

Подписано электронной подписью:

Вержицкий Данил Григорьевич

Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»

Дата и время: 2024-02-21 00:00:00

471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра информатики и вычислительной техники им. В. К. Буторина

О. А. Штейнбрехер

Математическое и имитационное моделирование экономических процессов

*Методические указания по выполнению практических работ по
дисциплине для обучающихся по направлению подготовки 09.03.03
Прикладная информатика Профиль «Прикладная информатика в
экономике»*

Новокузнецк
2020

УДК [378.147.88:004.942](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+65.050я73

Ш88

Ш88 «Математическое и имитационное моделирование экономических процессов. Методические указания по выполнению практических работ» : метод. указ (текст. электрон. изд.)/ О.А. Штейнбрехер ; Новокузнец. ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2020. – 62 с.

Приводятся методические указания для выполнения практических работ по дисциплине «Математическое и имитационное моделирование экономических процессов»: приведены теоретические основы, практические задания, представлены критерии оценки.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения направлений 09.03.03 «Прикладная информатика».

Рекомендовано
на заседании кафедры
информатики и вычислительной
техники им. В. К. Буторина
23 ноября 2020 года.
Заведующий кафедрой



А. В. Маркидонов

Утверждено
методической комиссией факультета
информатики, математики и экономики
17 декабря 2020 года.
Председатель методкомиссии



Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:004.942](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+65.050я73

© Штейнбрехер О.А., 2020

© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2020

Текст представлен в авторской редакции

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИКОМАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	6
Практическая работа 1. Моделирование и решение экономических задач с использованием электронных таблиц.....	13
ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ.....	19
Практическая работа 2 Модель задачи потребительского выбора.....	26
Практическая работа 3. Анализ экономических величин.....	28
ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА.....	28
Практическая работа 4. Модель задачи фирмы.....	33
Практическая работа 5. Анализ производства с использованием производственных функций.....	33
ТЕМА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНОГО РАВНОВЕСИЯ.....	34
Практическая работа 6. Построение и анализ моделей рыночного равновесия (модель Эванса, Вальраса, паутинообразная модель).....	37
ТЕМА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ.....	37
Практическая работа 7. Моделирование ценообразования на рынке совершенной конкуренции, монополии, олигополии.....	40
ТЕМА 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И БЛАГОСОСТОЯНИЯ.....	41
Практическая работа 8. Модель экономического роста Р.Солоу.....	41
ТЕМА 7. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ.....	43
Практическая работа 9. Моделирование межотраслевых потоков.....	43
ТЕМА 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ.....	49
Практическая работа 10. Модель формирования портфеля инвестиций.....	49
Практическая работа 11. Решение типовых задач по математике финансового менеджмента.....	49
ТЕМА 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЛОГИСТИЧЕСКОГО МЕНЕДЖМЕНТА.....	54

Практическая работа 12. Моделирование и решение задач логистического менеджмента.....	55
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	63

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математическое и имитационное моделирование экономических процессов» относится к вариативной части образовательной программы 09.03.03 Прикладная информатика.

Целью изучения дисциплины является получение навыков выявления и исследования закономерностей социальных и экономических процессов и систем с использованием методов математики, системного анализа и математического моделирования. В ходе освоения дисциплины обучающийся осваивает компетенции ОПК-2 и ПК-8:

ОПК-2 - способен анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования;

ПК-8 - способен программировать приложения и создавать программные прототипы решения прикладных задач.

Данные методические указания содержат теоретические основы и практические задания для выполнения обучающимися при изучении первой части дисциплины, посвященные математическому моделированию экономических процессов.

Выполнение практической работы подразумевает создание программного приложения (на языке программирования по выбору обучающегося) или решения в приложении символьной математики (пакеты прикладных программ моделирования, САД-системы).

Вариант для выполнения выбирается обучающимся согласно списку студентов или последней цифре номера зачетной книжки.

Экономико-математическое моделирование [economic-mathematical modelling, economic modelling] — описание экономических процессов и явлений в виде экономико-математических моделей.

Практическими **задачами** экономико-математического моделирования являются:

- анализ экономических объектов и процессов;
- экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Общая схема процесса моделирования

1. Построение модели исходного объекта
2. Исследование модели
3. Перенос результатов с модели на оригинал
4. Практическая проверка полученных знаний

Этапы экономико-математического моделирования

1. Постановка экономической модели и ее качественный анализ
2. Построение математической модели
3. Математический анализ модели
4. Подготовка исходной информации
5. Численное решение
6. Анализ численных результатов и их применение

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ЭКОНОМИКОМАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, экономического роста, модели равновесия на рынках и многие другие. Строя модели, экономисты выявляют существенные факторы, определяющие исследуемое явление и отбрасывают детали, несущественные для решения поставленной проблемы. Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия воздействия на них и использовать такие оценки в управлении. Модель обычно строится следующим образом:

1. Формулируются предмет и цель исследования.
2. В рассматриваемой экономической системе выделяют структурные и функциональные элементы, выявляются наиболее важные качественные характеристики этих элементов.
3. Дается словесное описание взаимосвязей между элементами модели.
4. Вводятся символические обозначения для учитываемых характеристик экономического объекта и формализуются, насколько возможно, взаимосвязи между ними.
5. Проводятся расчеты по модели и анализ полученного решения.

Таким образом, экономико-математическая модель (ЭММ) – это описание, отображающее экономический процесс или явление с помощью одного или нескольких математических выражений (уравнений, функций, неравенств, тождеств), имитирующих (отображающих) поведение

моделируемого объекта в заданных или возможных условиях его реального существования. Рассмотрим пример построения модели.

Пример 1. Пусть имеется предприятие, которое выпускает несколько видов продукции. В процессе производства используются три вида ресурсов: оборудование, сырье и рабочая сила. Задан расход каждого ресурса на производство одной единицы продукции. Заданы цены на выпускаемую продукцию. Необходимо определить объемы производства с целью максимизации прибыли в предположении, что вся произведенная продукция найдет сбыт на рынке.

Вид продукции будем обозначать индексом $i = 1...I$. Далее опишем экзогенные переменные, то есть те, которые задаются вне модели. В данной задаче экзогенными переменными являются: фонд машинного времени, имеющиеся в наличии сырье и фонд рабочего времени.

Помимо этого в задаче даны нормы расхода каждого вида ресурса на единицу продукции и известна цена продажи готового изделия.

Все переменные должны иметь размерность, поэтому необходимо указывать в каких единицах измерения заданы переменные. Итак, *экзогенными переменными* являются:

K – фонд машинного времени, [час];

R – количество используемого сырья, [кг];

L – фонд рабочего времени, [час];

κ_i – расход машинного времени на единицу i -ой продукции, [час/шт];

r_i – расход сырья на единицу i -ой продукции, [кг/шт];

l_i – трудозатраты на единицу i -ой продукции, [час/шт];

p_i – цена i – го вида продукта, [руб/шт].

Очевидно, что указанные выше переменные могут иметь и другие единицы измерения в зависимости от особенностей технологии, используемых ресурсов и принятых правил учета.

Далее вводятся обозначения для эндогенных переменных – тех, которые определяются в ходе расчетов по модели и не заданы заранее. В рассматриваемой задаче – это неизвестные объемы производства каждого вида продукта. Обозначим их x_i , [шт].

Закончив описание переменных и параметров, перейдем к формализации условий задачи, описанию ее допустимого множества и целевой функции. В нашем случае допустимым множеством является – совокупность вариантов производства, обеспеченных имеющимися ресурсами. Оно описывается с помощью системы неравенств,

представляющих собой ограничение на имеющиеся в распоряжении предприятия ресурсы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^I k_i x_i \leq K \\ \sum_{i=1}^I r_i x_i \leq R \\ \sum_{i=1}^I l_i x_i \leq L \end{cases} \quad (1)$$

Первое неравенство накладывает ограничения на использование оборудования, второе – на потребление сырья и третье – ограничивает использование человеческих ресурсов.

Если ресурсы необходимо израсходовать полностью, то неравенства нужно заменить на соответствующие уравнения.

К этим ограничениям добавляется требование неотрицательности переменных $x_i \geq 0$, означающее, что найденный в ходе решения задачи оптимальный объем выпуска должен быть неотрицательным.

Наряду с ограничениями записываем целевую функцию, которая отражает интересы принимающего решения субъекта. В нашем случае интересы предприятия ограничены максимизацией стоимости произведенной продукции

$$\sum_{i=1}^I p_i x_i \rightarrow \max \quad (2)$$

Среди бесконечного множества решений, удовлетворяющих всем ограничениям, существует такое, которое обеспечивает наибольшую прибыль от реализации продукции.

Алгоритм формального описания задачи представлен на рисунке 1.

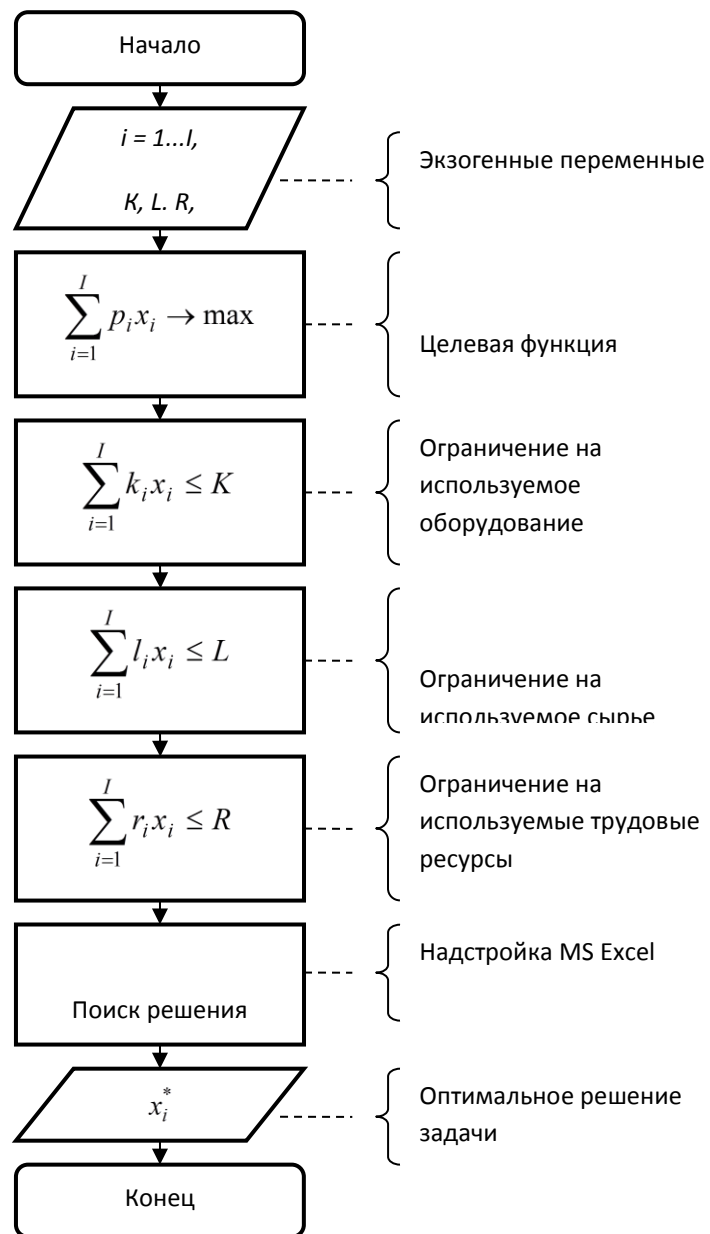


Рисунок 1 – Этапы формализации и решения оптимизационной задачи

Помимо экономико-математических моделей выделяют компьютерные модели. Компьютерная модель – знаковая модель, записанная ее составителем в форме, которую компьютер способен распознать, преобразовать, произвести над ней арифметические и логические действия, а затем выдать результат на языке, понятном человеку.

Базовым программным средством для решения экономических задач с помощью персонального компьютера может служить один из популярных процессоров электронных таблиц MS Excel.

Данную задачу, которая является задачей линейной оптимизации с ограничениями можно решить с использованием встроенного программного

средства MS Excel «Поиск решения». Этапы работы с данным оптимизатором представлены на рисунке 2.

