  и  $A_m$  – векторы, а  $T_{mkn}$  – тензор IV-го ранга.

16. Даны два тензора II-го и III-го рангов соответственно –  $P_{ik}$  и  $R_{nml}$ . Получить из них путём перемножения и свёртывания тензоры I-го, III-го и V-го рангов.

17. Записать в развёрнутой форме и по возможности упростить выражение  $D_{ij} x_i x_j$ , если

а).  $D_{ij} = D_{ji}$  ;

б).  $D_{ij} = -D_{ji}$  .

18. Даны три вектора –  $A_i, B_j, C_k$ . Построить зависящие от них

а). инварианты;

б). тензоры II-го ранга;

в). симметричный тензор III-го ранга.

19. Используя свойства матрицы поворота, доказать, что определитель тензора второго ранга является инвариантом.

20. В некотором базисе задан тензор II-го ранга:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Известны также два вектора:  $\vec{A} = \{ 2, 1, 3 \}$  и  $\vec{B} = \{ 1, -1, 3 \}$  . Найти:

а).  $T_{ij}A_iB_j$ ;

б).  $\left(T_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}\right)T_{nn}$ ;

в).  $\left(T_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}\right)A_iB_j$ .

21. Доказать, что произведение компонент двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  образует тензор второго ранга. Найти матрицу этого тензора в системе К, если известны компоненты  $\vec{A} = \{ 1, -1, 2 \}$  в системе К и  $\vec{B}' = \{ 0, 2, 1 \}$  – в системе К', получаемой из К поворотом вокруг оси  $O_z$  на  $90^\circ$ .

22. Доказать, что произведение компонент векторов  $A_i$  и  $B_j$  образуют тензор второго ранга. Найти компоненты этого тензора в системе координат К', если известны компоненты  $\vec{A} = \{ 1, 0, 2 \}$  и  $\vec{B} = \{ -1, 2, 3 \}$  в системе К и матрица, связывающая систему К с системой К':

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. В некоторой системе координат известны компоненты двух векторов –  $\vec{A} = \{ 1, 2, -1 \}$  и  $\vec{B} = \{ 2, 3, -4 \}$ . Найти матрицу тензора  $T_{ij} =$

$A_i B_j - \varepsilon_{ijk} A_k$  и вычислить его след.

Из тензора второго ранга  $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

и векторов  $\vec{A} = \{1, 1, 1\}$  и  $\vec{B} = \{0, 2, 1\}$  построить величины:

а).  $(T_{ij} - \frac{1}{4} \delta_{ij} T_{ll}) A_i B_j$ ;

б).  $T_{ij} \delta_{ij} A_n$ .

24. В некотором базисе известны два вектора  $\vec{A} = \{1, 2, -1\}$  и  $\vec{B} = \{3, 2, 4\}$ . Из компонент этих векторов построить симметричный и антисимметричный тензоры второго ранга.

25. В некоторой системе координат известны компоненты тензора II-го ранга:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Разложить его на симметричную  $S_{ij}$  и антисимметричную  $A_{ij}$  составляющие. Найти  $S_p(S_{in} A_{nj})$ .

26. Разложить тензор  $F_{ij}$ , матрица которого имеет следующий вид

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

на симметричную  $S_{ij}$  и антисимметричную  $A_{ij}$  составляющие. Найти матрицу тензора  $G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} F_{nn}$ . Чему равен его след?

27. Разложить тензор  $H_{ij}$ , матрица которого имеет следующий вид

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

на симметричную  $S_{ij}$  и антисимметричную  $A_{ij}$  составляющие. Найти свёртку  $S_{ij} A_{ij}$ .

28. В некоторой системе координат задан тензор второго ранга:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чему равны следующие свёртки:

а).  $\delta_{ik} C_{ik}$  ;

б).  $\varepsilon_{ijk} C_{jk}$ ?

29. Даны векторы  $\vec{B} = \{1, -1, 2\}$  и  $\vec{C} = \{0, 2, 1\}$ . Чему равны следующие свёртки:

а).  $\delta_{ik} B_i C_k$  ;

б).  $\varepsilon_{ijk} B_j C_k$ ?

30. Пусть вектор  $\vec{A}$  имеет компоненты  $\{1, 2, 3\}$ . Найти свёртку:  $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{klm} A_m$ .

31. Найти собственные значения и собственные векторы приведённых ниже тензоров. Проверить свойство ортогональности собственных векторов.

а).  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ;

б).  $B_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

в).  $C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ;

г).  $D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

д).  $E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

е).  $F_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \\ 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}$

32. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора  $\tilde{A}$  (матрицы  $A$ ):

а)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ;

$$б) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$г) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$д) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$е) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

33. Дано плоское течение несжимаемой жидкости  $v_1 = A(x_1^2 - x_2^2)/r^4$ ,  $v_2 = A(2x_1x_2)/r^4$ ,  $v_3 = 0$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Доказать, что такое поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности.

34. Имеется плоский поток несжимаемой жидкости, в котором  $v_1 = -Ax_2/r^2$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Найти во всем потоке компоненту  $v_2$ , если  $v_2 = 0$  при  $x_1 = 0$  для всех значений  $x_2$ . Показать, что движение безвихревое, а линии тока - окружности.

35. Доказать, что течение с полем скоростей  $v_1 = -2x_1x_2x_3/r^4$ ,  $v_3 = x_2/r^2$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , удовлетворяет условию несжимаемости. Будет ли это течение безвихревым?

36. Уравнение неразрывности в декартовых координатах  $x$ ,  $y$  и  $z$  выглядит так:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial(pv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(pv_z)}{\partial z} = 0.$$

Доказать, что в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  оно примет вид

$$r \left( \frac{dp}{dt} \right) + \frac{\partial(rpvr)}{\partial r} + \frac{\partial(pv_\theta)}{\partial \theta} + r \left( \frac{\partial(pv_z)}{\partial z} \right) = 0.$$

37. Доказать, что течение с полем скоростей  $r^4, v_r = (1 - r^2)\cos\theta/r^2$ ,  $v_\theta = (1 + r^2)\sin\theta/r^2$ ,  $v_z = 0$  удовлетворяет уравнению неразрывности в цилиндрических координатах, если плотность  $\rho$  - константа.

38. Доказать, что для вектора вихря скорости  $\Omega$  верна формула

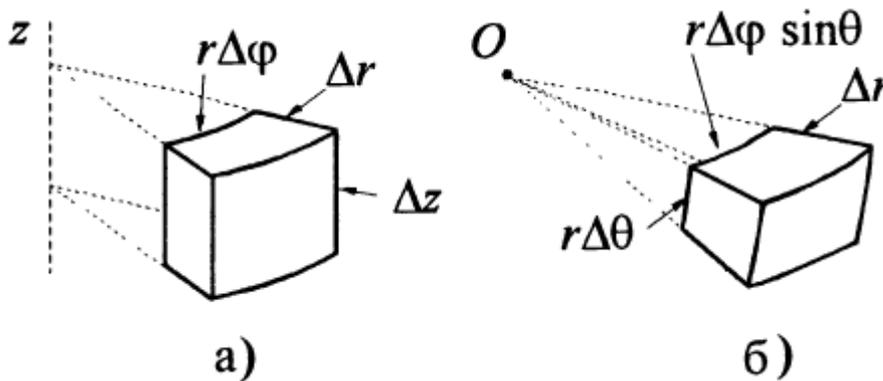
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Omega}{\rho} \right) = \frac{\Omega(\nabla \cdot v)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Omega}{dt}.$$

39. Проверить, удовлетворяет ли поле скоростей несжимаемой жидкости с компонентами вектора скорости  $v_x = 2x, v_y = -2y, v_z = x + y$  уравнению неразрывности.

40. Вывести уравнение неразрывности в переменных Эйлера

а) в цилиндрической системе координат;

б) в сферической системе координат, рассматривая баланс массы для элементарного координатного объема (см.рис.)



41. Записать уравнение неразрывности в переменных Эйлера в произвольной криволинейной ортогональной системе координат, используя физические компоненты вектора скорости. Вывести из него уравнение неразрывности

а) в цилиндрической системе координат,

б) в сферической системе координат.

42. Записать уравнение неразрывности для одномерных движений с плоской, цилиндрической и сферической симметрией. При таких движениях все параметры зависят лишь от одной пространственной переменной  $r$  и времени  $t$ , причем поверхности  $r = const$  в первом случае - плоскости, во втором - цилиндры, в третьем - сферы; кроме того, для скорости отлична от нуля только составляющая вдоль координат линии  $r$ .

43. Используя условие равенства массы любого индивидуального объема в начальном и конечном состояниях, вывести уравнение неразрывности в

переменных Лагранжа в формах  $(\rho \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right\| = \rho_0)$  и  $(\rho \sqrt{\hat{g}} = \rho_0 \sqrt{\hat{g}})$ .

44. Вывести уравнение неразрывности в переменных Лагранжа в формах

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1+2I_1(\dot{\varepsilon})+4I_2(\dot{\varepsilon})+8I_3(\dot{\varepsilon})}} \quad \text{и} \quad (\rho_0 = \frac{\rho}{\sqrt{1-2I_1(\dot{\varepsilon})+4I_2(\dot{\varepsilon})-8I_3(\dot{\varepsilon})}}),$$

связывающее изменение плотности с инвариантами тензоров деформации. Показать, что они совпадают в случае малых деформаций в линейном приближении.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.2. ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Плотность несжимаемой жидкости постоянна, в математической модели она выступает как заданный параметр. Уравнение неразрывности при этом имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Уравнения Навье, или уравнения движения в напряжениях, после подстановки в них закона трения Стокса преобразуются к виду

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu e_{ij}}{\partial x_j} + g_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Если вязкость постоянна, то член, выражающий дивергенцию вязких напряжений можно записать так:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu e_{ij}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \nu \Delta v_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

Но последнее слагаемое равно нулю из-за уравнения неразрывности, поэтому из уравнения выше получаем уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i + g_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{- оператор Лапласа.}$$

Взгляд на температуру как меру внутренней энергии, связанную со скоростью движения молекул, используется в физике, а в гидромеханике принят

феноменологический подход, при котором изучают макроскопические свойства переноса тепла. В частности, вводится понятие теплового потока между по-разному нагретыми частями сплошной среды.

