Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет» Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

В.Б. Гридчина

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Новокузнецк

2020

Гридчина В.Б.

Алгебра и геометрия: метод. указ. по выполнению домашней контрольной работы для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем / В.Б. Гридчина. - Новокузнецк ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020. – 21 с.

Методические материалы содержат указания по изучению дисциплины: основные теоретические сведения; варианты домашней контрольной работы; образец решения домашней контрольной работы; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения направлений 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Рекомендовано на заседании кафедры
математики, физики и математического
моделирования
Протокол № 5 от 10.12.2020
Заведующий каф. МФММ

__________ / Е.В. Решетникова

текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и направлены на оказание помощи студентам в выполнении домашней контрольной работы по дисциплине "Алгебра и геометрия".

Неотъемлемой частью математических моделей является геометрический компонент, задающий форму и расположение моделируемых объектов. Составление матриц перехода, решение систем алгебраических уравнений при построении математических моделей – все это базируется на аппарате алгебры геометрии. Поэтому изучение этой дисциплины дает возможность студентам освоить подходы к геометрическому моделированию сложных объектов.

Целью изучения курса «Алгебра и геометрия» является отработка навыков геометрического представления аналитических задач (и наоборот) с точки зрения приложений, а более того – как базу для дальнейшего изучения задач и представлений в линейных пространствах более сложного строения (унитарных, функциональных). Она является составной частью общей цели ОПОП – подготовить высококвалифицированных бакалавров для работы в отраслях народного хозяйства, научных и учебных заведениях соответствующего профиля.

Домашняя контрольная работа предназначена для проверки знаний студентов по разделам: "Векторная алгебра" и "Аналитическая геометрия в пространстве".

В методические рекомендации включены: основные теоретические сведения по разделам: "Векторная алгебра" и "Аналитическая геометрия в пространстве"; 20 вариантов домашней контрольной работы; образец ее решения; список основной и дополнительной литературы.

Данные методические материалы позволяют преподавателю качественно организовать работу на практических занятиях, а студенту подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам и успешно выполнить домашнюю контрольную работу.

1. Векторная алгебра

Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок, соединяющий точки А и В и обозначается $AB = \vec{a}$

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Нулевым называется вектор, начало и конец которого совпадают.

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейные операции над векторами

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который может быть найден по правилам треугольника или параллелограмма.

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

<u>Свойства линейных операций.</u>

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{\ }(x_A+x_B; y_A+y_B; z_A+z_B); \quad \alpha\cdot\vec{a}=(\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};$$

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

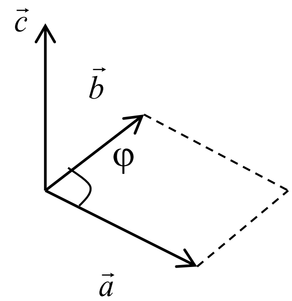
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хотя бы один из векторов равен нулю;

б) два вектора коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости.

Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ -вектор нормали к плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие- либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка M(x, y, z) лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ были компланарны. т.е. ($\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$) = 0

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку M(x, y, z) параллельно вектору $\vec{a}$.

Векторы $\begin{matrix} \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{matrix}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е. ($\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}$) = 0

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}$ (A, B, C) имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках на осях.

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на (-D)

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив $-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями координат.

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е. $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

Определим угол φ_1. Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \;||\; \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Уравнение прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z).

Обозначим радиус- векторы этих точек как $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\overrightarrow{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M}$ = $\vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итак, можно записать векторное уравнение прямой: $\vec{r}$ = $\overrightarrow{r_0}$ + $\vec{S}$t.

Векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Получим параметрические уравнения прямой.

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

<u>Общие уравнения прямой в пространстве.</u>

Уравнение прямой может быть задано как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2, C_2)$; $\vec{r}(x, y, z)$.

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден в результате векторного произведения векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые.

$$l_1:\quad \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2:\quad \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z);\quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1);\quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2);\quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1);\quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

<u>Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.</u>

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N}\cdot\vec{r} + D = 0$, а прямая $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}t$. Из геометрических соображений видно, что искомый угол α = 90^0 - φ, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{|\vec{N}||\vec{S}|}$$

В координатной форме: $\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

Условия параллельности и перпендикулярности

прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N}\perp\vec{S},\quad \vec{N}\cdot\vec{S} = 0,\quad \sin\varphi = 0,\qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N}\times\vec{S} = 0;\qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

3. Варианты домашней контрольной работы

Даны координаты вершин пирамиды **A_1, A_2, A_3, A_4** .

Найти:

1) угол между ребрами **A_1A_4** и **A_1A_3**;

2) площадь грани **$A_1A_2A_3$**;

3) объём пирамиды**$A_1A_2A_3A_4$**;

4)угол между гранями **A_1A_2 A_3** и **$A_1A_3A_4$**;

5) угол между ребром **A_1A_4** и гранью **A_1A_2 A_3**;

6)уравнение высоты, опущенной из вершины **A_4** на грань **$A_1A_2A_3$**.