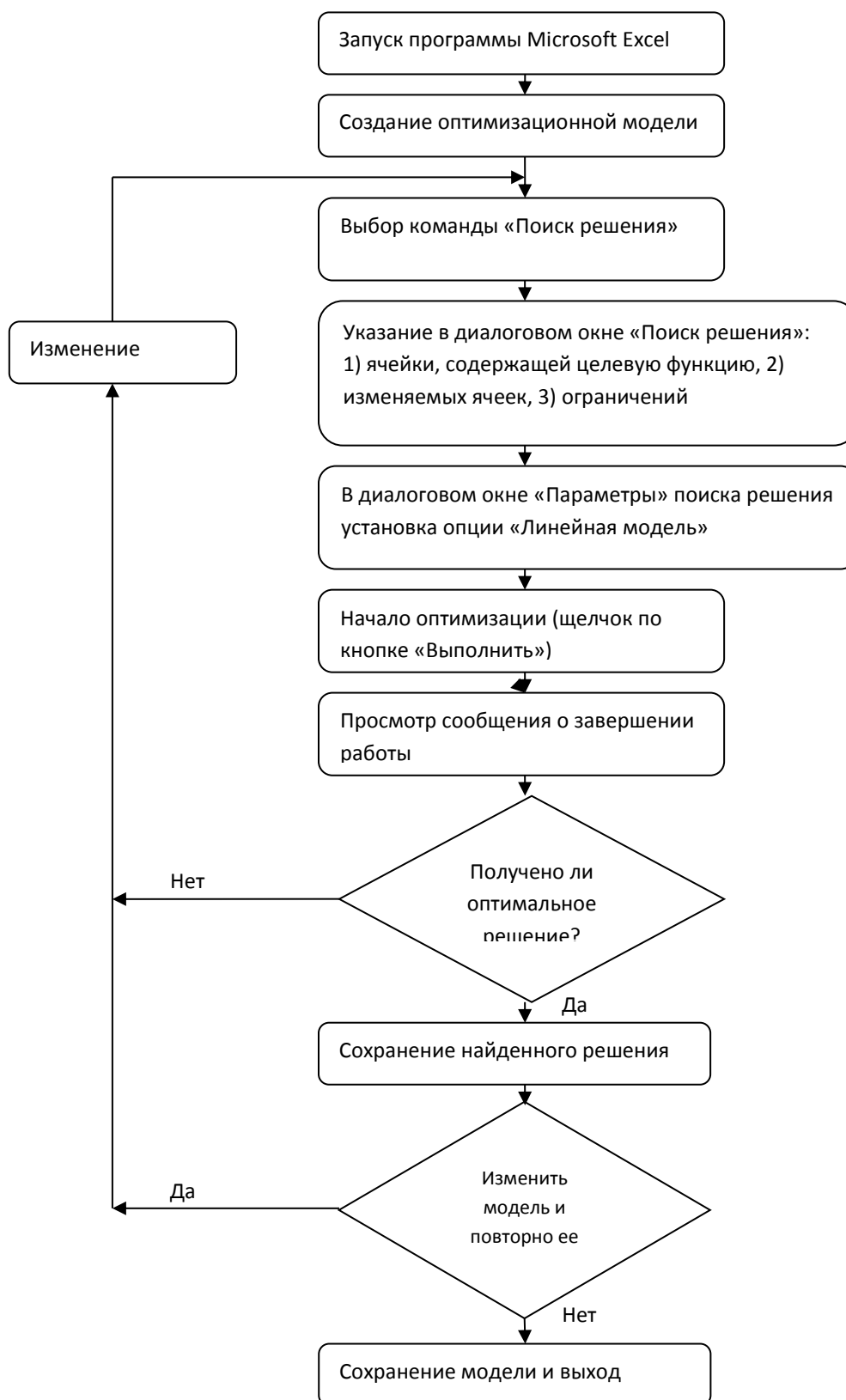


Рисунок 2 – Этапы работы с надстройкой «Поиск решения»

После создания математической модели рассмотренной выше задачи перейдем к созданию компьютерной модели. Моделирование с использованием электронных таблиц не сводится к простому расчету уравнений, связывающих переменные. При задании модели нужно предвидеть, как она будет анализироваться, и, исходя из этого, так представить модель на рабочем листе Excel, чтобы она обладала следующими свойствами.

1. Была логически корректной.
2. Представляла основные альтернативы для сравнения (если это необходимо).
3. С ней удобно было проводить манипуляции, необходимые для анализа.
4. Люди, не участвующие в создании модели, могли легко ее понять.
5. Внешнее оформление модели должно быть привлекательным.

Основные правила, которыми следует руководствоваться, чтобы создать качественную модель на основе электронных таблиц:

1. Необходимо четко обозначить все переменные.
2. Следует четко обозначить входы модели, переменные решения и параметры.
3. Надо указать критерий эффективности и выходные переменные.
4. Не следует жестко привязывать значения параметров к формулам – параметры должны храниться в отдельных ячейках рабочего листа для удобства документирования и анализа.
5. Следует использовать предоставляемые программой возможности форматирования таблиц (выделять заголовки, ячейки и т.д.)

Для разработки хорошей модели (понятной, свободной от логических ошибок, легко анализируемой) исключительно важное значение имеет ее структура и расположение на листе рабочей книги. Хорошему стилю моделирования присущи понятная логика, отказ от помещения значений параметров в формулы, присвоение имен всем переменным и их использование.

На рисунке 3 представлено решение задачи с использованием оптимизатора MS Excel для трех видов продукции. В диапазоне ячеек B4:D6 введены нормы расхода каждого ресурса по видам продукции; в G4:G7 – ограничения на наличие ресурсов; в B9:D9 указаны цены на готовую продукцию. В ячейке B11 записывается уравнение целевой функции, а в

Е4:Е6 – уравнения ограничений. Далее вызывается диалоговое окно «Поиск решения» и заполняются соответствующие поля (рисунок 1.4).

B11		fx =СУММПРОИЗВ(B8:D8;B9:D9)					
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Ресурсы	Расход ресурсов по видам продукции			Итого расход на весь объем производства		Наличие ресурса
3		1	2	3			
4	к	0,3	0,2	0,1	198	≤	198
5	г	0,25	0,27	0,85	180	≤	180
6	л	0,37	0,81	0,3	270	≤	270
7							
8	Объемы производства (x)	628	41	14			
9	Цена (р)	250	275	325			
10							
11	Целевая функция (прибыль)	172866					
12							

Рисунок 3 – Решение задачи с использованием надстройки «Поиск решения»

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☐ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка Найти решение Закрыть

Рисунок 4 – Диалоговое окно «Поиск решения»

Простейшим способом анализа моделей в электронных таблицах является составление последовательностей различных входов, получившее название анализ «Что-если». Название очень точно отражает суть производимых действий. Например, что произойдет с выходными переменными, если некая характеристика среды (параметр) или переменная решения изменится определенным образом. Это основные вопросы любой управленческой задачи, поэтому анализ «Что-если» является наиболее часто используемым способом анализа моделей, созданных в электронных таблицах. С помощью анализа можно в рассматриваемой задаче определить, как отразятся на прибыли изменения в значениях параметров или переменных решения (в ценах на продукты, расход или наличие ресурсов).

Хотя анализ «Что-если» является основным видом анализа моделей, построенных в электронных таблицах, в нем есть один минус. При проведении такого анализа предшествующие результаты заменяются новыми, поэтому невозможно одновременно представить результаты нескольких сценариев. Этот недостаток легко устраняется, если исходную модель оставить без изменения, а в другие столбцы рабочего листа заносить копии модели, представляющие различные сценарии анализа. Это упрощает анализ и графическое представление его результатов.

Практическая работа 1. Моделирование и решение экономических задач с использованием электронных таблиц.

Задание. Разработать экономико-математическую модель задачи.

1. Ввести известные и неизвестные переменные, указать их размерность и описание.
2. Задать критерий эффективности (т. е. составить целевую функцию), выписать ограничения модели, пояснить их экономический смысл.
3. Представить модель в виде алгоритма (блок-схемы, в которой указана последовательность решения задачи) с необходимыми комментариями.
4. Представить модель в электронной таблице, решить с использованием надстройки «Поиск решения».
5. Исследовать модель, сделать выводы по полученному решению и дать рекомендации к использованию модели.
6. Оформить и представить в виде отчета.

Варианты заданий

Задача 1. Компания Longer Boats производит три вида высококлассных гоночных яхт – Sting, Ray и Breaker. Соответствующие данные о затратах и доходах на ближайший плановый период представлены в таблице.

Яхты	Цена, \$ за единицу	Переменные затраты, \$ за единицу	Фиксированные затраты, \$
Sting	10 000	5 000	5 000 000
Ray	7 500	3 600	3 000 000
Breaker	15 000	8 000	10 000 000

Руководство компании заключило контракт на производство 700 яхт Sting. Один клиент заказал 400 яхт Breaker. Анализ рынка, проведенный отделом маркетинга компании, свидетельствует, что следует произвести не более 300 яхт Ray. Руководство компании хочет выяснить, сколько яхт каждого вида следует произвести, чтобы добиться точки безубыточности. Причем руководство компании заинтересовано в минимизации расходов на производство яхт.

Задача 2. Компания Solar Car владеет заводом, который может выпускать семейные автомобили (седаны), пикапы и спортивные двухместные автомобили (купе). Удельная прибыль, время производства и фиксированные затраты представлены в таблице.

Модель	Удельная прибыль, \$	Время производства, ч	Фиксированные затраты, \$
Седан	6 000	12	2 000 000
Пикап	8 000	15	3 000 000
Купе	11 000	24	7 000 000

Компания к настоящему моменту уже получила заказы на 100 седанов, 200 пикапов, 300 купе, которые она обязана выполнить. Составьте производственный план, который позволит как можно быстрее достичь точки безубыточности, т.е. сделать валовой доход равным валовым фиксированным затратам, минимизировав суммарное время производства.

Задача 3. Инвестиционная компания должна определить, куда вложить средства в размере \$10 млн. Цель – максимизировать ожидаемый доход в следующем году. Четыре возможных варианта вложения средств представлены в таблице.

Варианты инвестирования	Ожидаемый доход, %	Максимально возможная сумма инвестиций, \$ млн.
-------------------------	--------------------	---

Обыкновенные акции	8	5
Облигации казначейства	6	7
Фонд денежного рынка	12	2
Муниципальные облигации	9	4

Компания также приняла решение, что не менее 30% средств должно быть вложено в обыкновенные акции и долгосрочные казначейские облигации и не более 40% - в фонды денежного рынка и муниципальные облигации. Необходимо инвестировать все имеющиеся \$10 млн. Сформулируйте задачу, позволяющую определить, куда и сколько вложить средств.

Задача 4. Компания производит две марки телевизоров – Astro и Cosmo. Работают два конвейера, каждый из которых выпускает телевизоры одной марки, и два цеха, занятых производством деталей для телевизоров обеих марок. Производственная мощность конвейера, выпускающего Astro, составляет 70 телевизоров в день, а конвейера Cosmo – 50 телевизоров в день. Цех А производит телевизионные трубки. На производство трубки для телевизора Astro требуется 1 час рабочего времени, а на производство трубки для Cosmo – 2 часа. На данном этапе в цехе А производству трубок для телевизоров обеих марок может быть уделено не более 120 часов рабочего времени в день. В цехе Б изготавливаются корпуса телевизоров, причем на производство одного корпуса как для Astro, так и для Cosmo требуется 1 час рабочего времени в день. Удельная валовая прибыль от реализации Astro и Cosmo составляет \$20 и \$10 соответственно. Эти данные представлены в таблице.

Конвейеры	Дневная производительность	Удельные трудозатраты, час		Удельная прибыль, долл.
		Цех А	Цех Б	
Astro	70	1	1	20
Cosmo	50	2	1	10
Ресурс рабочего времени		120	90	

При условии, что компания может продать все произведенные телевизоры, каким должен быть дневной план производства (то есть сколько телевизоров каждой марки следует производить ежедневно)?

Задача 5. Компания Bear Lake Electronics выпускает три вида DVD – проигрывателей: базовый, люкс и портативный. Компания хочет оптимизировать ассортимент продукции, выпускаемой на трех ее предприятиях. Предположим, что компания может продать все произведенные DVD проигрыватели. Производственные мощности предприятий по изготовлению комплектующих и сборке представлены в таблице.

Предприятие	Сборка, ч	Изготовление комплектующих, ч
1	20 000	100 000
2	30 000	100 000
3	10 000	70 000
Всего	60 000	270 000

Прибыль от продажи базовой модели составляет \$75, модели класса люкс - \$125, а портативной модели - \$195. Время, необходимое для изготовления комплектующих и сборки проигрывателей, приводится в таблице.

Проигрыватель	Сборка, ч на 1 изделие	Изготовление комплектующих, ч на 1 изделие
Базовая модель	3	8
Модель класса люкс	4	11
Портативная модель	8	16

Создайте табличную модель и найдите оптимальный ассортимент продукции для компании.

Задача 6. Клиент поручает инвестиционной фирме управление своим портфелем в размере \$100000. Известно, что клиент хочет ограничиться покупкой трех акций компаний, характеристики которых представлены в таблице.

Акции компании	Цена акции, \$	Ожидаемый годовой доход на акцию, \$	Максимально возможные инвестиции, \$
Gofer Crude	60	7	60 000
Can Oil	25	3	25 000
Sloth Petroleum	20	3	30 000

Постройте модель, которая позволит определить, сколько акций каждой компании необходимо купить инвестиционной фирме, чтобы оптимизировать ожидаемый доход клиента.

Задача 7. Завод может производить четыре вида изделий А, В, С и D в произвольных комбинациях. По технологии каждое изделие обрабатывается четырьмя машинами. Время обработки в минутах в пересчете на килограмм готовой продукции показано в таблице.

Продукция	Машина				Максимальный спрос
	1	2	3	4	
A	5	10	6	3	400
B	3	6	4	8	100
C	4	5	3	3	150
D	4	2	1	2	500

Каждая машина может работать 60 часов в неделю. Изделия могут продаваться по следующим ценам: А – \$9, В – \$7, С – \$6, D – \$5 за килограмм. Переменные затраты на оплату труда составляют \$2 в час для машин 1 и 2 и \$3 в час для машин 3 и 4. Материальные затраты составляют \$4 на каждый килограмм продукции А и \$1 на каждый килограмм продукции В, С, D. Максимизируйте прибыль при заданном максимальном спросе для каждого вида продукции.