Тепловой поток  $Q$  – это количество тепла, которое переносится в единицу времени:  $[Q] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$ . Плотность теплового потока  $q = Q/S$  – это тепловой поток, протекающий через единицу площади.

Выделим, как и раньше, контрольный объем  $V$  и рассмотрим закон изменения его полной энтальпии

$$H = \int_V \rho h dV = \int_V \rho c T dV, \text{ Дж}$$

Если  $\bar{q}, \text{ Вт/м}^2$  – плотность теплового потока, а  $f, \text{ Вт/м}^3$  – удельная мощность внутренних источников тепла, то баланс энергии выразится уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dV}_{\text{изменение энтальпии в объеме}} + \underbrace{\int_S \rho h v_n dS}_{\text{поток энтальпии через поверхность}} = \underbrace{-\int_S q_n dS}_{\text{приток тепла через поверхность}} + \underbrace{\int_V f dV}_{\text{внутренние источники}}.$$

Знак минус в правой части появился потому, что положительным, т.е. направленным на повышение энергии объема, считается поток тепла через границу  $S$  внутрь тела, т.е. противоположно внешней к поверхности  $S$  нормали  $n$ . Используя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем поверхностные интегралы в объемные,

$$\int_S \rho h v_n dS = \int_V \nabla(\rho h \vec{v}) dV; \quad \int_S q_n dS = \int_V \nabla \bar{q} dV$$

и, учитывая произвольность контрольного объема  $V$ , запишем уравнение энтальпии

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho h \vec{v}) = -\nabla \bar{q} + f, \quad h = cT.$$

Для определения потока  $\bar{q}$  привлечем линейный закон теплопроводности Фурье

$$\bar{q} = -\lambda \text{ grad } T = -\lambda \nabla T,$$

в котором  $\lambda, \text{ Вт/(м*К)}$  – коэффициент теплопроводности среды. В общем случае  $\lambda$  – это тензор теплопроводности

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику жидкости, определяют решение с точностью до произвольных постоянных. Единственное решение можно выбрать, если задать дополнительно начальные и граничные условия – это краевые условия. Начальное условие задает искомые поля в момент  $t = 0$ , т.е. в момент начала моделирования процесса. Граничные условия определяют взаимодействие скоростного потока или потока тепла с границами и находящимися в потоке телами. Дифференциальные уравнения в совокупности с краевыми условиями формируют краевую задачу для конкретного гидродинамического процесса.

### Вопросы для теоретической подготовки

1. Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости
2. Уравнение теплопроводности (конвективного переноса), начальные и граничные условия.
3. Простейшие аналитические решения краевых задач гидродинамики и теплообмена.
4. Завихренность.
5. Уравнения движения в форме Громеки-Ламба.
6. Уравнения движения в форме переноса завихренности.
7. Краевые задачи для уравнений в преобразованных переменных.

### Демонстрационные примеры

#### Пример 1

В осесимметричном потоке в направлении оси  $x_3$  скорость является функцией  $x_3$  и  $r$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Найти, какой вид принимает при этом уравнение неразрывности, если вектор скорости представлен в форме  $V = q\hat{e}_r + v_3\hat{e}_3$ , где  $\hat{e}_r$  – единичный вектор радиального направления.

### Решение

Уравнение неразрывности в символических обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (pv) = 0. \quad (1)$$

В данном случае используем оператор  $\nabla$  в цилиндрических координатах  $\nabla \cdot (pv) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rpqr)}{\partial r} + \frac{\partial(pv_3)}{\partial x_3}$

Подставив его в (1) и проведя некоторые упрощения, получим искомый вид уравнения неразрывности:

$$r \left( \frac{dp}{dt} \right) + \frac{\partial(rpvr)}{\partial r} + r \left( \frac{\partial(pv_3)}{\partial x_3} \right) = 0.$$

### Пример 2

Для движения  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = X_2 + X_1(e^{-2t} - 1)$ ,  $x_3 = X_3 + X_1(e^{-3t} - 1)$  вычислить тензор скоростей деформации  $D$  и тензор завихренности  $V$ . Сравнить компоненты  $D$  с  $\frac{de_{ij}}{dt}$  – скоростями изменения компонент эйлера тензора малых деформаций  $E$ .

### Решение

В данном случае компоненты перемещения равны  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = x_1(e^{-2t} - 1)$ ,  $u_3 = x_1(e^{-3t} - 1)$ , и компоненты скорости будут  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 2x_1e^{-2t}$ ,  $v_3 = 3x_1e^{-3t}$ . Разложение градиента скорости дает  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  дает

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} + V_{ij}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & 3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем разложение градиента перемещения  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} +$

$\omega_{ij}$ , т.е.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^{-2t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-3t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -e^{-3t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 \\ e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая  $\mathbf{D}$  с  $\frac{dE}{dt}$ , видим, что

$$\frac{dE}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_{ij}.$$

### Привет 3

Дано стационарное поле скоростей  $v = (x_1^3 - x_1 x_2^2)\hat{e}_1 + (x_1^2 x_2 - x_2)\hat{e}_2$ .

Найти скорости относительно точки  $P(1, 1, 3)$  частиц в точках  $Q_1(1, 0, 3)$ ,  $Q_2(1, 3/4, 3)$ ,  $Q_3(1, 7/8, 3)$ , отнесенные к расстоянию от этих точек до точки  $P$ , и

показать, что их величины стремятся к относительной скорости, определенной формулой ( $dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$ ).

### Решение

Непосредственное вычисление дает

$$v_p - v_{Q_1} = \hat{e}_1 + 2\hat{e}_2,$$

$$4(v_p - v_{Q_2}) = -7\hat{e}_1/4 + 2\hat{e}_2 \text{ и } 8(v_p - v_{Q_3}) = -15\hat{e}_1/8 + 2\hat{e}_2.$$

Матрица градиентов скорости имеет вид

$$\left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1 x_2 & 0 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

И в точке  $P(1, 1, 3)$  градиент скорости в отрицательном направлении оси  $x_2$  равен

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)_{\hat{e}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,  $\frac{dv}{dx} = -2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$ , и это величина, к которой стремятся относительные скорости  $v_p - v_{Q_i}$ , отнесенные к расстоянию до точки  $P$ .

#### Пример 4

Осесимметричное течение, описываемое в сферической системе координат функцией тока вида:

$$\Psi = A(a^2 - r^2)r^2 \sin^2 \theta, \quad (A = \text{const}, r \leq a).$$

Называется сферическим вихрем Хилла. Это вихревое течение сосредоточено внутри неподвижной твердой сферы радиусом  $a$ . Найти вектор завихренности и показать, что при  $r = a$  вихрь Хилла может быть склеен с течением, возникающим при обтекании сферы радиуса  $a$  потоком жидкости, движущимся на бесконечности с некоторой скоростью  $U$ .

#### Решение

Для нахождения  $\vec{\omega}$  надо записать оператор **rot** в сферической системе координат  $(r, \theta, \alpha)$ :

$$\omega_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(v_\alpha \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \alpha} \right);$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial(r v_\alpha)}{\partial r} \right);$$

$$\omega_\alpha = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right).$$

В силу (1.45') имеем

$$v_\theta = 2A(a^2 - 2r^2)\sin\theta, \quad v_r = -2A(a^2 - r^2)\cos\theta.$$

Подставим эти формулы, а также  $v_\alpha = 0$ , находим искомый вектор завихренности  $\omega_r = 0$ ,  $\omega_\theta = 0$ ,  $\omega_\alpha = 10A r \sin \theta$ .

Видно, что завихренность линейно зависит от расстояния до оси вихря Хилла.

Покажем теперь, что возможно подобрать такую константу  $A$ , для которой при переходе через сферу  $r = a$  скорость (а следовательно и давление) не терпят разрыва. Подставляя  $r = a$ , получаем, что ненулевой на сфере остается только одна компонента скорости

$$v_{\theta}|_{r=a} = -2Aa^2 \sin \theta.$$

С другой стороны потенциал обтекание шара дается формулой

$$\varphi = -U \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta.$$

Для того, чтобы получить отсюда вектор скорости надо воспользоваться оператором градиента в сферической системе координат. Имеем

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_{\alpha} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Дифференцируя, получаем

$$v_r = -U \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad v_{\theta} = U \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta, \quad v_{\alpha} = 0.$$

В частности, на поверхности шара имеется только одна ненулевая компонента вектора скорости

$$v_{\theta}|_{r=a} = \frac{3}{2} U \sin \theta.$$

Сравнивая, заключаем, что надо положить  $A = -\frac{3}{4} U/a^2$ .

### Задания для самостоятельного решения

1. Написать определяющие уравнения для ньютоновой жидкости с нулевой объемной вязкостью  $\chi^* \equiv 0$ .
2. Написать условия, при которых среднее нормальное давление  $\mathbf{p}_{(m)} = -\sigma_{ii}/3$  равно термодинамическому давлению  $p$  в ньютоновой жидкости.
3. Доказать следующее утверждение: если имеет место равенство  $\frac{dp}{dt} = 0$ , то в ньютоновской жидкости  $-\sigma_{ii}/3 = p$ .
4. Доказать, что определяющие уравнения ньютоновой жидкости с нулевым коэффициентом объемной вязкости можно представить двумя группами уравнений:  $S_{ij} = 2\mu * D_{ij}$  и  $-\sigma_{ii} = 3p$ .
5. Доказать, что, используя вектор завихренности  $q$ , уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости можно записать следующим образом:  $\dot{v} = b - \nabla p/\rho - v^* \nabla \times q$ , где  $v^* = \mu^*/\rho$  - кинематический коэффициент вязкости.