7) длину высоты, опущенной из вершины **A_4** на грань **$A_1A_2A_3$**.

№ Варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(-2; 2; 0)	(-1; 4; 6)	(0; -3; 1)	(4; -5; 4)
2	(-1; 6; 5)	(2; 3; 1)	(-2; 7; 0)	(2; -3; 9)
3	(4; -4; 0)	(8; -2; 3)	(-1; 6; 2)	(6; 1; 2)
4	(-3; 2; 3)	(0; 1; -3)	(-2; 2; 1)	(0; -2; 5)
5	(2; -4; 0)	(-1; 3; 5)	(3; 0; -1)	(9; -3; 0)
6	(2; 2; -1)	(1; 4;- 6)	(0; 3; -1)	(4; 5; 4)
7	(1;- 6; 5)	(-2; 3; -1)	(2; 7; 0)	(-2; 3; 9)
8	(4; 4; 0)	(-8; -2; 3)	(-1; 6; -2)	(6; -1; 2)
9	(3; 2; -3)	(0; -1; 3)	(2; 2; -1)	(0; -2; -5)
10	(2; 4; 0)	(0; -2; 5)	(3; 0; 1)	(-9; 3; 0)
11	(2; 2; 0)	(9; -3; 0)	(0; -3; -1)	(4; 5; 4)
12	(-2; 2; 0)	(1; 5; 3)	(0; -3; 1)	(4; -5; 4)
13	(-1; 6; 5)	(-2; 3; 9)	(-2; 7; 0)	(2; -3; 9)
14	(4; -4; 0)	(6; -1; 2)	(-1; 6; 2)	(-3; 2; 3)
15	(-1; 6; 2)	(0; -2; -5)	(-2; 2; 1)	(2; -4; 0)
16	(-2; 2; 1)	(8; -2; 3)	(3; 0; -1)	(1; 5; 1)
17	(3; 0; -1)	(0; 1; -3)	(0; -3; 1)	(1;- 6; 5)

18	(0; 3; -1)	(-1; 4; 6)	(-2; 7; 0)	(4; 4; 0)
19	(2; 7; 0)	(8; -2; 3)	(-1; 6; 2)	(3; 2; -3)
20	(-3; 2; 3)	(0; 1; -3)	(-2; 2; 1)	(-5; 2; 4)

4. Образец решения варианта контрольной работы

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(10, 6, 6)$, $A_2(-2, 8, 2)$, $A_3(6, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

Найти:

1) угол между ребрами $\mathbf{A_1A_4}$ и $\mathbf{A_1A_3}$;

2) площадь грани $\mathbf{A_1A_2A_3}$;

3) объём пирамиды$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$;

4)угол между гранями $\mathbf{A_1A_2A_3}$ и $\mathbf{A_1A_3A_4}$;

5) угол между ребром $\mathbf{A_1A_4}$ и гранью $\mathbf{A_1A_2A_3}$;

6)уравнение высоты, опущенной из вершины $\mathbf{A_4}$ на грань $\mathbf{A_1A_2A_3}$.

7) длину высоты, опущенной из вершины $\mathbf{A_4}$ на грань $\mathbf{A_1A_2A_3}$.

Решение:

Вычислим координаты векторов.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{-2 - 10, 8 - 6, 2 - 6\} = \{-12, 2, -4\},$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{6 - 10, 8 - 6, 9 - 6\} = \{-4, 2, 3\},$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\} = \{7 - 10, 10 - 6, 3 - 6\} = \{-3, 4, -3\}.$$

1) Угол между ребрами $\mathbf{A_1A_4}$ и $\mathbf{A_1A_3}$ равен углу между векторами $\overline{A_1A_4}$ и $\overline{A_1A_3}$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} =$$
$$= \frac{-4\cdot(-3) + 2\cdot 4 + 3\cdot(-3)}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2}} =$$
$$= \frac{12 + 8 - 9}{\sqrt{16 + 4 + 9}\cdot\sqrt{9 + 16 + 9}} = \frac{11}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{34}} = \frac{11\sqrt{986}}{986}$$

2) Площадь грани $\mathbf{A_1A_2A_3}$ (площадь $\Delta A_1A_2A_3$) найдем с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ по формуле:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot (6+8) - j \cdot (-36-16) + k \cdot (-24+8) = 14i + 52j - 16k = \{14; 52; -16\}.$$

Вычислим его длину:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{14^2 + 52^2 + (-16)^2} = \sqrt{196 + 2704 + 256} = \sqrt{3156} = 2\sqrt{789}.$$

Тогда $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{789} = \sqrt{789}$ (кв. ед.).