Задача 8. Компания производит телевизоры, стереосистемы и акустические системы, используя общий склад источников питания, громкоговорителей и т.д. Детали имеются на складе в ограниченном количестве. Нормы расхода деталей на каждый вид продукции представлены в таблице.

Наименование детали	Наименование продукции			Количество деталей на складе
	Телевизор	Стереосистема	Акуст. система	
Шасси	1	1	0	450
Кинескоп	1	0	0	250
Громкоговоритель	2	2	1	800
Источник питания	1	1	0	450
Радиодетали	2	1	1	600

Удельная прибыль составляет: для телевизора - 75 тыс. рублей; стереосистемы – 50 тыс. рублей; акустической системы – 35 тыс. рублей.

Необходимо определить оптимальный ассортимент производимых продуктов. При этом нужно учесть, что прибыль в расчете на единицу продукции уменьшается при росте объема производства, так как необходимы дополнительные затраты для обеспечения сбыта по каналам распространения (коэффициент уменьшения отдачи составляет 0,9).

Задача 9. У компании Slick Oil есть три склада, с которых она может доставлять продукцию трем розничным торговым точкам. Спрос на продукт составляет в первой точке 100 ящиков, во второй – 250, в третьей – 150. Запас данного продукта на складе 1 составляет 50 ящиков, на складе 2 – 275 и на складе 3 – 175. Затраты на транспортировку одного ящика продукта со складов в торговые точки представлены в таблице.

Склад	Торговые точки		
	1	2	3
1	5	7	6
2	8	9	10
3	4	3	11

Определите, сколько ящиков следует доставить в каждую торговую точку с каждого склада, чтобы удовлетворить спрос с минимальными затратами.

Задача 10. Компания Swelte Glove производит и продает два изделия. При продаже каждой единицы изделия 1 компания получает прибыль \$12, а при продаже единицы изделия 2 – \$4. Требования к затратам рабочего времени на производство изделий в первом трех цехах приводятся в таблице.

Цех	Затраты рабочего времени	
	Продукт 1	Продукт 2
1	1	2
2	1	3
3	2	3

Начальники цехов оценили, что на следующей неделе ресурс рабочего времени составит в первом цехе 800 часов, во втором цехе – 600 часов, а в третьем цехе – 2000 часов. Предполагая, что компания заинтересована в максимизации прибыли, разработайте модель для данной задачи.

ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ.

Содержательно эту задачу можно сформулировать так: потребителю нужно приобрести (купить) на рынке необходимые ему виды товаров в таком количестве, чтобы их потребление доставило максимальное удовлетворение (пользу); при этом суммарная стоимость купленных товаров не должна превышать его дохода (бюджета). Последнее условие называется бюджетным ограничением и оно подчеркивает всегда ограниченные покупательские возможности потребителя.

Приведем сначала необходимые обозначения. Пусть

$x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$ – набор товаров, где x_i – количества товара вида i , n – число видов товаров, R_+^n – пространство товаров; $p = (p_1, \dots, p_n)$ – вектор цен товаров, где p_i – цена единицы товара вида i ; K – доход (бюджет) потребителя.

Компоненты вектора x являются неизвестными переменными. Модель составляется для определения оптимальных значений этих переменных для данного потребителя.

Цель потребителя будем описывать с помощью функции полезности $u: R_+^n \rightarrow R^1$. Функция полезности – это есть численный индикатор отношения предпочтения и, по сути, представляет систему предпочтений потребителя относительно некоторых товаров. Формальное определение функции полезности – это функция $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, соответствующая отношению предпочтения, такая, что $u(x) > u(y)$, тогда и только тогда, когда $x \succ y$. Основное ее свойство в том, что потребитель предпочитает выбирать товары x , а не y , если $u(x) > u(y)$.

С учетом всего сказанного выше, формально модель задачи потребительского выбора можно записать так

$$\begin{aligned} &u(x) \rightarrow \max \\ &\text{при ограничениях} \\ &\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq K \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ограничение типа $\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq K$ называется бюджетным ограничением и показывает, что выбор потребителя всегда ограничен величиной его дохода.

Оптимальным решением задачи называется такой вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, определяющий оптимальный размер благ, при котором функция

полезности достигает своего максимального значения. Оптимальное решение зависит от вектора цен $p = (p_1, \dots, p_n)$ и дохода потребителя K . Оптимальное решение x^* называется также спросом потребителя, который отражает платежеспособную потребность.

Алгоритм решения задачи методом множителей Лагранжа.

1. Выяснить существование оптимального решения с помощью следствия теоремы Вейерштрасса.

2. Выяснив существование оптимального решения задачи потребителя воспользоваться методом множителей Лагранжа (составить функцию Лагранжа, выписать необходимые условия оптимальности, сделать предположение, что потребитель приобретает все виды товаров, то есть $x_i > 0$ для всех $i=1, \dots, n$, разрешить полученную систему уравнений).

Решить данную задачу можно и по-другому, предположив, что оптимальное решение геометрически является точкой касания кривой безразличия и бюджетной линии. Кривые безразличия – это есть линии уровня функции полезности. Кривые безразличия задаются уравнениями $u(x) = c$, где c – любая константа. Бюджетная линия – это есть граница бюджетного множества.

Так как в точке касания x^* наклон кривой безразличия равен наклону бюджетной линии, то

$$\frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}, \quad (4)$$

где левая часть уравнения представляет собой отношение предельных полезностей товара (и является тангенсом угла наклона кривой безразличия), а правая - отношение цен на товары (тангенс угла наклона бюджетной линии).

Предельная полезность товара i – это есть частная производная функции полезности $\partial u / \partial x_i$, указывающая на изменение полезности на дополнительную единицу i -го блага.

Вычислив предельные полезности товаров, и решив систему уравнений можно получить оптимальное решение данной задачи.

Пример 1. Потребитель собирается потратить не более 1100 рублей на покупку двух товаров x и y . Цена первого товара составляет 200 рублей, второго товара 25 рублей. Функция полезности имеет вид $u = x^2 y$. Определить оптимальный выбор потребителя.

Составим оптимизационную задачу

$$u(x, y) = x^2 y \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$200x + 25y = 1100$$

$$x > 0, y > 0$$

Вычисляем предельные полезности товаров путем нахождения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$. Приравниваем отношения предельных

полезностей к отношению цен на товары и получаем $\frac{2xy}{x^2} = \frac{200}{25}$ или $y = 4x$.

Добавляем к полученному уравнению ограничение и решаем систему

$$\begin{cases} y = 4x \\ 200x + 25y = 1100 \end{cases}$$

Решением системы является $x \approx 3,6$, $y \approx 15,2$, $u = 3,6^2 \cdot 15,2 \approx 197$. Значения x и y можно округлить до целого числа в зависимости от единиц измерения количества товаров.

Можно проиллюстрировать графически нахождение оптимального решения. Рисуем бюджетную линию, выразив из уравнения ограничения переменную x через y

$$y = \frac{1100 - 200x}{25}.$$

Линию уровня функции полезности рисуем, приравнивая функцию полезности к разным константам, например, $x^2 y = 197$. Выражаем переменную x через y и получаем $y = \frac{197}{x^2}$. Задавая разные значения x , вычисляем значения y и отображаем точки на графике (рисунок 5), из которого видно, что бюджетная линия касается кривой безразличия в искомых точках.

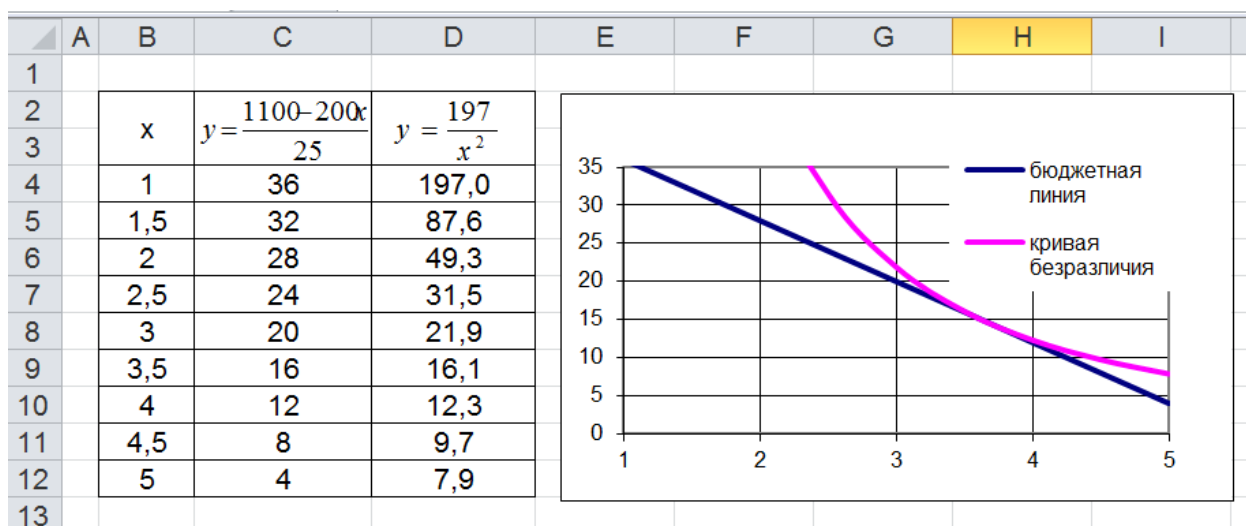


Рисунок 5 – Графическая иллюстрация оптимального решения

Задачу можно решить, используя также надстройку табличного процессора MS Excel «Поиск решения» (рисунок 6).

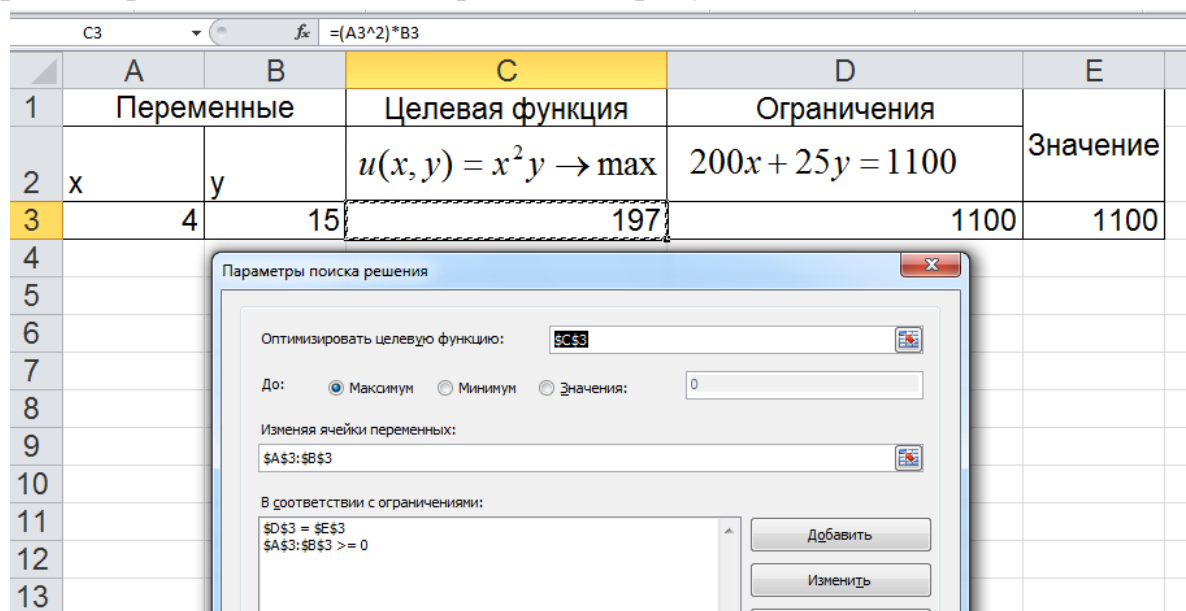


Рисунок 6 – Решение задачи с использованием надстройки MS Excel «Поиск решения»

Сформулируем взаимную (обратную) задачу к задаче оптимального выбора благ потребителем. Постановка задачи звучит так: какой набор благ, обеспечивающий данный уровень потребления самый экономичный?

Зафиксируем значение функции полезности на уровне u_0 и рассмотрим те товары, для которых $u(x) = u_0$, то есть товары, дающие потребителю один и тот же уровень удовлетворения. При этом критерием оптимальности примем

минимальный расход денежных средств на приобретение товаров. Формально задача выглядит таким образом

$$K(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$u(x) = u_0$$

$$x > 0$$

Задачу можно решать аналогично прямой задаче – методом множителей Лагранжа, с использованием надстройки MS Excel «Поиск решения», графическим методом.

Пусть известна функция спроса $D(P)$ некоторого товара, где P – цена товара. Тогда эластичность спроса от цены определяется следующей формулой

$$E_D = -\frac{P}{D} \cdot \frac{dD(P)}{dP} \quad (7),$$

где $\frac{dD(P)}{dP}$ – производная функция спроса $D(P)$ по переменной P .

Эластичность спроса от цены показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении его цены на 1%.

Если $E_D > 1$, то это – товар эластичного спроса (при повышении цены товара на 1% спрос на товар понижается более чем на 1% и наоборот).

Если $E_D < 1$, то это – товар неэластичного спроса (при повышении цены товара на 1% спрос на товар понижается менее чем на 1% и наоборот).