6. Жидкость вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси  $x_3$ . Из массовых сил действует только сила тяжести. Доказать, что  $p/\rho - \omega^2 r^2/2 + gx_3 = const$ .

7. Движение жидкости происходит по радиусам со скоростью  $v = v(r, t)$ , где  $r^2 = x_i x_i$ . Доказать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{p}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} = 0.$$

8. Имеем совершенный газ в поле силы тяжести в условиях изотермии (при постоянной температуре  $T_0$ ). Доказать, что  $\rho/\rho_0 = p/p_0 = e^{-(g/RT_0 x_3)}$ , где  $\rho_0$  и  $p_0$  - плотность и давление при  $x_3 = 0$

9. Массовые силы потенциальны, т.е.  $b_i = -\Omega_i$  и процесс баротропный. Доказать, что для безвихревого движения можно проинтегрировать уравнения Навье-Стокса-Дюгема и получить соотношение

$$-\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} \right) + \rho \Omega + P + (\alpha^* + 2\mu^*) \nabla^2 \varphi = f(t).$$

10. Пусть поле скорости неограниченного объема идеальной несжимаемой жидкости обусловлено движением в ней твердого тела, форма и размеры которого известны.

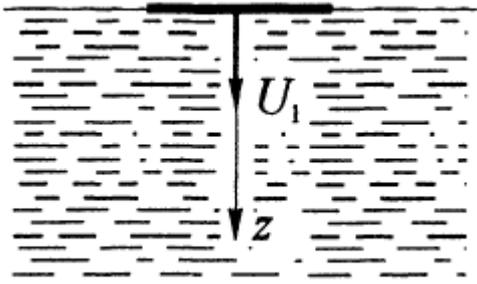
а) Сформулировать краевую задачу для потенциала поля скорости, считая, что движение потенциально и непрерывно всюду вне тела, а на бесконечности среда покоится.

б) Показать, что поле скоростей жидкости в каждый момент времени определяется только распределением скорости точек поверхности тела в этот момент и не зависит, например, от ускорения тела.

в) Справедливо ли свойство поля скорости, указанное в п. б), для давления?

г) Перечислить условия, при которых движение жидкости является потенциальным.

11. На поверхности однородно жидкости, заполняющей



полупространство, падает плоская абсолютно твердая пластина в виде круглого диска радиусом  $a$ . В момент времени  $t=0$  диск касается поверхности жидкости и мгновенно меняет свою

скорость до значения  $U_1$ , т.е. происходит удар твердого диска о воду.

а) Поставить задачу – записать уравнения и граничные условия, позволяющие определить скорость жидкости непосредственно после удара. Вязкостью жидкости пренебречь.

б) Предполагая решения поставленной задачи известным, найти скорость диска  $U_0$  в момент непосредственно перед ударом. Масса диска равна  $m$ .

12. Доказать, что потенциальное течение несжимаемой жидкости в односвязной области обладает меньшей кинетической энергией, чем всякое другое течение с такими же распределением нормальной скорости на границе области (теорема Кельвина).

13. Доказать единственность решения внутренних задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи Дирихле-Неймана для односвязной области.

14. Показать, что во внутренней точке области потенциального течения несжимаемой жидкости

а) ни потенциал скорости, ни одна из проекций скорости на декартовы оси координат не могут достигать ни наибольшего, ни наименьшего значений;

б) модуль скорости не может достигать наибольшего значения;

в) давление однородной идеальной жидкости не может достигать наименьшего значения, если поле массовых сил  $\mathbf{F}$  соленоидально, т.е.  $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$

15. Определить функцию давления  $p(x,y)$  для плоского течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью в отсутствии массовых сил по заданному полю скоростей  $u = 2x, v = -2y$ .

16. Некоторое течение задано полем скоростей где  $A$  и  $B$  - константы. Найти градиент скорости для движения и вычислить тензор скоростей

деформации  $D$  и тензор завихренности  $V$  в точке  $P(1,0,3)$  в момент  $t=0$ .

17. Вихревой линией называется такая линия, касательная к которой в каждой точке движущейся среды направлена по вектору вихря  $\Omega=1/2q$ . Доказать, что уравнение вихревых линий имеют вид  $dx_1/q_1 = dx_2/q_2 = dx_3/q_3$ .

18. Доказать, что для поля скоростей  $v = (Ax_3 - Bx_2)\hat{e}_1 + (Bx_1 - Cx_3)\hat{e}_2 + (Cx_2 - Ax_1)\hat{e}_3$  вихревые линии являются прямыми. Написать их уравнения.

19. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью  $v = 3x_3\hat{e}_1 - 4x_3\hat{e}_2 + (4x_2 - 3x_1)\hat{e}_3$  определить вектор вихря скорости  $\Omega$  и показать, что  $v = \Omega \times x$ .

20. Для стационарного поля скоростей  $v = 3x_1^2x_2\hat{e}_1 + 2x_2^2x_3\hat{e}_2 + x_1x_2x_3^2\hat{e}_3$  определить скорость удлинения материального отрезка в точке  $P(1,1,1)$  в направлении  $\hat{v} = (3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_3)/5$ .

21. Для движения, предложенного в задаче 5, определить в точке  $P$  скорость изменения угла между ортогональными направлениями  $\hat{v} = (3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_3)/5$  и  $\hat{\mu} = (4\hat{e}_1 + 3\hat{e}_3)/5$ .

22. Дано стационарное поле скорости  $v_1 = 2x_3, v_2 = 2x_3, v_3 = 0$ . Найти главные направления и главные значения тензора скорости деформации.

23. Записать уравнения движения в форме Громеки-Ламба

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\omega} \times \vec{V})_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + g_i, \quad i=1,2,3$$

для случая плоского течения жидкости  $u, v \neq 0, w = 0$  и удостовериться в том, что все слагаемые имеют одинаковую размерность

24. Доказать, что в односвязном объеме, ограниченном твердыми неподвижными стенками, не может существовать безвихревого движения жидкости без особенностей.

25. Доказать свойство ортогональности линий тока и эквипотенциальных линий в плоскопараллельном течении.

26. Показать, что давление  $p$  в безвихревом движении идеальной несжимаемой жидкости удовлетворяет неравенству :  $\Delta p \leq 0$

27. Доказать, что выражение

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\Omega}{6a}(x^3 - xy^2) \quad (\Omega = \text{const})$$
 определяет функцию тока

вихревого течения внутри призмы произвольной высоты, имеющей в основании равносторонний треугольник.

28. Определить вихревые линии для следующих течений:

а) Жидкость вращается вокруг оси  $O_z$  как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$ .

б) Сдвиговое течение жидкости:  $u = cy, v = 0, w = 0$  ( $c = \text{const}$ ).

с) Течение, для которого скорости частиц жидкости прямо пропорциональны расстоянию до оси  $O_x$  и направлены параллельно этой оси.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.3. ЧАСТНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

В общем случае неизотермическое движение вязкой сжимаемой жидкости описывается следующими уравнениями.

1. Уравнения Навье – Стокса (3 уравнения для компонент вектора скорости  $u, v, w$ ).

2. Уравнение неразрывности (для давления  $p$ ).

3. Уравнение конвективной теплопроводности (для расчета температуры  $T$ ).

4. Уравнение состояния, которое связывает  $p, \rho, T$  (для идеальных газов это уравнение имеет вид  $p = \rho RT$ ).

Имеем 6 уравнений и 6 неизвестных ( $u, v, w, \rho, T, p$ ).

Эта система чрезвычайно сложна и в общем виде с трудом поддается решению даже современными численными методами на мощных ПК. Поэтому часто рассматривают различные упрощения этой системы, которые, тем не менее, в ряде случаев адекватно моделируют течение жидкости.

Движение называется установившимся, если в каждой точке пространства  $(x, y, z)$  его параметры ( $u, v, w, \rho, T, p$ ) не меняются со временем.

С точки зрения Эйлера, в каждой фиксированной точке пространства никаких изменений параметров течения со временем не происходит. В математике это означает, что во всех уравнениях частные производные по времени равны нулю.

Важное свойство установившихся течений состоит в том, что линии тока неизменны и совпадают с траекториями движения частиц. Частным случаем установившегося течения является равновесие жидкости. Это происходит, когда течения нет, т.е.  $\vec{v} \equiv 0$ .

Раздел гидродинамики, который изучает равновесие жидкости называется гидростатикой. Уравнения гидростатики получаются из общих уравнений гидродинамики, если в них формально положить  $\vec{v} \equiv 0$ .

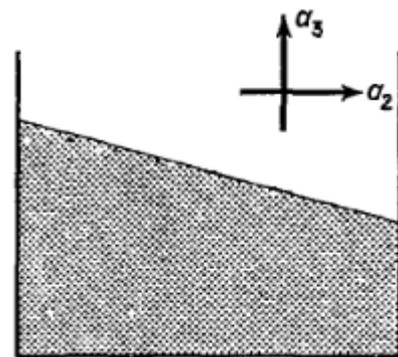
### Вопросы для теоретической подготовки

1. Установившееся квазистационарное движение
2. Гидростатика

### Демонстрационные примеры

#### Пример 1

Широкий сосуд, наполненный несжимаемой жидкостью, движется с постоянным ускорением  $a = a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$  в поле силы тяжести, направленном вдоль оси  $x_3$ . Найти наклон свободной поверхности жидкости в сосуде.



#### Решение

Из уравнений равновесия  $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho a_2$  и  $\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho(g - a_3)$ .

Интегрируем:

$p = \rho a_2 x_2 + f(x_3)$  и  $p = -\rho(g - a_3)x_3 + h(x_2)$ , где  $f$  и  $h$  – произвольные функции своих аргументов. Объединяя, получаем общую формулу давления  $p = \rho a_2 x_2 - \rho(g - a_3)x_3 + p_0$ , где  $p_0$  – давление в начале координат на свободной

поверхности  $p = p_0$ , то уравнение искомой свободной границы будет  $x_2/x_3 = (g - a_3)/a_2$ .