3) Объём пирамиды найдем с помощью смешанного произведения векторов, выходящих из одной точки A_1 по формуле:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}) \cdot \overline{A_1A_4} \right|.$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{-12, 2, -4\}, \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = \{-4, 2, 3\}, \qquad \overrightarrow{A_1A_4} = \{-3, 4, -3\}.$$

$$(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}) \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-12) \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-4) \cdot 4 -$$

$$= (-4) \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) \cdot (-3) - (-12) \cdot 3 \cdot 4 = 72 - 18 + 64 - 24 - 24 + 144 = 214$$

Искомый объём пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\ 214\ | = \frac{107}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

4) Угол между гранями $\mathbf{A_1A_2\,A_3}$ и $\mathbf{A_1A_3A_4}$ найдем как угол между плоскостями $A_1A_2\,A_3$ *и* $A_1A_3A_4$

Запишем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

где $\overline{N} = (A,B,C) = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \{14;52;-16\}$, $A_1(x_1,y_1,z_1) = A_1(10,6,6)$.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид:

$14\cdot(x-10)+52\cdot(y-6)-16(z-6)=0$,

$7\cdot(x-10)+26\cdot(y-6)-8(z-6)=0$

$7x-70+26y-156-8z+48=0$

$7x+26y-8z-178=0$

Вектор нормали плоскости $A_1A_2A_3$ $\overline{N} = (A,B,C) = \{7;26;-8\}$

Аналогично найдем уравнение плоскости $A_1A_3A_4$ $9x+y+5z-126=0$

Вектор нормали плоскости $A_1A_3A_4$ $\overline{N} = (A,B,C) = \{9;1;5\}$

Косинус угла между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{63+26-40}{\sqrt{49+676+64}\cdot\sqrt{81+1+25}} = \frac{49}{\sqrt{84423}}.$$

5) Угол между ребром $\mathbf{A_1A_4}$ и гранью $\mathbf{A_1A_2A_3}$ - это угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

$$\sin\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|} = \frac{-20+104+24}{\sqrt{789}\cdot\sqrt{34}} = \frac{108}{\sqrt{26826}}$$

6) Чтобы найти уравнение высоты, опущенной из вершины $\mathbf{A_4}$ на грань $\mathbf{A_1A_2A_3}$, нужно записать уравнение прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$. Воспользуемся каноническими уравнениями прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Вектор нормали плоскости является направляющим вектором прямой.

Получим: $\dfrac{x-7}{7} = \dfrac{y-10}{26} = \dfrac{z-3}{-8}$

7) Длина высоты, проведенной из точки A_4, равна расстоянию от этой точки до плоскости $A_1A_2A_3$.

Расстояние от точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0$, вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{\left|\mathrm{Ax}_0 + \mathrm{By}_0 + \mathrm{Cz}_0 + \mathrm{D}\right|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}.$$

Тогда длина высоты пирамиды, проведенная из точки $\mathrm{A}_4(7; 10; 3)$ до плоскости $A_1A_2A_3$, заданной уравнением $7\mathrm{x} + 26\mathrm{y} - 8\mathrm{z} - 178 = 0$, равна

$$\mathrm{h} = \frac{\left|7 \cdot 7 + 26 \cdot 10 - 8 \cdot 3 - 178\right|}{\sqrt{7^2 + 26^2 + (-8)^2}} = \frac{\left|49 + 260 - 24 - 178\right|}{\sqrt{789}} = \frac{107}{\sqrt{789}} = \frac{107\sqrt{789}}{789}$$

5. Рекомендуемая литература

1. Рудык, Б.М. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебн. пособие / Б.М. Рудык – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2013. – 318 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=363158

2. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебн. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 592 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=494895

Дополнительная учебная литература

1. Шершнев, В.Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учебн. пособие / В.Г. Шершнев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2014. – 168 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=318084

2. Индивидуальные задания по высшей математике: [Электронный ресурс]: учебн. пособие. В 4 ч. Ч. 1 Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко – 7-е изд. - Электрон. текстовые дан. – Минск : Выш. шк., 2013. – 304 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=508859

3. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум [Электронный ресурс]: учебн. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев – Электрон. текстовые дан. – Москва : ИНФРА-М, 2015. – 352 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=476097

4. Бутузов В. Ф. Линейная алгебра в вопросах и ответах [Текст] : учебное пособие для вузов / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, А. А. Шишкин ; под ред. В. Ф. Бутузова. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 247 с.

5. Ильин В. А. Линейная алгебра [Текст] : учебник. - Издание 6-е, стреотипное. - Москва : Физматлит, 2005. - 280 с. - (Курс высшей математики

и математической физики ; вып. 4). - Гриф МО "Рекомендовано".

6. Линейная алгебра [Текст] : методические указания к практической и самостоятельной работам / Новокузнецкий филиал-институт ГОУ ВПО "КемГУ", Факультет информационных технологий, Кафедра математики и математического моделирования; сост. Ю. В. Шпакова. - Новокузнецк, 2010. - 27 с.

7. Канатников, А. Н. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов. - Москва : Академия, 2009. - 208 с. - (Университетский учебник). - Гриф МО "Рекомендовано"

8. Алгебра и геометрия : [Электронный ресурс]учеб. пособие : / Г.И. Шуман, О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная. – Электрон. текстовые дан.– М. : РИОР : ИНФРА-М, 2018. — (Высшее образование). – 160 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=908228