Поскольку рыночный спрос зависит от многих переменных, то выделяют коэффициенты эластичности спроса от собственной цены, перекрестный коэффициент эластичности спроса, эластичность спроса по доходу.

Пусть спрос зависит от цены P_1 этого товара, цены P_2 альтернативного товара и дохода потребителей K

$$D = D(P_1, P_2, K).$$

Тогда эластичность спроса от собственной цены товара определяется следующей формулой

$$E_1 = -\frac{P_1}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_1}, \quad (8)$$

где $\frac{\partial D}{\partial P_1}$ – частная производная функции спроса $D = D(P_1, P_2, K)$ по переменной P_1 .

Эластичность спроса от собственной цены показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении его собственной цены на 1%.

Перекрестный коэффициент эластичности спроса определяется следующей формулой

$$E_2 = \frac{P_2}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_2}, \quad (9),$$

где $\frac{\partial D}{\partial P_2}$ – частная производная функции спроса $D = D(P_1, P_2, K)$ по переменной P_2 .

Перекрестный коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении цены альтернативного товара на 1%.

Выражение $\frac{\partial D}{\partial P_2} > 0$ означает, что с ростом цены альтернативного товара, спрос на собственный товар возрастает. Если $\frac{\partial D}{\partial P_2} > 0$, то перекрестный коэффициент эластичности $E_2 > 0$. Такие товары называют взаимозаменяемыми.

Выражение $\frac{\partial D}{\partial P_2} < 0$ означает, что с ростом цены альтернативного товара, спрос на собственный товар уменьшается. Поэтому если $\frac{\partial D}{\partial P_2} < 0$, то перекрестный коэффициент эластичности $E_2 < 0$. Такие товары называют взаимодополняющими.

При $\frac{\partial D}{\partial P_2} = 0$ товары характеризуются как независимые. Нулевая перекрестная эластичность спроса означает, что товары не зависят друг от друга, так как отклонения в цене одного товара не вызывает заметных изменений в закупках другого товара.

Эластичность спроса от дохода потребителей K определяется следующей формулой

$$E_K = \frac{K}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial K}, \quad (10)$$

где $\frac{\partial D}{\partial K}$ – частная производная функции спроса $D = D(P_1, P_2, K)$ по переменной K .

Эластичность спроса от дохода потребителей показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении дохода потребителей на 1%. С ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается ($E_K > 0$), а потребление низкосортных товаров уменьшается ($E_K < 0$). Товары, у которых $E_K < 0$ классифицируются как предметы роскоши.

Пример 2. Задана функция спроса некоторого товара $D = 70 - 7 \cdot P_1 + 9 \cdot P_2 + 0.3 \cdot K$. Найти эластичность спроса от собственной цены E_1 , перекрестный коэффициент эластичности спроса E_2 , эластичность спроса от дохода потребителей E_y при собственной цене товара $P_1 = 8$, цене альтернативного товара $P_2 = 6$ и доходе потребителей $K = 400$. Какие это товары: взаимозаменяемые или взаимодополняющие? Как ведет себя спрос с ростом доходов потребителей?

Решение.

1) Найдем эластичность спроса от собственной цены E_1 по формуле (2.2). Для этого сначала вычислим частную производную функции спроса по переменной P_1

$$\frac{\partial D}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} (70 - 7P_1 + 9P_2 + 0.3K) = -7$$

Чтобы найти значение функции спроса при заданных параметрах, подставим в функцию спроса $D = 70 - 7 \cdot P_1 + 9 \cdot P_2 + 0.3 \cdot K$ значения P_1 , P_2 и K и получим $D = 70 - 7 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 0.3 \cdot 400 = 188$

Подставляем в формулу (2) все найденные значения

$$E_1 = -\frac{P_1}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_1} = -\frac{8}{188} \cdot (-7) \approx 0,3.$$

Спрос на товар неэластичный, поскольку $E_1 < 1$. При изменении цены на 1% величина спроса изменяется на 0,3%.

2) Найдем перекрестный коэффициент эластичности спроса E_2 по формуле (2.3)

Вычислим частную производную функции спроса по переменной P_2

$$\frac{\partial D}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P_2} (70 - 7P_1 + 9P_2 + 0,3K) = 9$$

Подставляем в формулу (3) все найденные значения

$$E_2 = \frac{P_2}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_2} = \frac{6}{188} \cdot 9 \approx 0,29.$$

Товары являются взаимозаменяемыми, поскольку $E_1 > 0$.

3) Найдем эластичность спроса от дохода потребителей E_K по формуле (2.4)

Вычислим частную производную функции спроса по переменной K

$$\frac{\partial D}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} (70 - 7P_1 + 9P_2 + 0,3K) = 0,3$$

Подставляем в формулу (3) все найденные значения

$$E_2 = \frac{K}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial K} = \frac{400}{188} \cdot 0,3 \approx 0,63.$$

Поскольку с ростом доходов спрос на товар увеличивается, следовательно – это товар нормального качества.

Практическая работа 2 Модель задачи потребительского выбора.

Задание. Решить задачи по вариантам несколькими способами:

- а) с использованием средства «Поиск решения», как задачу линейного программирования;
- б) графически.

Сформулировать и решить обратную задачу.

Какие товары рассматриваются в вашей задаче – взаимозаменяемые или взаимодополняющие?

Варианты заданий

Задача 1. Определить оптимальный выбор, если функция полезности индивида: $u = (Q_A + 4)(Q_B + 5)$, где Q_A , Q_B – количества двух различных благ, его бюджет $M = 64$, а цены благ $p_A = 1$, $p_B = 1.5$.

Задача 2. Решите задачу потребительского выбора, найдя функции спроса при ценах благ $p_1 = 25$, $p_2 = 35$ и доходе $K = 260$, со следующей функцией предпочтения: $u = x_1^{1/2} x_2^{2/3} \rightarrow \max$.

Задача 3. На 2 товара x и y потребитель тратит в год \$800. Цены товаров равны \$50 и \$25 соответственно. Определить оптимальный выбор, если его функция полезности: $u = 2x^2 + 3xy$.

Задача 4. Определить, какой набор товаров выберет потребитель, обладающий доходом в 300\$, если его функция полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, а цены единицы товара : $p_1 = 2\$$; $p_2 = 4\$$.

Задача 5. На 2 товара с ценой 95 рублей и 130 рублей потребитель тратит в год 1800 рублей. Определить оптимальный выбор, если его функция полезности: $u = 3x^4 y$.

Задача 6. Доход потребителя равен 1500 рублей. Функция полезности имеет вид: $u = 3y_1 y_2^2$. Вектор цен равен $P = (6; 9)$. Определить оптимальный выбор потребителя.

Задача 7. Определить оптимальный выбор, если функция полезности индивида: $u = (Q_A + 10)(Q_B + 1)$, где Q_A , Q_B – количества двух различных благ, его бюджет $M = 500$, а цены благ $p_A = 30$, $p_B = 48$.

Задача 8. Бюджет потребителя равен 880 рублей. Функция полезности $u(x, y) = 0,5x\sqrt{y}$. Цена товаров 10 рублей и 20 рублей соответственно. Найти оптимальный выбор.

Задача 9. Доход потребителя равен 7500 рублей. Функция полезности имеет вид: $u = 2(x + 2)(y + 3)$. Вектор цен равен $P = (500; 250)$. Определить оптимальный выбор потребителя.

Задача 10. Функция полезности имеет вид $u = y\sqrt{3x}$. Цена на товар y равна 30 рублей, на товар x равна 25 рублей. Доход потребителя 200 рублей. Найти оптимальный план потребления.

Практическая работа 3. Анализ экономических величин.

Дана функция спроса некоторого товара $D = a - bP_1 + cP_2 + dK$. Найти эластичность спроса от собственной цены E_1 , перекрестный коэффициент эластичности спроса E_2 , эластичность спроса от дохода потребителей E_y . Собственная цена товара равна P_1 , цена альтернативного товара P_2 и доход потребителей K . Какие это товары: взаимозаменяемые или взаимодополняющие? Как ведет себя спрос с ростом доходов потребителей?

Таблица 1 – Варианты заданий

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	90	20	100	70	73	95	80	75	50	165
b	4	6	8	7	7	3	7	6	9	10
c	2	9	5	5	8	4	3	2	5	8
d	0.9	0.3	0.3	0.1	0.3	0,2	0,6	0,2	0,1	0,25
P_1	5	3	7	8	13,5	10	8	8,5	10	9,8
P_2	7	2	5	7	11	9	12	4,5	15	3,6
K	200	200	900	400	325	150	230	180	750	260

ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВА.

Производственная функция описывает зависимость между количеством используемых в производстве ресурсов и объемом выпускаемой продукции. Любая функция f , ставящая в соответствие каждому вектору затрат x вектор $y = f(x)$ максимального выпуска, который может быть получен при этих затратах, называется производственной функцией. Это есть определение для многопродуктового производства. Если речь идет об одном виде продукта, то производственная функция является скалярной $y = f(x_1, \dots, x_n)$, где независимыми переменными являются объемы затрачиваемых ресурсов, а зависимой – объем выпускаемой продукции.

В качестве ресурсов (факторов производства) наиболее часто рассматриваются производственные фонды K (капитал) и трудовые ресурсы L (труд). В этом случае имеем двухфакторную производственную функцию $Y = F(K, L)$.

Вместо общего представления производственной функции используют функции определенного вида. Например, мультипликативную производственную функцию

$$Y = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}, \text{ где } \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0. \quad (11)$$

Или частный случай мультипликативной функции – производственную функцию Кобба-Дугласа

$$Y = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}, \text{ где } \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Частные производные выпуска по факторам производства называют предельными продуктами, характеризующими прирост выпуска на единицу прироста факторов.

Предельная эффективность фондов или предельная фондоотдача есть частная производная функции F по переменной K (обозначим ее $\frac{\partial F}{\partial K}$).

Предельная производительность труда или предельная эффективность труда есть частная производная функции F по переменной L (обозначим ее $\frac{\partial F}{\partial L}$).

Для анализа производства представляет интерес эластичность выпуска по видам ресурсов, которая характеризует процент прироста продукции при увеличении затрат на 1%. Эластичность рассчитывается как отношение предельной производительности ресурса к его средней производительности (то есть объем выпуска, приходящийся на единицу затрат ресурса). Для двухфакторной производственной функции эластичность выпуска по основным фондам ε_K рассчитывается

$$\varepsilon_K = \frac{\partial F / \partial K}{Y / K}, \quad (12)$$

где $\frac{Y}{K}$ – средняя производительность фондов.

Аналогично можно рассчитать эластичность выпуска по труду ε_L

$$\varepsilon_L = \frac{\partial F / \partial L}{Y / L}, \quad (13)$$

где $\frac{Y}{L}$ – средняя производительность труда.

Линия уровня производственной функции называется изоквантой. Изокванта представляет собой геометрическое место всех векторов затрат, использование которых приводит к одному и тому же

объему выпуска продукции, т.е. $F(K, L) = Y_0$, где $Y_0 = \text{const}$. Изокванты, по сути, играют ту же роль, что и кривые безразличия в теории потребления. Строятся они аналогично. Для мультипликативной производственной функции уравнение изокванты имеет вид

$$A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = Y_0. \quad (14)$$

Отсюда

$$K = \sqrt[\alpha_1]{\frac{Y_0}{A} \cdot L^{-\alpha_2}} \quad (15)$$

Задавая разные значения Y_0 , получаем семейство изоквант.

Изоклиналъ – это линия наибольшего роста производственной функции, которая ортогональна изокванте. Уравнение изоклинали для двухфакторной производственной функции представляется как

$$\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}.$$

Найти уравнение изоклинали, можно решив данное дифференциальное уравнение, предварительно вычислив предельные продукты для заданной производственной функции.

Уравнение изоклинали для мультипликативной производственной функции имеет вид

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot L^2 + a} \quad (16)$$

где $a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot L_0^2$, (L_0, K_0) – координаты точки, через которую проходит изоклиналъ.

С помощью производственных функций можно оценить масштаб и эффективность производства. Эффективность производства – это отношение результата к затратам. Для двухфакторной производственной функции имеются два частных показателя эффективности: $\frac{Y}{K}$ – фондоотдача и $\frac{Y}{L}$ – производительность труда. Интегральный показатель эффективности можно вычислить как произведение этих двух показателей. При этом нужно помнить, что, рассчитывая эффективность мы сравниваем показатели за прошлые периоды времени с текущими. Поэтому частные показатели

необходимо привести к безразмерным (относительным) показателям $-\frac{K}{K_0}$ и $\frac{L}{L_0}$, где L_0, K_0 – значения затрат в базовый год.

Обозначим $\tilde{Y}, \tilde{K}, \tilde{L}$ – относительные показатели, которые характеризуют выпуск и ресурсы в безразмерных единицах измерения. Тогда эффективность (E) определяется

$$E = \left(\frac{\tilde{Y}}{\tilde{K}} \right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\tilde{Y}}{\tilde{L}} \right)^{\gamma} \quad (17)$$

где $\beta = \frac{\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $\gamma = \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

Масштаб производства проявляется в объеме затрачиваемых ресурсов K и L , приведенных также к безразмерным величинам. Поэтому показатель масштабпроизводства (M) можно вычислить как произведение этих двух показателей

$$M = \tilde{K}^{\beta} \cdot \tilde{L}^{\gamma} \quad (18)$$

Пример 1. Задана производственная функция $Y = 2.278K^{0.5} \cdot L^{1.1}$. Найдем отношение предельной производительности труда к средней производительности труда. Предельная производительность труда равна $\frac{\partial Y}{\partial L} = 2,278 \cdot 1,1 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.1}$. Средняя производительность труда $\frac{Y}{L} = \frac{2,278K^{0.5}L^{1.1}}{L} = 2.278K^{0.5} \cdot L^{0.1}$. Тогда отношение предельной величины к средней $\frac{\partial Y / \partial L}{Y / L} = 1,1$.