### Пример 2

Первоначально покоящаяся в момент времени  $t = 0$  идеальная несжимаемая жидкость находится в равномерном поле массовых сил

$$f_x = -\frac{\mu y}{r^2},$$

$$f_y = \frac{\mu x}{r^2},$$

$$f_z = 0.$$

Здесь  $\mu = const$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Найти последующее движение жидкости при  $t > 0$  и определить давления.

### Решение

Ищем вектор скорости в виде  $u = -\Omega y$ ,  $v = \Omega x$ ,  $w = 0$ . Такое течение является плоскопараллельным. Неизвестная функция  $\Omega(r, t)$  имеет смысл мгновенной угловой скорости вращения относительно начала координат для частицы жидкости, расположенной на радиусе  $r$  в момент времени  $t$ . Подставляя в уравнение Эйлера, получим

$$\frac{du}{dt} = -y \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega^2 y^2 \frac{x}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \Omega^2 x - \Omega^2 \frac{xy^2}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -y \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \Omega^2 x = -\frac{\mu y}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} = x \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \Omega^2 y = \frac{\mu x}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Уравнение неразрывности дает тождество:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = -\frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{x}{r} y + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{y}{r} x = 0.$$

Исключая давление  $p$ , получим

$$2 \frac{\partial \Omega}{\partial t} + r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial t} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$\Omega = \frac{F(t)}{r^2} + f(r)$ , где  $F(t)$  и  $f(r)$  - произвольные функции. Учитывая начальное условие для  $\Omega$

$$\frac{F(0)}{r^2} + f(r) = 0.$$

Имеем

$$\Omega = \frac{F(t) - F(0)}{r^2} = \frac{\alpha(t)}{r^2}.$$

Функция  $\alpha(t)$  при  $t = 0$  обращается в нуль. Подставляя в уравнение Эйлера и интегрируя, получим формулу для давления:

$$\frac{p}{\rho} = \left( \mu - \frac{d\alpha}{dt} \right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 + \psi(t).$$

Давление является однозначной функцией, в то время как  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  таковой функцией не является. Мы вынуждены положить  $\mu = \frac{d\alpha}{dt}$ . Решая теперь это уравнение, находим  $\alpha = \mu t$ . Следовательно жидкость вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью, прямо пропорциональной времени и обратно пропорциональной расстоянию до оси. Давление в жидкости находим с точностью до произвольной функции времени  $\psi(t)$ . Поле массовых сил возникает вокруг прямолинейного проводника с током.

### Задания для самостоятельного решения

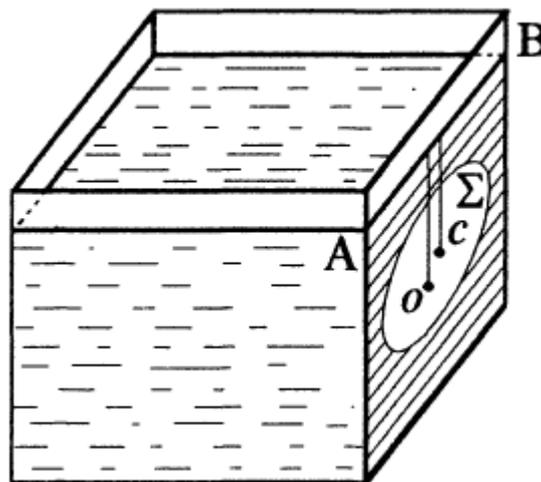
1. Показать, что при равновесии неоднородной жидкости:

а) поле внешних сил удовлетворяет условию  $F \cdot \operatorname{rot} F = 0$ , а в однородной жидкости условию  $F = \operatorname{grad} U$ ;

б) если поле внешних сил потенциально, т.е.  $F = \operatorname{grad} U$ , то  $\rho = \rho(U)$ ,  $p = p(U)$ , а, следовательно, и  $T = T(U)$  для газа с уравнением состояния  $f(p, \rho, T) = 0$ ;

в) если  $F = \operatorname{grad} U$ , то граница раздела двух жидкостей с разной плотностью совпадает с поверхностью уровня функции  $U$  и на ней давление постоянно.

2. Тяжелая однородная жидкость налита в сосуд, имеющий плоскую стенку. Свободная поверхность жидкости и сам сосуд находятся в контакте с атмосферой, давление  $p_a$  в которой постоянно.

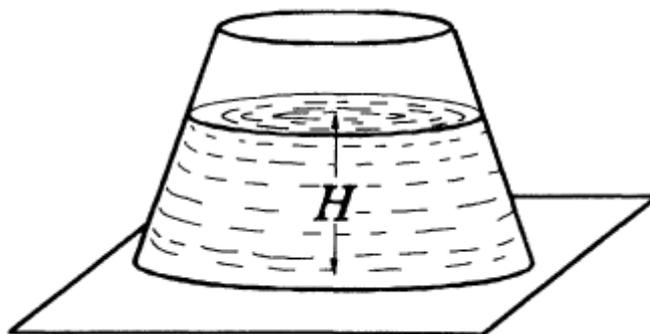


Пусть  $p$  - равнодействующая сил давления, действующих на площадку  $\Sigma$ , расположенную на смоченной жидкостью части плоской стенки;  $h_0$  - глубина погружения центра давления  $O$  (точки положения этой равнодействующей). Показать, что

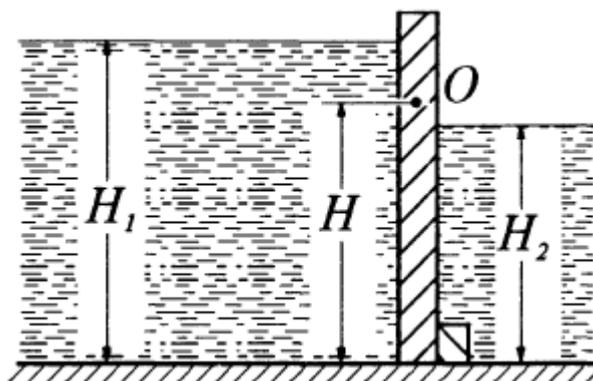
$P = |P| = \rho g S h_c$ ,  $h_0 = \frac{I}{S h_c}$ , где  $S$  - площадь  $\Sigma$ ;  $h_c$  - глубина погружения ее геометрического центра  $C$ ;  $I$  - момент инерции площадки  $\Sigma$  относительно линии  $AB$  пересечения свободной поверхности со стенкой.

3. Найти силу  $P$ , действующую на квадратную стенку аквариума, до краев заполненного водой. На какой высоте  $H$  от дна находится точка приложения этой силы?

4. Открытый тяжелый колпак в виде усеченного кругового конуса с углом  $\alpha$  при основании и радиусом основания  $R$  стоит на горизонтальной плоскости. Каков должен быть вес колпака  $G$ , чтобы он смог удержать воду, налитую внутрь него до высоты  $H$ ? Всюду вне колпака давление атмосферное.

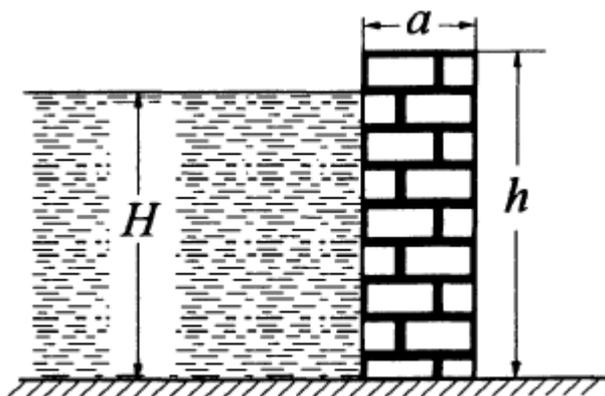


5. В прямоугольном канале в вертикальном положении установлен щит, который разделяет разные уровни воды  $H_1$  и  $H_2$ . Щит может свободно вращаться относительно шарнира в точке  $O$ . Со стороны меньшего уровня



установлен упор. На каком наименьшем расстоянии  $H$  от дна следует поместить шарнир, чтобы при превышении уровня  $H_2$  щит открывался, а при понижении был закрыт?

6. Прямоугольный канал перегороден незакрепленной бетонной плитой, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда. Каким условиям должны удовлетворять толщина  $a$  и высота  $h$  плиты, чтобы она находилась в равновесии, если уровень подпираемой



жидкости равен  $H$ ? На плоскости безразмерных переменных  $a/H$ ,  $h/H$  область равновесия плиты изобразить графически, считая, что плотность бетона  $\rho_6 = 3 \text{ г/см}^3$ , а коэффициент трения плиты о дно  $k = 0.2$ . Жидкость однородна, ее плотность  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ .

7. Однородная жидкость покоится в однородном поле силы тяжести. Тело произвольной формы полностью погружено в жидкость и окружено ею со всех сторон.

а) Вывести формулу для силы, действующей на тело со стороны жидкости – закон Архимеда.

б) Показать, что линия действия этой силы проходит через геометрический центр  $C$  объема  $V$  тела:

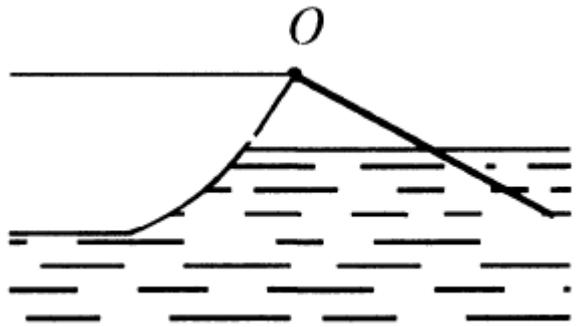
$$r_C = V^{-1} \int_V r dV.$$

в) Написать выражение для силы Архимеда, действующей на тело в неоднородной жидкости.