Аналогично вычисляется отношение предельной фондоотдачи к средней. В нашем примере это отношение составляет 0,5.

Построим семейство изоквант для последовательностей выпуска продукции $Y_0 = 100; 200; 300$ и изоклиналей, проходящих через точки с координатами $(0;0)$, $(20;50)$, $(20;5)$.

Построим изокванту для уровня выпуска $Y_0 = 100$. В диапазон ячеек A8:A17 введем произвольные значения параметра L с равным шагом, воспользуемся формулой 3.1, и в ячейках B8:B17 вычислим K . Рассчитав

табличные значения для изокванты, можно переходить к построению графика.

Построим изоклинали, проходящую через начало координат. Предварительно вычисляем значения коэффициента a для $L_0 = 0$ и $K_0 = 0$. Используя формулу (17) для этих же значений L вычислим значения K в ячейках E8:E17, и переходим к построению графика. На рисунке 7 показан пример построения семейства изоквант и изоклиналей.

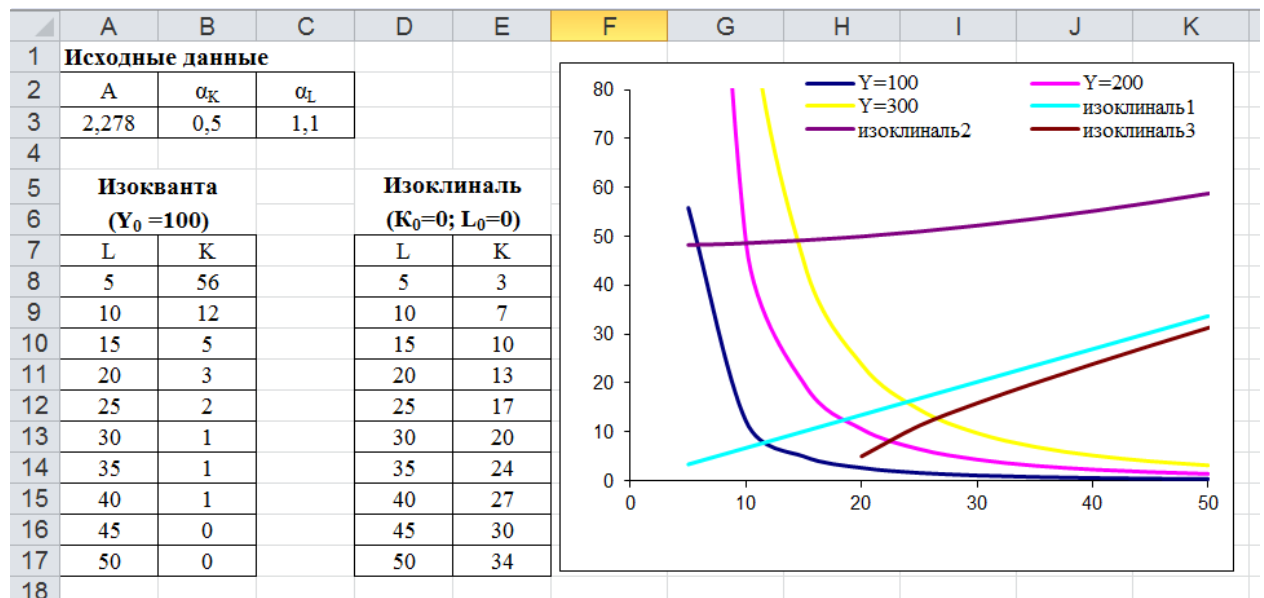


Рисунок 7 – Пример построения изоквант и изоклиналей в MSExcel

Рассчитаем масштаб и эффективность производства, если известно, что выпуск за рассматриваемый период увеличился в 2,5 раза, т.е. $\tilde{Y} = 2,5$, стоимость основных фондов возросла в 2,3, а трудовых ресурсов в 1,2 раза, т.е. $\tilde{K} = 2,3$ и $\tilde{L} = 1,2$.

Предварительно рассчитаем весовые коэффициенты $\beta = \frac{0,5}{0,5 + 1,1} \approx 0,3$;

$$\gamma = \frac{1,1}{0,5 + 1,1} \approx 0,7.$$

$$\text{Показатель эффективности равен } E = \left(\frac{2,5}{2,3}\right)^{0,3} \cdot \left(\frac{2,5}{1,2}\right)^{0,7} = 1,71.$$

$$\text{Масштаб производства (формула 3.4) } M = 2,3^{0,3} \cdot 1,2^{0,7} = 1,46$$

Таким образом, можно сделать вывод, что рост выпуска в 2,5 раза был обусловлен ростом эффективности в 1,71 раза и ростом масштаба в 1,46 раз.

Практическая работа 4. Модель задачи фирмы.

Производственная функция имеет вид $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$. Арендная плата равна r , ставка оплаты труда w .

а) Фирма принимает решение производить Y_0 единиц продукции. Целью фирмы является минимизация издержек. Какой способ производства следует выбрать фирме с учетом поставленной цели? Чему равны минимальные издержки?

б) Предположим, что целью фирмы является максимизация прибыли. На рынке установилась цена единицы товара, равная p денежных единиц. Определите величину предложения и прибыль фирмы в долгосрочном периоде.

в) Предположим, что рассматриваемая фирма управляется трудовым коллективом (то есть управляемая трудом). Целью такой фирмы является максимизация среднего дохода на одного работника. Вид производственной функции $Y = AL^{\beta}$. Используется капитал K_0 единиц по цене r (арендная плата). Определить число работников, выпуск фирмы и средний доход на одного работника данной фирмы.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2	3	1,5	2	1,1	7	7	1,6	1,3	12
α	0,6	0,4	0,15	0,6	0,7	0,07	0,2	0,15	0,5	0,02
β	0,3	0,3	0,17	0,2	0,11	0,75	0,6	0,65	0,4	0,7
r	7	7	6	8	5	7	4	5	6	8
w	4	5	3	2	3	5	2	3	5	6
Y_0	200	400	800	250	950	400	500	200	700	300
p	7	4	5	7	6	9	2	3	4	6
K_0	9	3	4	3	3	5	6	8	3	4

Практическая работа 5. Анализ производства с использованием производственных функций.

Задание. Задана мультипликативная производственная функция некоторой экономической системы $X = AK^{\alpha_K}L^{\alpha_L}$, а также показатели экономики: $\tilde{X}$ - валовой выпуск продукции, $\tilde{K}$ - объем основных фондов, $\tilde{L}$ - объем трудовых ресурсов, выраженные в относительных (безразмерных) единицах

и соответствующих некоторому периоду времени. Значение коэффициента A принять равным 2,278 для всех вариантов.

Требуется найти:

1. Отношение предельной производительности труда к средней производительности труда.
2. Отношение предельной фондоотдачи к средней фондоотдаче.
3. На сколько процентов изменится выпуск, если основные фонды увеличить на 1%.
4. На сколько процентов изменится выпуск, если число занятых увеличить на 1%.
5. Построить семейство изоквант и изоклиналей (не менее трех изоквант и не менее трех изоклиналей, причем одна из изоклиналей должна проходить через начало координат).

№ варианта	α_K	α_L	$\tilde{X}$	$\tilde{K}$	$\tilde{L}$
1	0.6	1.09	2.3	2.87	1.52
2	0.35	0.93	1.8	2.5	1.29
3	0.8	0.14	1.13	1.04	1.16
4	0.94	1.1	6.8	4.9	1.45
5	0.47	4.27	4.5	3.7	1.24
6	1.25	0.09	6.8	4.9	1.45
7	0.62	2.64	2.1	2	1.12
8	0.58	2.67	3.27	3.72	1.15
9	0.64	1.38	2.2	1.74	1.03
10	0.72	0.71	1.25	1.38	1.04

ТЕМА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНТНОГО РАВНОВЕСИЯ.

Взаимодействие между складывающимися на рынке готовой продукции потребительским спросом и предложением фирм приводит к понятию равновесия. Равновесие в общепринятом в экономике смысле – это есть равенство спроса и предложения. Описание процесса перехода в равновесные состояния через равные промежутки времени с указанием механизма (формулы) зависимости последующего состояния от предыдущего называется динамической моделью рыночного равновесия (или

динамической моделью ценообразования) на рынке совершенной конкуренции. В динамических моделях исследуемые переменные – цена, объем спроса и предложения зависят от времени, поэтому обозначаются как $p(t)$, $D(t)$, $S(t)$.

Простейшей и наиболее наглядной динамической моделью установления рыночного равновесия является паутинообразная модель, предложенная Л. Вальрасом. В этой модели предполагается, что покупатель, планируя в t -м периоде объем спроса, знает цену, установившуюся в этом периоде, а производитель в момент подготовки производства не знает, какова же будет цена к моменту выпуска продукции на рынок. Эта асимметричность информации в данной модели формализована следующим образом. Объем рыночного спроса в периоде t зависит от цены этого периода

$$D(t) = \alpha - a \cdot p(t), \text{ где } \alpha, a > 0.$$

Объем рыночного предложения в данном периоде зависит от цены предшествующего периода

$$S(t) = \beta + b \cdot p(t-1), \text{ где } \beta, b > 0.$$

Условие рыночного равновесия в t -ом периоде

$$D(t) = S(t) \text{ или}$$

$$\alpha - a \cdot p(t) = \beta + b \cdot p(t-1).$$

Из этого равенства можно получить зависимость цены последующего периода от предыдущего

$$p(t) = \frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{b}{a} \cdot p(t-1)$$

Сделав замену $\frac{\alpha - \beta}{a} = A$ и $-\frac{b}{a} = B$ получаем $p(t) = A + B \cdot p(t-1)$.

Для того, чтобы понять, при каких условиях наступает рыночное равновесие, можно воспользоваться следующим приемом: выразить текущую рыночную цену $p(t)$ через начальную $p(0)$

$$p(t) = \frac{A}{1-B} + B^t \cdot p(0)$$

$$\text{или } p(t) = \frac{\alpha - \beta}{a + b} + \left(-\frac{b}{a}\right)^t \cdot p(0)$$

Если $|B| < 1$, то будут наблюдаться сходящиеся колебания цены и модель придет в равновесное состояние. В этом случае равновесная цена равна

$$p(t) = \frac{\alpha - \beta}{a + b}.$$

Если $|B| > 1$, то будут наблюдаться расходящиеся колебания цены и модель никогда не придет в равновесное состояние.

Если выполняется условие $|B| = 1$, то колебания цен имеют постоянную амплитуду. Этот случай называется «вырожденная в квадрат паутина». Наблюдается стационарный процесс установления цены.

Пример 1. Задана функция спроса на товар $D(p) = -2,07p + 710$ и функция предложения $S(p) = 1,45p + 55$. Известна также начальная цена товара $p_0 = 55$.

Построим графики спроса и предложения. Точка пересечения этих графиков будет являться равновесной ценой (рисунок 8).

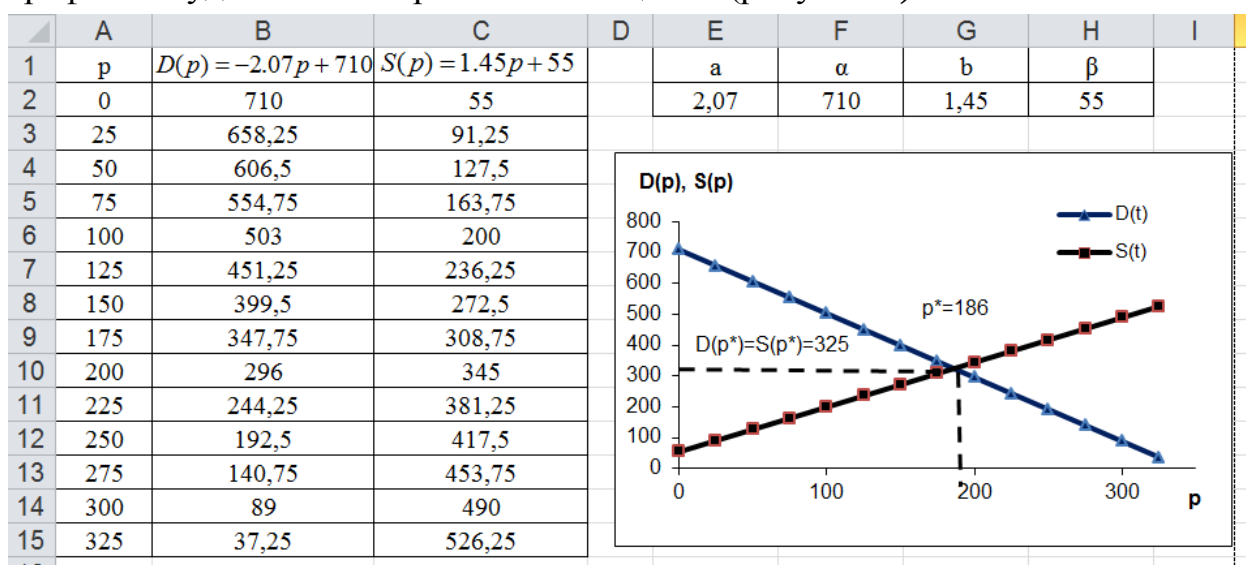


Рисунок 8 – Графики спроса и предложения

Равновесную цену можно рассчитать, решив уравнение

$$D(p) = S(p)$$

$$-2,07p + 710 = 1,45p + 55$$

Откуда равновесная рыночная цена $p^* = 186$, а равновесный объем продаж

$$D(p) = S(p) = 325.$$

Пример 2. Построим динамическую паутинообразную модель по данным примера 1. Для этого в каждый момент времени необходимо рассчитать значения цены по формулам и для каждого значения цены рассчитать соответствующие значения спроса и предложения. Приспособление цены во времени к вариациям спроса и предложения можно отобразить на графике, как показано на рисунке 8.

Практическая работа 6. Построение и анализ моделей рыночного равновесия (модель Эванса, Вальраса, паутинообразная модель).

Задача 1. Задана функция спроса на товар $D(p)$ и функция предложения $S(p)$. Известна начальная цена товара P_0 .

- 1) Постройте графики спроса и предложения. Рассчитайте равновесную цену и равновесный объем продаж.
- 2) Постройте динамическую паутинообразную модель, рассчитав все ее параметры, изобразите ее на графике и покажите равновесную точку.
- 3) Измените параметры модели так, чтобы процесс стал расходящимся, и изобразите изменения на графике.
- 4) Постройте дискретный либо непрерывный аналог модели Эванса, рассчитав цену в каждый момент времени. Изобразите график установления равновесной цены. Как ведет себя график, если изменять значения параметра γ ? Ответ обоснуйте.

N_0	$D(p)$	$S(p)$	P_0
1	$-4.8p+320$	$3.6p+10$	80
2	$-1.53p+370$	$p-60$	205
3	$-1.5p+500$	$p+10$	310
4	$-2.5p+530$	$1.55p+120$	190
5	$-2.75p+790$	$1.55p+220$	276
6	$-1.8p+560$	$0.85p+200$	300
7	$-2p+600$	$0.9p+300$	238
8	$-1.99p+302$	$0.68p+150$	125
9	$-2.07p+710$	$1.45p+55$	55
10	$-2.1p+810$	$1.01p+230$	145

ТЕМА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Суть несовершенной конкуренции в том, что либо продавцы, либо покупатели захватывают рыночную власть над ценообразованием. На практике рыночной властью, т.е. властью над ценообразованием, обладают не только фирмы, являющиеся чистыми монополистами. Во многих отраслях экономики конкурирует небольшое число фирм, каждая из которых обладает некоторой рыночной властью.

Олигополия является преобладающей формой современной рыночной структуры. На олигопольных рынках несколько фирм производят всю или почти всю продукцию. Чем шире олигополия, тем сложнее принятие экономических решений для фирм. Поэтому они могут предпринять стратегические усилия, чтобы затруднить вступление на рынок новых фирм. Олигополист принимает решение по установлению цены и объема выпускаемой им продукции. Экономическое решение олигополиста складывается сложнее, чем монополиста, так как имеет место конкуренция между несколькими фирмами. Поэтому фирма должна тщательно взвесить свои решения с точки зрения реакции соперников. Стратегические соображения должны быть глубокими и всесторонними. Каждая фирма учитывает реакцию конкурентов, зная, что те, в свою очередь, тоже будут взвешивать ее реакцию на их собственные решения. При этом фирма должна принимать во внимание возможность восстановления ее стратегических рассуждений конкурентами, и потому она должна поставить себя на место конкурентов и поразмыслить, какова бы была их реакция. Именно с позиций такой рекомендации разрабатываются принципы оптимального поведения олигополистов.

Определяющим свойством олигопольного рынка является то, что все конкурирующие фирмы могут влиять на цены продукции и затрат. Следовательно, прибыль каждой фирмы зависит и от экономических решений всех остальных фирм. Каково будет в этих условиях оптимальное решение олигополиста по объему выпуска и цене товара? Для получения ответа на этот вопрос необходимо построить математическую модель олигополиста и решить совместно систему, состоящую из задач всех конкурирующих между собой фирм.

Обозначим через n число олигополистов и предположим, что все они выпускают один и тот же товар, применяя m видов затрат. Заметим, что при этом продукции разных фирм могут отличаться рядом признаков (качеством, оформлением и т.д.).

Согласно описания олигополии, цена товара (p) определяется объемом всех выпусков $(q^1, \dots, q^n)$, а цена затрат (w_j) - объемом затрат всех фирм $(x_j^1, \dots, x_j^n)$.

$$p = p(q^1, \dots, q^n), w_j = w_j(x_j^1, \dots, x_j^n), j = 1, \dots, m.$$

При возрастании выпусков цены понизятся. Поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial q^i} < 0, i = 1, \dots, n.$$

Аналогично, если фирмы увеличат покупки производственных факторов, произойдет повышение их цен. Поэтому

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j^i} > 0, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n.$$

Пусть $f^i : (x_1^i, \dots, x_m^i) \rightarrow f^i(x_1^i, \dots, x_m^i)$ - производственная функция i -го олигополиста. Тогда производство описывается системой из n уравнений

$$q^i = f^i(x_1^i, \dots, x_m^i), i = 1, \dots, n.$$

Такого рода модели называются конфликтными задачами принятия решения или *играми n лиц*. Конфликтный характер принятия решения здесь заключается в том, что каждая целевая функция P^i зависит от экономических решений всех олигополистов. Поэтому для нахождения оптимальных решений олигополистов наиболее подходящим аппаратом является теория игр.

Предположим, что имеется всего две конкурирующих по выпуску одного и того же товара фирмы. Это есть частный случай олигополии, называемый *дуополией*. Обе фирмы принимают решения по объему выпуска одновременно и тайно друг от друга, и конечная цена товара зависит от совокупного объема производства этих фирм. То есть, как и в олигополии, дуополисты имеют частичную рыночную власть (частичное влияние на цену товара).

Оптимальные выпуски и цена для линейной модели дуополии

Наименование параметра	Дуополия Курно	Дуополия <u>Стакельберга</u>		
		Фирма 1 S - стратег	Фирма 2 S - стратег	Фирма 1 и Фирма 2 S - стратеги
Равновесный объем продаж фирмы 1 (q_1)	$q_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$	$q_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{2b}$	$q_1 = \frac{a - 3c_1 + 2c_2}{4b}$	$q_1 = \frac{2(a - 3c_1 + 2c_2)}{5b}$
Равновесный объем продаж фирмы 2 (q_2)	$q_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$	$q_2 = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b}$	$q_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{2b}$	$q_2 = \frac{2(a - 3c_2 + 2c_1)}{5b}$
Равновесная цена (p)	$p = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$	$p = \frac{a + 2c_1 + c_2}{4}$	$p = \frac{a + c_1 + 2c_2}{4}$	$p = \frac{a + 2c_1 + 2c_2}{5}$

Практическая работа 7. Моделирование ценообразования на рынке совершенной конкуренции, монополии, олигополии.

Задача 1. У монополиста, максимизирующего свою прибыль, есть два завода, производящие однородную продукцию, с функциями издержек $TC_1(q_1) = aq_1$ и $TC_2(q_2) = b + cq_2 + dq_2^2$ соответственно. Здесь q_1 и q_2 – это объемы выпуска 1-го и 2-го заводов соответственно. Функция рыночного спроса имеет вид $P = m - n(q_1 + q_2)$, где P – цена единицы продукции монополиста. Определить, как распределяется выпуск между заводами, по какой цене реализуется продукция, чему равна прибыль монополиста.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>a</i>	3	4	6	5	5	1	2	8	3	1
<i>b</i>	5	4	3	2	9	7	9	6	8	4
<i>c</i>	0,2	0,2	0,4	0,3	0,3	0,5	1	0,5	0,2	0,4
<i>d</i>	0,3	0,7	0,6	0,7	0,6	0,4	0,8	0,8	0,9	0,8
<i>m</i>	140	150	180	170	162	200	140	190	500	300
<i>n</i>	2	3	5	4	4	2	5	7	6	5

Задача 2. Рыночный спрос на товар описывается соотношением $D(p)$, где p – рыночная цена товара. На рынке работают две фирмы. Каждая фирма имеет предельные издержки, равные c_1 и c_2 .

1. Найдите равновесную цену, равновесный объем продаж каждой фирмы, прибыль в условиях монополии. Постройте графики предельного дохода и предельных издержек фирмы. Покажите равновесный объем продаж и цену.

2. Постройте модель поведения фирм в условиях дуополии Курно:

2.1 Рассчитайте равновесную цену, объемы продаж и соответствующие им прибыли дуополистов.

2.2 Изобразите кривые реакций дуополистов на выпуски друг друга графически, покажите точку равновесия Курно.

2.3 Покажите на графике конкурентные стратегии дуополистов во временном аспекте.

3. Постройте модель дуополии Стакельберга: рассчитайте равновесную цену, объемы продаж, прибыли дуополистов, в случае если:

- 3.1 фирма 1 является S – стратегом (1 равновесие Стакельберга).
 3.2 фирма 2 является S – стратегом (2 равновесие Стакельберга).
 3.3 обе фирмы являются S – стратегами (неравновесие Стакельберга).
4. Создайте сводную таблицу, в которой указаны все расчетные параметры. Сравните значения параметров в условиях монополии, дуополии Курно и Стакельберга. Сделайте выводы.
5. Предположим, что предельные издержки дуополистов равны, то есть $c_1 = c_2 = c$. Чему в этом случае равны значения управляемых параметров?

№	$D(p)$	c_1	c_2
1	325-p	16	12
2	600-1,5p	27	25
3	350-0,5p	14	12
4	175-p	8	6
5	250-p	50	54
6	130-2p	19	17
7	150-p	20	21
8	720-3p	78	75
9	300-p	13	15
10	415-0,8p	80	85

ТЕМА 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА И БЛАГОСОСТОЯНИЯ

Практическая работа 8. Модель экономического роста Р.Солоу.

Задача 1. Пусть в статической макроэкономической модели потребление есть линейная функция от выпуска (национального дохода) $C = 0,2Y + 15$, где коэффициент 0,2 называется склонностью к потреблению и выражает пропорцию, в которой потребление возрастает при росте дохода, а 15 - это базовое потребление. Пусть величина инвестиций постоянна и равна 8. Определите равновесный национальный доход.

Задача 2. Пусть в долгосрочном плане кроме тенденции роста экономика обнаруживает наличие волн подъема и спада конъюнктуры. Будем считать,

что при этом инвестиции кратны приросту валового выпуска:
 $I^t = v(Y^{t-1} - Y^{t-2})$, где коэффициент $v > 0$ - фактор акселерации. Потребление задается линейной функцией от выпуска с временным лагом продолжительностью в 1 период (год): $C^t = aY^{t-1} + b$, где $0 < a < 1, b > 0$. Исходя из условия бюджетного баланса, постройте уравнение динамики национального дохода и определите его значение через 8 лет, если $a = 0,75$, $b = 20$, $v = 1,05$, $Y^0 = 50$, $Y^1 = 55$.

ТЕМА 7. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ.

Практическая работа 9. Моделирование межотраслевых потоков.

Пусть все народное хозяйство состоит из трех отраслей, каждая из которых выпускает один вид продукции. В таблице указаны расходные коэффициенты (прямые затраты) a_{ij} единиц продукции i – й отрасли, используемые как сырье (промежуточный продукт) для выпуска единицы продукции j -й отрасли, а также количество единиц u_i продукции i -й отрасли, предназначенные для реализации (конечный продукт).

Пусть дополнительно заданы расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующей отрасли, трудоемкость в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы продукции, стоимость соответствующего материала и оплата за 1 человеко-час.

Определить:

1. Коэффициенты полных затрат.
2. Валовой выпуск для каждой отрасли.
3. Производственную программу отраслей (итоговую таблицу, в которой показано внутрипроизводственное потребление по отраслям, конечный продукт, валовой выпуск). Проверить правильность составления баланса.
4. Коэффициенты косвенных затрат.
5. Суммарный расход сырья, топлива, трудовых ресурсов на выполнение производственной программы.
6. Расход сырья, топлива, трудовых ресурсов по отраслям.
7. Производственные затраты в денежных единицах по отраслям.
8. Параметры агрегирования при объединении первой и третьей отраслей и новую производственную программу.

Выбрать вариант. Расчеты провести с использованием MSEXCEL или MathCad. Показать последовательность этапов расчетов. Все исходные и расчетные показатели свести в таблицы.