г) При каком условии возможно равновесие неоднородного тела, погруженного в однородную жидкость?

д) Какая сила действует на тело, частично погруженное в жидкость?

8. Тонкая палочка одним концом прикреплена к стенке сосуда, а другим погружена в воду. Палочка может вращаться относительно горизонтальной оси шарнира  $O$ , находящегося над уровнем жидкости. Найти плотность  $\rho$  материала



палочки, если при равновесии в воду погружена ее половина. Вычислить отношение силы реакции  $R$  в шарнире  $O$  к весу палочки  $P$ .

9. Тяжелая жидкость покоится относительно движущейся открытой цистерны. Найти угол наклона  $\alpha$  свободной поверхности к горизонту, если цистерна

а) движется в горизонтальной плоскости с постоянным ускорением  $a$ ;

б) соскальзывает с плоскости, наклоненной под углом  $\theta$  к горизонту.

Коэффициент трения  $k$  известен. В каком случае поверхность жидкости будет горизонтальной?

10. Тяжелая однородная жидкость, налитая в вертикальный цилиндрический круговой сосуд радиуса  $a$  (стакан), вращается вокруг оси цилиндра как твердое тело с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ .

а) определить давление в каждой точке жидкости и форму ее свободной поверхности, если известно, что в состоянии покоя жидкость имела уровень  $H$  от дна сосуда на поверхности жидкости давление равно атмосферному.

б) Вычислить силу  $P$ , действующую на дно сосуда.

в) Сформулировать аналог закона Архимеда для этого случая.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.4. УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ИНТЕГРАЛ КОШИ-ЛАГРАНЖА**

Установившиеся течения – это такие течения, в которых характеристики не меняются со временем. Математически это выражается в том, что частные

производные по времени равны нулю,  $\partial\theta/\partial t=0$ , где  $\theta$  – разные гидродинамические величины (скорость, давление и т.д.).

Жидкость называется идеальной, если ее вязкость настолько мала, что соответствующие напряжения в уравнениях движения можно не учитывать.

Для установившегося течения  $\partial\vec{v}/\partial t=0$ . Для идеальной жидкости  $\nu \Delta\vec{v}=0$ , т.к. вязкие напряжения в идеальной жидкости отсутствуют. Выделим в жидкости линию тока  $\ell$ . Вектор скорости направлен по касательной к этой линии.

Запишем уравнение Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + P - G = i(\ell)$$

Здесь  $i$  – постоянная Бернулли. В общем случае эта постоянная интегрирования зависит от выбранной линии  $\ell$ .

Физический смысл уравнения Бернулли легко уяснить, если умножить его на массу  $m$  жидкой частицы, движущейся вдоль линии тока. Член  $mv^2/2$  определяет кинетическую энергию движущейся частицы,  $mp/\rho$  определяет потенциальную энергию внутреннего напряжения (давления) жидкости, а  $mU$  связан с потенциальной энергией положения частицы в пространстве. Следовательно, интеграл Бернулли выражает закон сохранения энергии жидкой частицы при ее установившемся движении по линии тока. При переходе к другой линии тока энергия изменяется (поскольку постоянная  $C$  будет иной). Если массовой силой является сила тяжести, то можно получить

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = C_1,$$

где постоянная  $C_1$  сохраняет свое значение вдоль линии тока. Слагаемые левой части называются:  $\rho v^2/2$  – скоростной напор;  $p$  – пьезометрическое давление;  $\rho g z$  – гидростатическое давление. Сумма этих давлений называется гидродинамическим напором. Таким образом, при установившемся движении вдоль линии тока гидродинамический напор не меняется.

## Вопросы для теоретической подготовки

1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной и реальной жидкости.
2. Физический смысл уравнения Бернулли. Его геометрическая интерпретация. Гидравлический уклон.
3. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.
4. Применение уравнения Бернулли при решении технических задач по определению расхода жидкости (расходомер Вентури).
5. Применение уравнения Бернулли при решении технических задач по определению скорости течения (трубка Пито).
6. Применение уравнения Бернулли при решении технических задач по определению мощности насосной установки.

## Демонстрационные примеры

### Пример 1

Жидкость с уравнением состояния  $p = \alpha \rho^k$  вытекает из большого закрытого резервуара через гладкую тонкую трубку; течение баротропное. Давление в резервуаре равно  $N$  атмосферам. Определить скорость истечения газа, считая давление в струе на выходе из резервуара равным атмосферному.

### Решение

Применим интеграл Бернулли к установившемуся течению в двух точках:  $A$  - в жидкости, покоящейся внутри резервуара, и  $B$  - на свободной поверхности вытекающей струи. Уравнение дает  $\Omega_A + P_A + 1/2 v_A^2 = \Omega_B + P_B + \frac{1}{2 v_B^2}$ . Но  $U_A = 0$ , и если пренебречь силой тяжести, то это уравнение примет вид

$$\frac{k}{k-1} \left( \frac{P_A}{\rho_A} - \frac{P_B}{\rho_B} \right) = 1/2 v_B^2 \quad \text{или} \quad v_B^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{P_B}{\rho_B} \left( N \frac{\rho_B}{\rho_A} - 1 \right).$$

Так как  $\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{P_B}{P_A}^{-1/k} = N^{-1/k}$ , то окончательно  $v_B^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{P_B}{\rho_B} \left( N^{(k-1)/k} - 1 \right)$

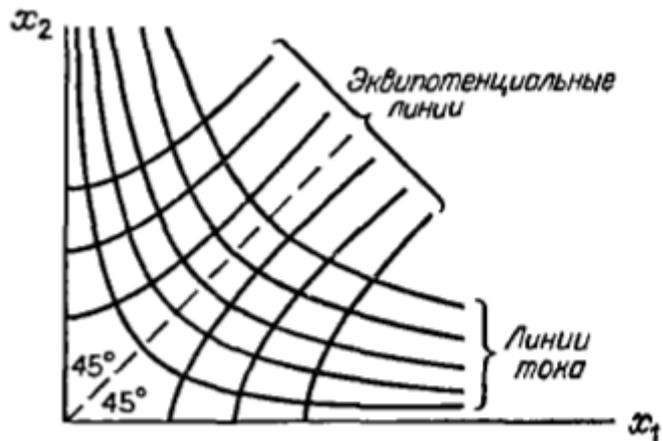
## Пример 2

Проверить, что функция  $\varphi = A(x_1^2 - x_2^2)$  может служить потенциалом скорости несжимаемой жидкости, и описать заданное ею течение.

### Решение

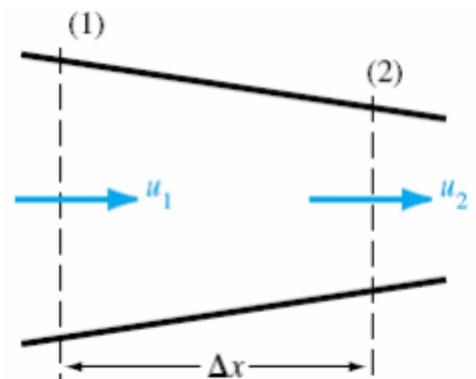
Данная функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению ( $\Delta\varphi = c^2\varphi_{ii}$ ) тождественно, так как  $2A - 2A = 0$ . Компоненты скорости определяются формулами ( $v_\alpha = -\varphi_\alpha$ ):  $v_1 = -2Ax_1$ ,  $v_2 = 2Ax_2$ . Линии тока получаются интегрированием уравнения

$dx_1/x_1 = -dx_2/x_2$  и представляют собой гиперболы  $x_1x_2 = C$  с взаимно перпендикулярными асимптотами. Эквипотенциальные линии  $A(x_1^2 - x_2^2) = C_1$  образуют семейство таких же гипербол, ортогональных линиям тока. Наконец, из ( $\varphi_1 = \psi_2$ ) найдем функцию тока  $\psi = -2Ax_1^2x_2^2 + C_0$ , которая оказывается постоянной вдоль линий тока.



## Задания для самостоятельного решения

1. Жидкость протекает между двумя плоскостями. Датчик скорости в сечении (1) показывает значение  $u_1 = 1$  м/с, датчик в сечении (2) показывает значение скорости  $u_2 = 3$  м/с.



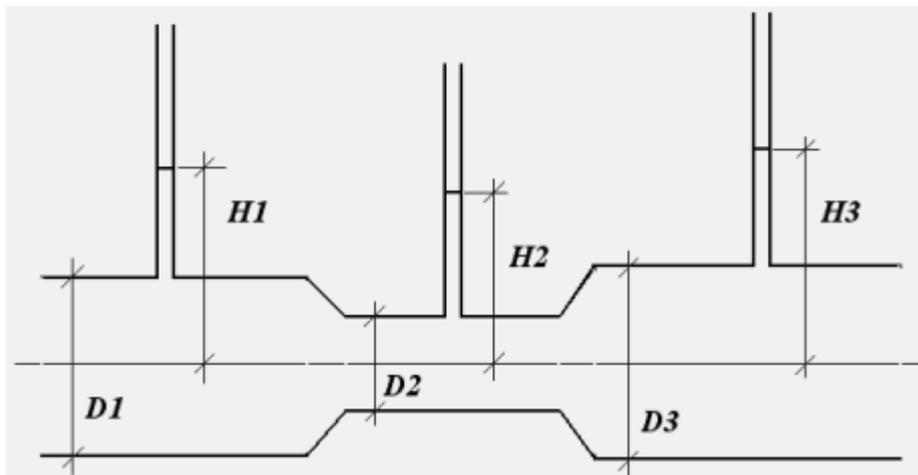
1. оценить среднюю величину ускорения на участке  $dx$ , если  $dx = 10$  см;

2. предполагая жидкость несжимаемой, определить расстояние между поверхностями в сечении (1), если в сечении (2) это расстояние составляет 5 см.