Варианты заданий

Вариант 1

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,1	0,4	0	300

II	0,2	0,7	0,1	200
III	0	0,3	0,2	300

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2,4	2,4	0,8	5
Сырье Б	0,5	0,6	1,6	12
Топливо	2	1,8	2	7
Трудоемкость	11	23	30	1,4

Вариант 2

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,8	0,2	0	100
II	0,2	0,3	0,1	400
III	0	0,1	0,2	300

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1,6	0,4	0,8	15
Сырье Б	0	0,6	1,6	10
Топливо	2	1,8	2,2	8
Трудоемкость	10	30	40	2,2

Вариант 3

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,6	0,2	0	300
II	0,3	0,6	0,1	100
III	0	0,1	0,2	400

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	3,4	2,4	1,8	15
Сырье Б	0,2	0,6	1,6	12
Топливо	2	1,8	2,2	2
Трудоемкость	20	20	30	1,2

Вариант 4

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,5	0,2	0,1	200
II	0,4	0,5	0,1	200
III	0	0,1	0,2	400

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1,7	1,4	0,8	5
Сырье Б	1	1,6	1,6	12
Топливо	2	1,8	3,2	12
Трудоемкость	40	20	30	1,3

Вариант 5

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	

I	0,9	0,1	0	400
II	0,2	0	0,1	100
III	0,3	0,1	0,2	400

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2,2	1,7	1	9
Сырье Б	1,3	1,6	1	13
Топливо	2,1	2,8	2,4	3
Трудоемкость	16	21	32	1,3

Вариант 6

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,1	0,2	0	400
II	0,3	0	0,1	200
III	0,2	0,4	0,2	200

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2,4	2,2	1,8	4
Сырье Б	1,2	0	2,6	10
Топливо	3	2,8	3,2	5
Трудоемкость	20	10	26	2,2

Вариант 7

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,2	0,2	0	500
II	0,2	0,7	0,1	200
III	0	0,3	0,2	100

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2,4	1,4	0,6	7
Сырье Б	1	0,6	2,6	14
Топливо	1	1,3	2	5
Трудоемкость	14	24	26	1,5

Вариант 8

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,3	0,2	0	400
II	0,5	0	0,5	400
III	0	0,4	0,2	200

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1,8	0,4	0,8	7
Сырье Б	2	1,6	0,6	15
Топливо	1,2	1,9	1,2	3
Трудоемкость	15	22	18	2,2

Вариант 9

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0,6	0,2	0	200
II	0,2	0,7	0,1	500
III	0	0,2	0,2	100

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1,6	2,6	1,2	8

Сырье Б	0,6	0	1,8	14
Топливо	2,2	2,4	2,4	4
Трудоемкость	12	22	31	1,4

Вариант 10

Отрасли	Прямые затраты			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0,2	0,2	200
II	0,3	0	0,1	300
III	0,7	0,1	0,2	400

	Расходные нормы			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1,5	2,5	0,9	6
Сырье Б	0,5	0,2	1,5	10
Топливо	1,2	1,4	2,5	2,5
Трудоемкость	12	25	20	1,5

ТЕМА 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Практическая работа 10. Модель формирования портфеля инвестиций.

Рассмотрим три вида ценных бумаг, для которых есть данные о доходах за прошедшие 12 лет: это акции компании AT&T, GeneralMotors и USS – холдинга компании USSteel. Показатели дохода от акций (в процентах) приводятся в таблице.

год	AT&T	GeneralMotors	USS
1	30	22,5	14,9
2	10,3	29	26
3	21,6	21,6	41,9
4	-4,6	-27,2	-7,8
5	-7,1	14,4	16,9
6	5,6	10,7	-3,5
7	3,8	32,1	13,3
8	8,9	30,5	73,2
9	9	19,5	2,1
10	8,3	39	13,1
11	3,5	-7,2	0,6
12	17,6	71,5	90,8

Задание 1. Сформировать портфель минимального риска из трех видов ценных бумаг при условиях, что:

- ожидаемый доход портфеля составит не менее 15%;
- не более 75% общей суммы средств можно вложить в акции одного вида.

Задание 2. Самостоятельно сформулируйте и решите обратную задачу нахождения оптимального портфеля с максимальной эффективностью и заданной верхней границей риска.

Для решения используйте «Поиск решения» табличного процессора EXCEL.

Практическая работа 11. Решение типовых задач по математике финансового менеджмента.

Процентная и учетная ставка

Задача 1. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1млн. руб. на полгода. Банк выделил ему эту ссуду с годовой ставкой 12%. Произведите расчеты по схеме простых и сложных процентов в

случае применения банком: а) процентной ставки; б) учетной ставки. Какой случай более выгоден кредитору, а какой – заемщику?

Плавающие процентные ставки

Задача 2. Заемщик получил ссуду 1000000 руб., которую должен погасить одним платежом через 5 лет. Первые 2 года годовая процентная ставка равна 12%. В оставшееся время годовая процентная ставка равна 16%. Найти сумму, возвращаемую кредитору, и процентные деньги. Расчет произвести по схеме простых и сложных процентов.

Смешанная схема начисления процентов

Задача 3. Клиент внес в банк 250 тыс. руб. под 9,5 % годовых. Через 2 года и 270 дней он изъясил вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком сложных процентов и смешанного метода, а также процентные деньги. В каком случае клиент получит больше и на сколько? (Число дней в году 360)

Задача 4. На сумму 600000 рублей ежеквартально по ставке 12% годовых начисляются сложные проценты в течение 14 месяцев. Определить наращенную сумму и процентные деньги по схеме сложных процентов и по смешанному методу.

Определение срока возврата ссуд

Задача 5. Заемщик получил 15.01.05 ссуду 50000 \$, вернуть которую необходимо 12.09.05, а расчет производится по схеме простых процентов с 10%-ной годовой процентной ставкой. Год не високосный. Какую сумму должен вернуть заемщик кредитору при каждом из способов расчета срока возврата ссуды (английский, французский, немецкий).

Ломбардные кредиты

Задача 6. Клиент обратился в банк за получением ломбардного кредита и передал в залог 150 акций. Банк согласился предоставить кредит на 3 месяца исходя из 80% курсовой стоимости акций. Годовая учетная ставка равна 18%, а затраты банка по обслуживанию долга в течение 3 месяцев – 200 руб.

1) На какой кредит может рассчитывать клиент банка, если текущий курс его акций составляет 300 руб. за акцию, а кредит выдается с 16.03.08 по 16.06.08?

2) Предположим, что заемщик выплатил 16.06.08 банку только часть долга – 6000 руб. и попросил продлить срок погашения долга еще на 3 месяца, увеличив учетную ставку до 20%. Сколько должен будет заплатить заемщик банку 16.09.08?

Примечание: при расчетах процентных денег учитывается точное число дней в каждом месяце, а год принимается равным 360 дням. День выдачи и день погашения ломбардного кредита считаются одним днем.

Эффективная и номинальная процентные ставки

Задача 7. Коммерческий банк планирует введение ставок по депозитам исходя из эффективной доходности (определяемой уровнем рентабельности по операциям за минусом издержек) 12% годовых. Какое значение номинальной процентной ставки может быть предложено банком для депозита сроком на 3 месяца?

Учет инфляции

Задача 8. Банк выдал кредит на 6 месяцев в 500 тыс. рублей. Ожидаемый месячный уровень инфляции – 2,0%. Требуемая реальная доходность операции – 10% годовых (простые проценты). Определите ставку процентов по кредиту с учетом инфляции, размер наращенной суммы и величину процентного платежа.

Задача 9. Кредит в 2 млн.рублей выдан на три года. На этот период прогнозируется рост цен в 1,5 раза. Определить ставку процентов при выдаче кредита, наращенную сумму долга и процентные деньги, если реальная доходность должна составлять 12% годовых по ставке сложных процентов.

Консолидация платежей

Задача 10. Фирма в погашение задолженности банку за предоставленный под 15% годовых кредит (простые проценты), который получен 01.01, должна произвести три платежа – 200 тыс. руб., 270 тыс. руб. и 330 тыс. руб. в сроки 20.04, 25.05, 15.06. Фирма предложила банку объединить все платежи в один и погасить его 01.06. Определить величину консолидированного платежа (год принять 365 дней).

Задача 11. Фирма имеет ряд финансовых обязательств перед одним кредитором – 2,5 млн. руб., 3,1 млн. руб. и 2,7 млн.руб., которые должна

погасить через 40, 70 и 160 дней после 01.01 текущего года. По согласованию сторон решено заменить их одним платежом, равным 9 млн. руб. с продлением срока оплаты, используя простую процентную ставку 12%. Определить срок уплаты консолидированного платежа (год принять 365 дней).

Задача 12. Кредитор предоставил одному заемщику 4 ссуды по схеме простых процентов с годовой процентной ставкой 20%. Параметры ссуд указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Сведения о ссудах

Номер ссуды	1	2	3	4
Размер ссуды, руб.	100000	200000	200000	500000
День выдачи	01.06.05	01.07.05	01.08.05	01.09.05
День погашения	01.10.05	01.11.05	01.12.05	01.01.06

После получения последней ссуды заемщик захотел консолидировать все ссуды. Воспользовавшись способом расчета $365/360$, найти дату консолидированного платежа при условии, что партнеры договорились о консолидации платежей без изменения суммы платежа.

Задача 13. Заем в \$200000, предоставленный на срок 5 лет с расчетом по схеме сложных процентов с годовой процентной ставкой 6%, погашается аннуитетами. Часть каждого аннуитета, идущая на погашение процентных денег, составляет 6% существующего в момент совершения погашающего платежа остатка долга (без учета процентных денег). Вычислить размер аннуитета и составить план погашения займа.

Задача 14. Заем \$150000, предоставленный на срок 5 лет с расчетом по схеме сложных процентов с годовой процентной ставкой 5%, погашается аннуитетами с одинаковыми выплатами долга. Составить план погашения займа.

Ипотечные кредиты

Задача 15. Агентство по ипотечному жилищному кредитованию предоставило заемщику заем в размере 905107 рублей на покупку квартиры сроком на 180 месяцев. За пользование займом заемщик уплачивает

заимодавцу проценты из расчета годовой процентной ставки 12,5%. Проценты начисляются ежемесячно на остаток суммы займа. Заемщик погашает заем и уплачивает проценты путем ежемесячных платежей. Составить план погашения займа.

Доходность финансовой операции

Задача 16. Фирме предоставлен кредит на срок 270 дней с расчетом по схеме простых процентов с годовой процентной ставкой 12%. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 1% суммы кредита. Считая, что в году 360 дней, определить доходность этой финансовой операции для кредитора. На сколько процентов удержание комиссионных повышает доходность финансовой операции для кредитора?

ТЕМА 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЛОГИСТИЧЕСКОГО МЕНЕДЖМЕНТА.

Логистика – это наука об управлении материальными, сервисными и сопутствующими им потоками в пространстве и во времени, от первичных поставщиков до конечных потребителей. Таким образом, объектом исследования и управления в логистике являются основные и сопутствующие потоки. К основным потокам относятся:

- материальные потоки (материальные ресурсы, незавершенное производство, готовая продукция);
- сервисные потоки – это процессы предоставления услуг для обеспечения потребностей клиентов (транспортировка, погрузка, разгрузка, экспедирование товаров и т.д.).

сопутствующие потоки – это информационные и финансовые потоки.

Предметом исследования в логистике является оптимизация ресурсов в экономической системе при управлении основными и сопутствующими потоками путем принятия рациональных управленческих решений.

Рассмотрим простейшие постановки некоторых видов логистических задач и этапы их решения.

Закупочная логистика

Любое предприятие нуждается в закупках сырья, топлива, материалов, в поставках товаров для их продажи. Следовательно, возникает проблема, связанная с деятельностью предприятия по организации и управлению закупками. Применительно к закупочной деятельности любой производственной (торговой) фирмы можно выделить следующие задачи:

1. Изготовить или закупать изделие (комплектующие, детали и прочее)?
Данная задача решается на основе подсчета общих логистических затрат по первому и второму варианту.
2. Где закупать? Это задача выбора поставщика по месту расположения его складов на основе анализа полных общих логистических затрат. Например, ставится задача выбора из двух альтернатив: либо приобретать товары у местных поставщиков либо у поставщиков из другого региона.
3. У кого закупать? Это задача о выборе поставщика. Состоит в том, чтобы для каждой товарной позиции выбрать наилучшего поставщика по заданной системе критериев.

Практическая работа 12. Моделирование и решение задач логистического менеджмента.

Задача 1.(закупочная логистика).

Задача выбора варианта закупки товаров у местных или удаленных поставщиков.

Основные поставщики фирмы *L*, расположенной в Москве и осуществляющей торговлю широким ассортиментом продовольственных товаров, также размещены в столице России (местные поставщики). Однако многие из товарных групп (позиций) ассортимента торговой фирмы могут быть закуплены в других городах, например, в городе *N*, или за границей (территориально удаленные поставщики). Начальные данные о: названии позиций ассортимента, их ценах у местных поставщиков (в Москве) и в городе *N*, а также об удельной закупочной стоимости груза в городе *N* (в тысячах рублях за один кубический метр) представлены в таблице.