2. Вода бьет струей из фонтана на высоту 8 м. Фонтан имеет форму усеченного конуса (малое выходное сечение диаметром 10 мм, большее (входное) сечение диаметром 50 мм. Определить расход воды и давление у нижнего

основания конуса.

3. По горизонтальной трубе переменного сечения протекает жидкость плотностью  $950 \text{ кг/м}^3$  и расходом  $10 \text{ л/с}$ . Определить



пьезометрические высоты  $H = p/\rho g$  в сечениях 1-2-3, если  $d_1 = d_2 = 100 \text{ мм}$ ,  $d_3 = 25 \text{ мм}$ ,  $p_1 = 0.3 \text{ МПа}$ . Трением пренебречь.

4. Определить форму осесимметричного сосуда, уровень жидкости в котором при ее истечении из дна опускается равномерно (водяные часы – клепсиндры).

5. Жидкость с плотностью  $\rho$  вращается как твердое тело в вертикальном цилиндрическом круговом сосуде с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси цилиндра. В состоянии покоя жидкость имеет уровень  $h$  от дна сосуда и на свободной поверхности давление равно нулю. Радиус основания равен  $R$ .

а) Вывести уравнение свободной поверхности вращающейся жидкости

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \omega^2 x, \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \omega^2 y, \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \right).$$

б) Определить расстояние  $z_0$  вдоль центральной оси сосуда от его дна до поверхности жидкости.

в) С какой угловой скоростью надо вращать жидкость, чтобы обнажился центр дна сосуда?

г) Найти давление на дно сосуда.

6. Получить аналог интеграла Бернулли для плоского стационарного течения с постоянной завихренностью  $\omega$  при отсутствии массовых сил.

7. Каждая частица идеальной несжимаемой жидкости вращается около фиксированной оси с угловой скоростью  $\omega = a/r_n$ , где  $r$  - расстояние от оси,

$\mathbf{a}$  - постоянная. Показать, что движение будет безвихревым только в случае  $n = -2$ .

8. Вывести уравнения газовой динамики  $((c^2 \delta_{ij} - v_i v_j) v_{j,i} = 0)$  и записать эти уравнения через потенциал скорости  $\varphi$ .

9. Доказать, что функция  $\varphi = A(-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Найти компоненты скорости и описать движение.

10. Дан потенциал скорости  $\varphi = Ax_1 + Bx_1/r^2$ , где  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Найти функцию тока  $\psi$  для этого течения.

11. Дифференцированием комплексного потенциала  $\Phi(z) = A/z$  получить компоненты скорости.

12. Потенциал скорости  $\Phi(z) = \varphi + i\psi$  является аналитической функцией комплексного переменного  $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$ . Показать, что в полярных координатах  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  и  $\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

13. Задано распределение скоростей для течения жидкости:  $u = 4ax$ ,  $v=0$ ,  $w = 4az$ . Определить потенциал скоростей. Определить распределение давления, принимая жидкость идеальной с удельным весом  $\gamma$ .

14. Дано поле скоростей плоского установившегося потока жидкости

$$u = \frac{2x}{\sqrt{r}}, \quad v = \frac{2y}{\sqrt{r}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найти: 1) потенциал скорости, 2) уравнение эквипотенциалей, 3)  $\text{div } \vec{V}$ .

15. Доказать, что если циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру постоянна, то поле ускорений потенциально.

16. Показать, что при малых колебаниях тела, погруженного в покоящуюся жидкость, течение будет потенциальным.

17. Определить функцию тока, если потенциал скорости  $\varphi = a(x^2 - y^2)$ , где  $a = \text{const} > 0$ . Описать течение жидкости.

18. Доказать, что функция тока

$$\psi = \left( \frac{A}{r^2} \cos\theta + Br^2 \right) \sin^2\theta, \quad (A, B = \text{const}),$$
 записанная в сферической

системе координат, определяет некоторое потенциальное осесимметричное течение. Найти соответствующий потенциал скорости  $\varphi$ .

## РАЗДЕЛ 2. ПОНЯТИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Характерными режимами течения вязкой жидкости являются ламинарное и турбулентное. Их можно легко наблюдать, открывая водопроводный кран. Ламинарным называется плавное, упорядоченное, регулярное движение, когда отдельные струйки жидкости, не перемешиваясь, как бы скользят друг по другу. При таком потоке существует лишь молекулярное трение между соседними струйками. Ламинарные течения достаточно точно описываются уравнениями Навье-Стокса. Как показывает опыт, ламинарное движение возможно при сравнительно невысоких числах Рейнольдса.

С ростом  $Re$  в некоторый момент происходит потеря устойчивости движения, струйки перемешиваются, в потоке образуются хаотически пульсирующие вихри. Такое неупорядоченное движение вязкой жидкости называется турбулентным. При турбулентном режиме обычно резко растёт сопротивление потока жидкости.

Число Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное, называют критическим и обозначают  $Re_{кр}$ . Критическое число Рейнольдса для трубы ( $Re_{тр} = Dv/\nu$ , где  $D$  – диаметр трубы) находится в диапазоне от 2000 до 3000. Поток воды вокруг водоизмещающего судна из ламинарного переходит в турбулентный при числе Рейнольдса  $Re = Lv/\nu$  порядка  $10^6$  ( $L$  – длина судна). Ламинарное движение жидкости может быть как установившимся, так и не установившимся. Турбулентное движение по своей природе всегда не установившееся. Большинство течений в задачах гидродинамики судов и водных сооружений являются турбулентными.

Многочисленные наблюдения за скоростью жидкости показали, что при внешнем обтекании тел и внутренних течениях в трубах и каналах вязкость жидкости оказывает влияние на поток только вблизи границы раздела между жидкостью и поверхностью тела. Таким образом, поток условно делится на две зоны: вязкое течение в пограничном слое и потенциальное течение в основном потоке за границей этого слоя. Это используется для расчета обтекания тел по следующим причинам.

1) Потенциальное течение описывается простыми уравнениями типа интегралов Коши – Лагранжа или Бернулли.

2) Внутри пограничного слоя уравнение Навье – Стокса значительно упрощаются, поскольку сам этот слой при больших числах Рейнольдса очень тонкий, так что градиенты гидродинамических характеристик поперек слоя намного больше, чем в продольном.

Отмеченные особенности течения находят свое отражение в специальных упрощенных уравнениях, предназначенных для моделирования течений данного класса.

При больших относительных скоростях потока вокруг твердой поверхности или тела влияние вязкости существенно проявляется лишь в относительно тонком слое жидкости вблизи поверхности, который называют пограничным слоем. По толщине пограничного слоя существует значительный перепад скорости обтекания поверхности, а следовательно, большие касательные напряжения. Вне этого слоя влияние вязкости настолько мало, что им можно пренебречь и считать жидкость невязкой, рассчитывая ее характеристики более простыми методами динамики идеальной жидкости. Внутри же пограничного слоя, благодаря его тонкости, можно оценить и отбросить некоторые члены уравнений Навье-Стокса, что существенно облегчает их интегрирование. Концепция пограничного слоя лежит в основе почти всех современных методов расчета сопротивления воды движению тел.

В пограничном слое движение жидкости может быть как ламинарным, так и турбулентным. На характер течения жидкости и пограничного слоя (ламинарный

или турбулентный) определяющее влияние оказывает не только число Рейнольдса, но и изменение давления вдоль потока, зависящее, в свою очередь, от формы обтекаемой поверхности. Так, при течении в сужающейся трубе критическое число Рейнольдса повышается, а в расширяющейся трубе - существенно уменьшается. При обтекании выпуклой поверхности на её передней и задней кромках давление повышенное, а в средней части – пониженное. В результате вблизи стенки жидкость стремится из областей с повышенным давлением к средней части: в носовой части поток ускоряется, а в корме замедляется.

Если в корме имеется существенная кривизна или слом, то в результате большого продольного градиента давления возникает пристеночное течение, противоположное основному потоку. Оно неизбежно вызывает вращение жидкости и появление крупных вихрей, срывающихся с поверхности в виде вихревого следа.

При обтекании тел потоком вязкой жидкости происходит ее торможение на твердых стенках (прилипание), и благодаря вязкости это торможение, ослабевая, распространяется от стенки вглубь потока на некоторое расстояние  $\delta$ , за пределами которого жидкость движется без значительных деформаций, и вязкие силы там не играют существенной роли. Таким образом, эффект вязкости проявляется в сравнительно тонком слое, который называется пограничным слоем.

### **Вопросы для теоретической подготовки**

1. Два режима движения жидкости. Опыты и число Рейнольдса. Критическое значение числа Рейнольдса.
2. Теория ламинарного движения жидкости в трубах. Распределение касательных напряжений при установившемся течении жидкости в круглой трубе.
3. Теория ламинарного движения жидкости в трубах. Распределение скоростей по сечению трубы при ламинарном режиме.

4. Теория ламинарного движения жидкости в трубах. Определение потерь напора при ламинарном режиме.

5. Механизм и структура турбулентного потока.

6. Распределение осредненных скоростей в потоке при турбулентном движении жидкости. Профиль скорости при турбулентном режиме движения.

7. Три зоны турбулентного движения. Опыты по определению гидравлических потерь.

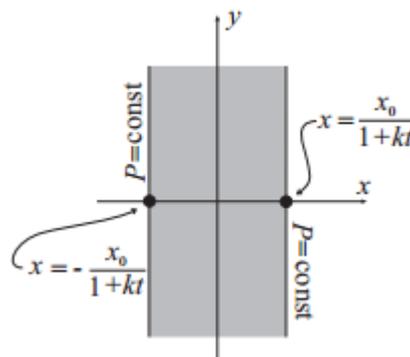
### Демонстрационные примеры

#### Пример 1

В начальный момент времени  $t = 0$  невесомая жидкость занимает полосу  $-x_0 < x < x_0$ . Известно начальное поле скоростей

$$u|_{t=0} = -kx, v|_{t=0} = ky, w|_{t=0} = 0, \text{ где } k = \text{const} > 0.$$

Необходимо найти поле скоростей и форму границ в последующие моменты времени  $t > 0$ , если известно, что границы жидкости являются свободными поверхностями, на которых поддерживается постоянное давление.



#### Решение

В начальный момент движение плоское с линейным полем скоростей. Предположим, что оно остается таковым и в последующие моменты времени, т.е. будем искать решение в виде:

$$u = -kxf(t), v = kyf(t), w = 0. \quad (1)$$

При  $t = 0$  свободные поверхности являются плоскостями  $x = \pm x_0$ , на которых нормальная составляющая вектора скорости всюду одинакова. Поэтому естественно предположить (по крайней мере для начальных моментов времени), что свободная поверхность остается плоскостью и при  $t > 0$ . Иначе говоря, ищем уравнение свободных поверхностей в виде:

$$x = \pm x_0 \cdot g(t) \quad (2)$$

Покажем, что можно подобрать такие функции  $f(t)$ ,  $g(t)$ , при которых будет выполнены как начальные условия

$$f(0) = 1, g(0) = 1, \quad (3)$$

так и граничные условия. Проверять выполнение уравнений движения не следует. Поскольку решение (1) - потенциально, то этим самым уравнения движения выполнены автоматически. На свободной поверхности имеется два граничных условия. Кинематическое условие, утверждает, что скорость движения границы по нормали к самой себе равна нормальной составляющей скорости частицы жидкости, расположенной на границе:

$$\pm x_0 \dot{g} = -kx \cdot f \text{ при } x = \pm x_0 g$$

Это уравнение дает дифференциальную связь между  $f(t)$  и  $g(t)$ :

$$\dot{g} + kg \cdot f = 0 \quad (4)$$

Из динамического условия  $p = const$  следует, что градиент давления  $\nabla p$  ортогонален свободной поверхности. Поэтому из уравнения Эйлера (без учета массовых сил)  $\frac{dv_i}{dt} = \nabla p / \rho$  следует, что вектор ускорения  $\frac{dv_i}{dt}$  для частиц жидкости, расположенных на свободной поверхности, ортогонален самой свободной поверхности. Покажем, что динамическое условие в такой форме может быть удовлетворено. Из (1) следует, что  $y$ -вая составляющая вектора ускорения равна

$$\frac{dv}{dt} = -ky\dot{f} - kf \cdot (kyf) = -ky\dot{f} - k^2 y f^2.$$

Она должна быть равна нулю на свободной поверхности, поскольку только в этом случае вектор ускорения ортогонален плоскости (2). Это дает дифференциальное уравнение:

$$\dot{f} + kf^2 = 0.$$

Решая его с учетом (3), получим  $f(t) = 1/(1 + kt)$ . Далее решая (4), находим  $g(t) = 1/(1 + kt)$ .

## Пример 2

Оценить поток тепла в нагреваемой снизу жидкости в режиме сильно турбулентной конвекции, когда число  $R$  значительно превышает пороговое значение  $R_{кр}$ .

### Решение

В режиме турбулентной конвекции перенос тепла в основном объеме жидкости обеспечивается за счет ее движения (конвективный поток тепла), а диффузия тепла (теплопроводность) играет роль только вблизи ограничивающих жидкость

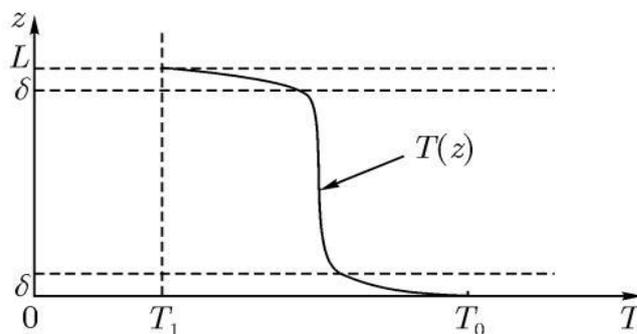


Рис. 1 Профиль температуры при турбулентной конвекции

плоскостей  $z = 0, L$ . Поэтому усредненный по турбулентным пульсациям профиль температуры жидкости  $T(z)$  имеет вид, качественно изображенный на рис. 1.

Температура жидкости почти однородна во всем объеме, а скачок температуры  $\Delta T = T_0 - T_1$  происходит в тонких пристеночных слоях толщиной  $\delta \ll L$ , где теплопроводность играет доминирующую роль. При этом величина  $\delta$  устанавливается такой, чтобы пристеночный слой оставался на пороге возникновения конвекции, так что соответствующее число Рэлея

$$R_\delta \sim \alpha g \delta^3 (T_0 - T_1) / \nu \chi \sim R_{кр}.$$

Поскольку число Рэлея для всего объема жидкости есть  $R = \alpha g L^3 (T_0 - T_1) / \nu \chi$ , отсюда следует, что:

$$\delta \sim L (R_{кр} / R)^{1/3}.$$

Искомый поток тепла можно теперь оценить следующим образом. Вблизи граничных плоскостей этот поток определяется теплопроводностью жидкости, следовательно

$$q = \kappa \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0} \sim \kappa \frac{(T_0 - T_1)}{\delta} \sim \kappa \frac{(T_0 - T_1)}{L} (R_{кр} / R)^{1/3}.$$

Так как поток тепла в неподвижной жидкости (в отсутствие конвекции) был бы, очевидно, равен  $\kappa \frac{(T_0 - T_1)}{L}$ , то развитие конвекции приводит к усилению теплопередачи в  $(R_{кр}/R)^{1/3}$  раз.

### Задания для самостоятельного решения

1. Записать уравнения плоского пограничного слоя для установившегося потенциального течения, выразив компоненты скорости через функцию тока.

2. Записать уравнения пограничного слоя, полученные в задаче 1, и граничные условия для случая пристенного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке, считая профиль скоростей набегающего на пластинку потока невозмущенным. Предполагать, что ось  $OX$  направлена вдоль поверхности пластинки, ось  $OY$  по перпендикуляру к поверхности, а начало координат выбрать в передней кромке пластинки (задача Блазиуса).

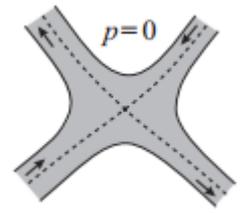
3. Из жидкости плотности  $\rho$ , заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиусом  $a$ . Определить время в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью. На бесконечности поддерживается постоянное давление, внутри полости давление равно нулю.

4. Описать плоское радиальное движение по инерции расходящегося концентрического кольца со свободными границами. Найти асимптотику толщины кольца  $d$  при  $t \rightarrow \infty$ .

5. Найти форму свободной поверхности тяжелой покоящейся капиллярной жидкости, соприкасающейся с твердой вертикальной плоскостью, если вдали от плоскости свободная поверхность горизонтальна. Известны: краевой угол  $\theta$ , образуемый свободной поверхностью жидкости и плоскостью в точке соприкосновения; коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ ; плотность жидкости  $\rho$ ; ускорение свободного падения  $g$ .

Указание. Ось  $y$  декартовой системы координат направить вертикально вверх. Начало координат следует поместить на плоскости и выбрать его таким образом, чтобы при  $x \rightarrow \infty$  выполнялась асимптотика  $y \rightarrow 0$

6. Рассматривается плоская стационарная задача о соударении с единичной скоростью двух струй идеальной несжимаемой жидкости. Пусть  $h_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ) - толщина  $j$ -ой струи, взятая с положительным знаком, если струи набегающие



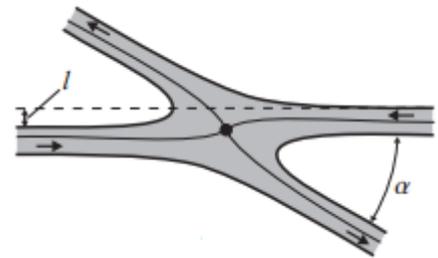
( $j=1,3$ ), и с отрицательным, если струи расходящиеся ( $j=2,4$ ). Пусть  $a_j$  ( $|a_j| = 1, j = \overline{1,4}$ )- это комплексная скорость  $\vec{v}$  в бесконечно удаленных точках жидкости  $z \rightarrow \infty$ . Доказать что конформное отображение единичного круга  $|\epsilon| < 1$ , расположенного во вспомогательной плоскости  $\epsilon$ , на область, занимаемую жидкость в физической плоскости  $z$ , а также комплексная скорость даются формулами  $z = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} \ln(1 - \frac{\epsilon}{a_j}), \vec{v} = \epsilon$ .

7. Доказать, что в предыдущей задаче выполнены следующие законы сохранения массы и импульса:

$$\sum_{j=1}^4 h_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 h_j a_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{a_j} = 0.$$

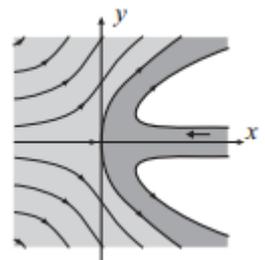
8. В задаче 6 найти комплексный потенциал  $w$ .

9. Рассматривая встречное лобовое столкновение двух струй одинаковой единичной толщины, сдвинутых на расстояние  $l$ . Расходящиеся струи наклонены под углом  $\alpha$  к соударяющимся струям. Найти зависимость  $l(\alpha)$ .



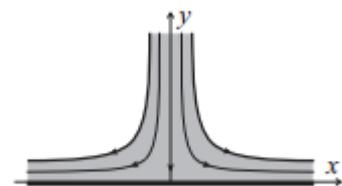
Указание. Воспользоваться решением задачи 6.

10. Струя единичной ширины сталкивается с потоком бесконечной ширины. Определить форму свободной поверхности.



Указание. Воспользоваться решением задачи 6.