Номер товара	Название товарной группы	Удельная закупочная стоимость в городе <i>N</i> (в тысячах рублей за 1 куб метр)	Цена в городе <i>N</i>	Цена в Москве
1	Консервы мясные	11	12	14,4
2	Консервы рыбные	12	20	23
3	Консервы овощные	10	10	14,5
4	Консервы фруктовые	15	15	18
5	Кондитерские изделия	88	100	115
6	Варенье, джем, мед	37	50	65
7	Чай натуральный	110	120	138
8	Крупа и бобовые	23	20	22
9	Макаронные изделия	17	20	26
10	Виноградные вина	70	70	80,5
11	Коньяк	120	100	105
12	Шампанское	50	60	66
13	Пиво	25	30	33
14	Безалкогольные напитки	20	24	30

15	Мука "Мелькрук"	15	17	23,9
16	Макароны Maltagliati	17	17,5	19,9
17	Вода питьевая "Вита-Архыз"	17,7	19,7	21,9
18	Корм для собак Pedigree	172,3	195,5	205,5
19	Каша рисовая в термостакане	7,8	9,1	9,9
20	Кукурузные хлопья Nestle	37,8	41,2	44,9
21	Томатная паста "Помидорпром"	19,4	13,3	15,9
22	Маслины черные Avis	21,3	12,8	15,9
23	Кукуруза сладкая SunnyHipo	9,2	10,7	11,9
24	Сыр Maasdam	117,4	131,2	139,9
25	Майонез "Сила лета!"	6,5	6,9	7,9
26	Суп GalinaBlanka	4,7	5,1	5,9
27	Тортини "Махариши"	18,9	13,2	16,9
28	Фисташки Chaka	8,3	11,4	12,9
29	Семечки	40,1	42,5	46,9
30	Хлебцы Lexsands	20,6	23,4	27,9

Срок доставки грузов составляет 10 дней, срок хранения страховых запасов составляет 5 дней, при этом ставка процентов за кредит 36%. Размер ставки за экспедирование груза равен 2%. Транспортный тариф составляет 3000 рублей за кубометр перевозимого груза. Расходы на ручные операции с грузом 200 рублей за кубометр. На основе анализа общих затрат обосновать выбор между местным и территориально удаленным поставщиком по каждой позиции ассортимента. Результаты представить графически.

Задача 2 (сбытовая логистика).

Вычисление методом центра тяжести грузопотоков места размещения распределительного склада.

У фирмы, реализующей продукцию на рынках сбыта K_a , K_b , K_c , заключены договоры с постоянными поставщиками $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ из разных регионов. Увеличение объемов продаж заставляет руководство фирмы изучить вопрос

о месте расположения нового распределительного склада, обеспечивающего бесперебойное снабжение клиентов K_a , K_b , K_c .

Тарифы для поставщиков на перевозку продукции составляют:

$$Tn_1 = 1,12 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]};$$

$$Tn_2 = 1,27 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]};$$

$$Tn_3 = 0,94 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]};$$

$$Tn_4 = 1,43 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]}.$$

Тарифы для клиентов на перевозку продукции:

$$Tk_a = 0,83 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]};$$

$$Tk_b = 0,54 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]};$$

$$Tk_c = 0,67 \text{ [у.д.е./(\text{тонн} \cdot \text{км})]}.$$

Поставщики доставляют среднюю партию поставки в размерах:

$$Qn_1 = 145 \text{ тонн};$$

$$Qn_2 = 85 \text{ тонн};$$

$$Qn_3 = 110 \text{ тонн};$$

$$Qn_4 = 170 \text{ тонн}.$$

Размеры партий поставок клиентам со склада руководство фирмы предполагает следующими:

$$QK_a = 145 \text{ тонн};$$

$$QK_b = 85 \text{ тонн};$$

$$QK_c = 110 \text{ тонн}.$$

Координаты месторасположения клиентов и поставщиков указаны в таблице.

Клиент	X	Y
K_a	0	575
K_b	300	500
K_c	550	600
Поставщик	X	Y
Π_1	150	125
Π_2	275	300
Π_3	400	275
Π_4	625	100

Найти методом центра тяжести грузопотоков такие координаты места расположения распределительного склада, которые минимизировали бы общие затраты фирмы. Результат дополнить графической иллюстрацией с помощью пузырьковой диаграммы.

Задание 3 (транспортная логистика).

Задача выбора маршрута при смешанных перевозках.

Выбрать маршрут и вид транспорта для осуществления смешанной международной перевозки контейнеров из Пуссана (Республика Корея) до Москвы. Все маршруты, кроме 8-го проходят через Гамбург. Виды маршрутов и их характеристики:

1. Маршрут через порт Котка (Финляндия). Виды транспорта: морской (морская перевозка осуществляется компанией APL) + авто.
2. Маршрут через порт Санкт-Петербург. Виды транспорта: морской (морская перевозка осуществляется компанией APL) + авто.
3. Маршрут через порт Котка. Виды транспорта: морской (морская перевозка осуществляется компанией CS) + авто.
4. Маршрут через порт Санкт-Петербург. Виды транспорта: морской (морская перевозка осуществляется компанией CS) + авто.
5. Маршрут через порт Котка. Виды транспорта: морской +ж/д + авто, при этом возврат контейнера по ж/д.
6. Маршрут через порт Санкт-Петербург. Виды транспорта: морской +ж/д + авто, при этом возврат контейнера по ж/д.
7. Маршрут через порт Санкт-Петербург. Виды транспорта: морской+авто, при этом автомобильная перевозка под режимом «таможенный перевозчик».
8. Маршрут через порт Восточный (по Транссибу). Виды транспорта: морской+ж/д+авто, при этом возврат контейнера по ж/д.

Составляющие затрат для вариантов маршрутов представлены в таблице.

Номер маршрута (порт)	Виды транспорта	Морские перевозки		Наземные перевозки	
		20-ти фут.	40-ка фут.	20-ти фут.	40-ка фут.
1. Котка (Финляндия)	Морской (APL)+авто	1680	2910	1100	1100
2. С.-Петербург	Морской (APL)+авто	1860	3400	600	600
3. Котка (Финляндия)	Морской (CS)+авто	1950	3420	1100	1100
4. С.-Петербург	Морской (CS)+авто	2040	3600	600	600

5. Котка (Финляндия)	Морской +ж/д	1680	2910	1307	1675
6. С.-Петербург	Морской+ж/д+авто	1860	3350	590	930
7. С.-Петербург	Морской+авто	1860	3350	900	900
8. Восточный (по Транссибу)	Морской+ж/д+авто	1075	1950	1276	2167

В таблице указаны сроки доставки, причем время ожидания включает время перевалки, ожидания на таможне, погрузки и разгрузки.

Номер маршрута (порт)	Морские перевозки	Наземные перевозки	Время ожидания
1. Котка (Финляндия)	29	2	4
2. С.-Петербург	30	1	11
3. Котка (Финляндия)	34	2	4
4. С.-Петербург	35	1	11
5. Котка (Финляндия)	29	7	7
6. С.-Петербург	30	5	11
7. С.-Петербург	30	1	10
8. Восточный (по Транссибу)	2	16	5

Расходы на обработку контейнеров в порту Котка \$182. Зимняя надбавка за ледовую обстановку в Санкт-Петербурге \$50. Закупочная стоимость товара \$35000. Банковская ставка по краткосрочным валютным кредитам 15%. Рассчитайте значение затрат по каждому виду маршруту и выберите маршрут при перевозке 20-ти футовыми контейнерами и маршрут при перевозке 40-ка футовыми контейнерами.

Задание 4 (логистика складирования).

Определение потребностей в складских площадях.

Торговая компания имеет склад. Годовой грузооборот склада составляет 28 тыс.тонн при среднем сроке хранения запасов 25 дней. Площадь имеющегося

у компании склада 2000м^2 , высота потолков 5м. Товар укладывается в штабели по 2 блока. Каждый блок состоит из двух европоддонов, складированных в два яруса. Габаритные размеры европоддона -1,2м x 0,8м, высота поддона с товаром – 1,6м. При данном виде укладки нагрузка на 1м^2 площади складирования при высоте укладки 1м равна 0,6. В последние годы объемы продаж ежегодно растут. Руководство компании планирует увеличить продажи до 45тыс.тонн.

Вопросы:

1. Сможет ли имеющийся склад поддерживать увеличение объема продаж? Для этого рассчитайте: а) максимально возможный объем хранения товаров на складе; б) складской объем, занимаемый складированием грузов (при грузообороте 28000тонн).
2. Определите дополнительную складскую площадь.

Примечание: при расчете максимально возможного объема хранения товаров на складе и дополнительных складских площадях учтите следующую рекомендацию: при планировании склада рекомендуется поддерживать соотношение площади, занятой под складирование, и площади, не используемой для хранения, в пропорции 2:1.

Задача 5. Моделирование ABC-анализа и XYZ-анализа.

На основе данных, представленных в таблице, провести ABC-анализ и XYZ-анализ. Рассчитайте, какая доля ассортимента продукции принадлежит каждой группе. Постройте гистограмму ABC-анализа и гистограмму XYZ-анализа.

№ позици и	Реализация за месяц											
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1	1200	1000	700	1300	1100	1350	900	1400	800	900	1200	1100
2	40	40	50	20	50	30	50	20	40	20	50	30
3	1450	1500	1700	1600	1600	1760	1600	1600	1600	1600	1440	1760
4	190	210	180	200	190	190	190	190	180	200	200	200
5	860	890	980	110	100	990	980	980	990	990	990	980

				0	0							
6	60	50	40	70	60	60	60	70	70	50	70	70
7	250	200	140	110	240	190	130	120	240	180	130	120
8	120	200	140	160	120	210	150	150	120	220	150	160
9	420	470	455	465	420	460	455	465	430	470	455	475
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	50	80	50	60	40	90	40	60	40	80	30	70
11	234	230	210	234	249	215	225	249	234	230	210	249
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	500	550	530	570	520	550	510	550	500	550	510	570
13	800	980	1000	750	760	1020	1040	710	760	1020	1080	670
14	90	60	50	80	80	50	60	90	70	50	60	90
15	80	100	80	60	70	90	70	60	60	90	70	70
16	60	80	90	50	50	80	80	50	50	70	80	50
17	30	50	40	40	40	40	30	30	40	40	30	20
18	30	20	40	50	20	20	50	60	10	30	50	50
19	90	110	130	60	100	100	120	70	90	90	110	70
20	30	50	60	40	30	60	60	40	20	60	70	50
21	50	40	40	70	50	30	50	80	40	20	50	90

Задача 6. На складе компании STECO хранится короткомерный волоконно-оптический сетевой кабель (СК), используемый для подключения Internet-маршрутизаторов к локальному сетевому оборудованию. Отпускная цена каждого СК составляет \$8.

Ежемесячный спрос на СК за предыдущий год представлен в таблице.

месяц	спрос, шт
Январь	5300
Февраль	5100
Март	4800
Апрель	4700
Май	5000
Июнь	5200
Июль	5300

Август	4900
Сентябрь	4800
Октябрь	5000
Ноябрь	4800
Декабрь	5100

Компания оценивает стоимость размещения одного заказа на СК (вне зависимости от количества заказанных единиц) в \$25. Стоимость хранения одного СК в течение года составляет 24% его отпускной цены.

1) Определить оптимальный размер заказа:

- вычислить аналитически;
- с использованием средства EXCEL «Поиск решения»;
- графически.

2) Проведите анализ чувствительности параметров модели.

3) Предположим, что поставщик кабеля предлагает компании оптовые скидки в качестве стимула развития деловой активности. Он согласен предоставить скидку \$0.10 на каждый купленный кабель, если размер заказов компании будет не менее 5000 штук. Разработайте модель управления запасами с учетом оптовой скидки (используйте «Поиск решения», проведите аналитические расчеты и постройте графики).

4) Предположим, что компания имеет собственные производственные мощности, которые используются для производства ряда типов кабеля, хранящихся в запасах. Годовой спрос на кабели составляет 48000 штук. Затраты, связанные с переходом на выпуск данного кабеля составляют \$100, а производственная мощность равна 400 штук в день. Стоимость производства одного кабеля равна \$1, годовая процентная ставка - 0,24, количество рабочих дней в году – 240. Определить оптимальный размер партии продукции и минимальные ежедневные затраты на хранение и переналадку.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 224 с.- ISBN 978-5- 16-005313-4. – URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=363775> – (дата обращения 31.08.2019). – Текст: электронный.
2. Булыгина, О.В. Имитационное моделирование в экономике и управлении : учебник / О.В. Булыгина, А.А. Емельянов, Н.З. Емельянова ; под ред. д-ра экон. наук, проф. А.А. Емельянова. – Москва : ИНФРА-М, 2019. – 592 с. – ISBN 978-5-16-014523-5. – URL: <http://znanium.com/catalog/product/988974>. – (дата обращения 31.08.2019). – Текст: электронный.
3. Власов, М. П. Моделирование экономических систем и процессов : учебное пособие / М.П. Власов, П.Д. Шимко. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 336 с. – ISBN 978-5-16-005560-2. – URL: <http://znanium.com/bookread.php?book=344989>. – (дата обращения 31.08.2019). – Текст: электронный.
4. Новиков, А.И. Экономико-математические методы и модели / А.И. Новиков. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. – 532 с. – ISBN 978-5-394-02615-7. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454090>. – (дата обращения 31.08.2019). – Текст: электронный.
5. Токарев, К. Е. Имитационное моделирование экономических процессов : учебное пособие / К.Е. Токарев. – Волгоград : Волгоградский ГАУ, 2015. – 88 с. – URL: <http://znanium.com/catalog/product/615286>. – (дата обращения 31.08.2019). – Текст: электронный.
6. Лычкина, Н. Н. Имитационное моделирование экономических процессов : учебное пособие / Н.Н. Лычкина. – Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 254 с. – ISBN 978-5-16-004675-4. – URL: <http://znanium.com/bookread2.php?book=429005>. – (дата обращения 31.08.2019). – Текст: электронный.