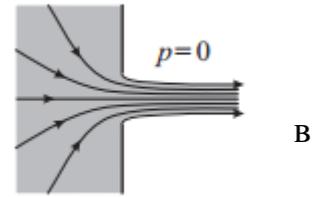
11. Струя единичной ширины ударяется перпендикулярно о плоскость с единичной скоростью. Найти уравнение свободной поверхности.



12. В предыдущей задаче доказать, что любая частица жидкости,

расположенная на линии симметрии  $x = 0$  никогда не достигнет плоскости.

13. Плоская струя невесомой жидкости плотности  $\rho$ , вытекает из отверстия шириной  $2a$  в плоской непроницаемой стенке  $x = 0, -a \leq y \leq a$ . На бесконечности жидкости задано давление  $p_0$ . Найти форму границ струи, если известно, что они являются свободными поверхностями, на которых поддерживается нулевое давление.



Указание. За начало координат взять край отверстия.

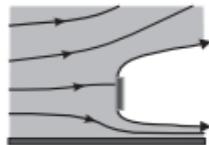
14. В предыдущей задаче ширина отверстия равна  $\pi + 2$ . Найти зависимость скорости на срединной линии струи  $u$  от расстояния до плоскости  $x$ .

15. Изобразить область, которую занимает жидкость в плоскости комплексного потенциала и в плоскости годографа для следующих течений

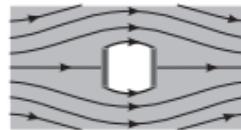
а) обтекание по схеме Кирхгоффа пластины, расположенной вблизи стенки;

б) обтекание по

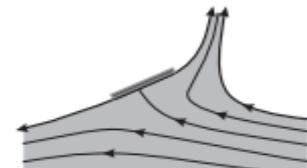
схеме Рябушинского двух пластинок. Концы пластинок



а)



б)

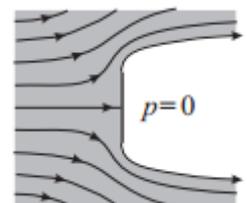


в)

соединены свободной поверхностью (рассмотреть одну четверть течения);

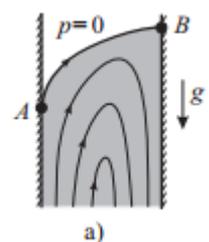
в) глиссирование пластины по поверхности потока.

16. Поток жидкости, имеющий скорость  $U$ , встречает неподвижную пластину шириной  $l$ , расположенную под прямым углом к потоку, и обтекает ее по схеме Кирхгоффа. Найти силу  $F$ , с которой жидкость давит на пластину.



17. Насадок Борда шириной  $a$  симметрично установлен в бесконечно длинный сосуд шириной  $5a$ . доказать, что коэффициент сжатия струи, вытекающей через насадок, равен  $5 - 2\sqrt{5}$ .

18. Течение Ричардсона описывает стационарное несимметричное течение тяжелой жидкости между двумя вертикальными стенками, ограниченное сверху свободой

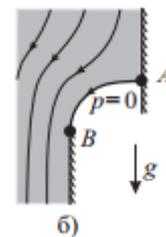


поверхностью (рис. а). В точке А свободная поверхность вертикальна, а в точке В - горизонтальна. Без ограничения общности можно считать, что ускорение свободного падения равно единице, а значение потенциала скорости в точках А и В равно соответственно -1 и 1. Пусть функция тока на свободной поверхности равна нулю, тогда в плоскости комплексного потенциала  $w$  жидкости соответствует нижняя полуплоскость. Если использовать преобразование Жуковского  $w = 1/2(\epsilon + 1/\epsilon)$ , то во вспомогательной плоскости  $\epsilon$  жидкости будет соответствовать верхняя половина единичной окружности:  $|\epsilon| < 1, Im\epsilon > 0$ . Доказать, что течение Ричардсона дается формулой

$$z = i2^{-\frac{2}{3}}(\epsilon - 1 + Im\epsilon).$$

19. В обозначениях предыдущей задачи показать, что решение, даваемое формулой

$$z = i2^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{\epsilon} - Im\epsilon - 1 + i\pi\right).$$



Описывает течение Жуковского, которое изображено на (рис. б). Кривая АВ - это свободная поверхность. Доказать, что формы свободной поверхности в течении Ричардсона и в течении Жуковского в точности одинаковы.

20. Найти связь между конвективным потоком тепла (направленным от нижней плоскости к верхней) и кинетической энергией движения жидкости при слабой надкритичности для конвективных ячеек квадратной формы.

21. Какой должна быть скорость и кинематическая вязкость жидкости при моделировании движения судна при условии, что длина модели в 100 раз меньше длины судна. В качестве критериев подобия использовать постоянство чисел Рейнольдса  $Re = \frac{V}{L \eta}$  и Фруда  $Fr = \frac{V^2}{gL}$ .

22. Конденсатор паровой турбины состоит из 250 трубок для потока охлаждающей воды. Определить максимально допустимый диаметр трубок, обеспечивающий турбулентный режим течения при общем объемном расходе воды через все трубки  $Q = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Коэффициент кинематической вязкости принять равным  $1 \text{ мм}^2/\text{с}$ . Предполагается, что устойчивый турбулентный режим

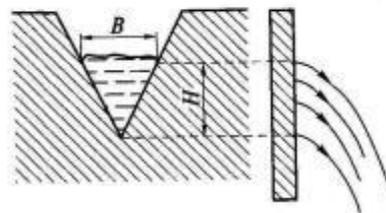
течения воды в трубках удерживается при  $Re > 10^4$ , то есть при числах Рейнольдса, превышающих критическое значение.

23. Оценить порядок величины  $u_T$  изменения скорости данного перемещающегося в пространстве элемента турбулентной жидкости в течение промежутка времени  $\tau$ , малого по сравнению с характерным временем  $T_L \sim L/u$  движения в целом.

24. Найти закон изменения во времени расстояния между двумя близкими элементами жидкости при ее турбулентном движении.

25. В трубе с радиусом  $a$  и длиной  $L$  стационарное течение несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\eta$  создается перепадом давлений на концах трубы  $\Delta p$ . Найти расход жидкости в трубе при малых  $\Delta p$ , когда течение ламинарно и при большом перепаде давлений (в режиме сильного турбулентного течения).

26. Жидкость истекает через треугольный водослив (рисунок). Напор перед стенкой водослива  $H$  - постоянный. Составить критериальное выражение расхода жидкости  $V_t$  через водослив в трех случаях: а) поток турбулентный, влияние вязкости пренебрежимо мало, форма водослива  $B/H$  задана; б) поток турбулентный, величина  $B/H$  - варьируется; в) влияние вязкости существенно, величина  $B/H$  - варьируется.



## ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ

### РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ, ЭНЕРГИИ, ДИФФУЗИИ

1. Основные понятия гидродинамики. Расход жидкости и средняя скорость потока.
2. Типы жидкостей (классификация). Идеальная и вязкая жидкости; понятие о неньютоновской жидкости.
3. Методы гидромеханики.
4. Дифференциальное уравнение Эйлера (идеальная жидкость).
5. Уравнения неразрывности или закон сохранения массы.
6. Закон сохранения массы для струйки тока.
7. Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости
8. Уравнение теплопроводности (конвективного переноса), начальные и граничные условия.
9. Простейшие аналитические решения краевых задач гидродинамики и теплообмена
10. Завихренность
11. Уравнения движения в форме Громеки-Ламба
12. Уравнения движения в форме переноса завихренности
13. Краевые задачи для уравнений в преобразованных переменных
14. Установившееся квазистационарное движение
15. Гидростатика
16. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной и реальной жидкости.
17. Физический смысл уравнения Бернулли. Его геометрическая интерпретация. Гидравлический уклон.
18. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.
19. Применение уравнения Бернулли при решении технических задач по определению расхода жидкости (расходомер Вентури).

20. Применение уравнения Бернулли при решении технических задач по определению скорости течения (трубка Пито).

21. Применение уравнения Бернулли при решении технических задач по определению мощности насосной установки.

22. Движение шара в идеальной жидкости

23. Обращение движения в задачах обтекания тел

## РАЗДЕЛ 2. ПОНЯТИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

24. Турбулентность

25. Уравнения движение турбулентного потока

26. Гипотеза Бусинеска

27. Турбулентное течение сжимаемой жидкости

## РАЗДЕЛ 3. ПОЛУЧЕНИЕ НОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗ КОМБИНАЦИЙ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДВИЖЕНИЯ И ЭНЕРГИИ

28. Уравнение Лайтхилла

29. Трансформация уравнения Навье-Стокса

30. Уравнения переноса тензора напряжений Рейнольдса

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература

1. Павловский, В. А. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы : учебное пособие / В. А. Павловский, Д. В. Никущенко. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018. — 368 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-8114-2924-0. — Текст : электронный // ЭБС Лань [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/103064/#2> (дата обращения: 04.01.2020).

### Дополнительная литература

1. Вольмир, А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости : учебное пособие для вузов / А. С. Вольмир. — 2-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 326 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06871-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/454267> (дата обращения: 04.01.2020).

2. Тихоненков, Б. П. Гидравлика и гидроприводы : учебное пособие / Б. П. Тихоненков. - Москва : МГАВТ, 2005. - 112 с. : 54 ил. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/400696> (дата обращения: 04.01.2020). – Режим доступа: по подписке.

3. Шиляев, М. И. Гидродинамика и тепломассообмен пленочных течений в полях массовых сил и их приложения: Монография. — М.: ИНФРА-М, 2019. - 198 с. — (Научная мысль). — DOI 10.12737/603 ([www.doi.org](http://www.doi.org)). - ISBN 978-5-16-009291-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1013435> (дата обращения: 04.01.2020). – Режим доступа: по подписке

4. Жуков, М. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии: монография / Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. - Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2008. - 256 с. ISBN 978-5-9275-0378-0. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/551185> (дата обращения: 04.01.2020). – Режим доступа: по подписке.