

Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Л.А.Осипова

Алгебра

Множества и бинарные отношения. Алгебраические структуры

*Методические указания к самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий)
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль «Математика и Информатика»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:512.5](072)

ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.144я73

О 74

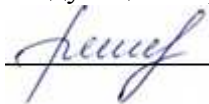
Осипова Л.А.

О 74 Алгебра. Множества и бинарные отношения. Алгебраические структуры : методические указания к самостоятельной работе (в форме индивидуальных заданий) для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика» / Л.А.Осипова. Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 58 с.

В работе изложены методические указания к самостоятельной работе студентов по темам «Множества и бинарные отношения». «Алгебраические структуры»: основные теоретические факты по данным темам, примеры решения типовых задач, варианты индивидуальной самостоятельной работы и методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 8 от 16.03.2020
Заведующий каф. МФММ



/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 8 от 18.05.2020
Председатель методической комиссии
ФИМЭ



/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:512.5](072)

ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.144я73

О 74

© Осипова Людмила Александровна
© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2020
Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	6
1.1. МНОЖЕСТВА И БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ	6
1.1.1. Множество. Способы задания множеств.....	6
1.1.2. Подмножество. Равенство множеств	7
1.1.3. Операции над множествами	8
1.1.4. Декартово произведение.....	9
1.1.5. Бинарные отношения	10
1.1.6. Свойства бинарных отношений	13
1.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ	15
1.2.1. Понятие алгебраической операции.....	15
1.2.2. Свойства алгебраических операций	17
1.2.3. Понятие алгебраической структуры и некоторые ее замечательные элементы.	19
1.2.4. Основные алгебраические структуры: группа.....	20
2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ	22
2.1. Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных заданий	22
2.2. Требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы	25
2.3. Варианты индивидуальной работы.....	26
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	31

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий) по темам «Множества и бинарные отношения». «Алгебраические структуры» дисциплины «Алгебра».

Целью изучения дисциплины «Алгебра» является подготовка к обучению математике, научной работе в области алгебры и учебно-методической работе в общеобразовательных учреждениях.

Алгебра — раздел математики, изучающий алгебраические системы (также иногда называемые алгебраическими структурами), такие как группы, кольца, поля, модули, решётки, а также отображения между такими структурами.

Примерами алгебраических структур с бинарной операцией являются полугруппы, моноиды, группы, квазигруппы, полурешётки, две бинарных операции — в кольцах, почтикольцах, полях, решётках. Более сложными примерами алгебраических структур являются модули над кольцами, векторные пространства, алгебры над кольцами, алгебры Ли. Для освоения данной дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках освоения математических дисциплин школьного курса: геометрия, алгебра, арифметика, теория вероятностей.

Целью методических указаний является содействие в организации процесса самостоятельной работы студентов в ходе изучения основных понятий теории множеств, бинарных отношений и основных алгебраических структур, которая является следствием правильно организованной учебной деятельности на аудиторных занятиях. Для этого преподавателю необходимо целенаправленно формировать у студентов план учебных действий, как некоторую схему освоения учебного предмета.

Основные задачи изучения тем «Множества и бинарные отношения». «Алгебраические структуры» в вузовском курсе алгебры следующие:

- 1) сформировать понимание значимости данных тем в будущей профессиональной деятельности учителя математики;
- 2) ознакомить с основными понятиями и методами теории множеств, бинарных отношений и алгебраических структур;
- 3) сформировать представление о применении множеств, бинарных отношений и основных алгебраических структур для решения задач алгебры, математического анализа, а также задач прикладного характера.

В методические указания включено:

- 1) справочный материал (основные понятия, свойства, теоремы, формулы);
- 2) примеры решения основных типовых задач;
- 3) особенности оценивания самостоятельной работы в балльно-рейтинговой системе;
- 4) варианты внеаудиторной самостоятельной работы (в форме индивидуальных заданий);
- 5) требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы;
- 6) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения об основных фактах теории множеств, бинарных отношений и основных алгебраических структур представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних, индивидуальных и контрольных заданий.

Решения основных типовых задач подробны, снабжены достаточными пояснениями.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании тем «Множества и бинарные отношения». «Алгебраические структуры» и логике их развертывания,

эффективно подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить индивидуальную самостоятельную работу. Кроме того, данные материалы могут казаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших классах.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. МНОЖЕСТВА И БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1.1.1. Множество. Способы задания множеств.

Множество – это любая совокупность объектов, которые называются элементами множества.

В этом интуитивном определении, принадлежащим немецкому математику Георгу Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: $A, B, X, Y, A_1, A_2, \dots$, элементы множеств – строчными буквами: $a, b, x, y, a_1, a_2, \dots$.

Символ $\in$ обозначает *принадлежность*. Запись $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A . Если элемент x не принадлежит множеству A , то пишут $x \notin A$.

Множества бывают: конечные; частный случай – единичное (одноэлементное); бесконечные; пустое ($\emptyset$).

Определение. Пустым множеством называют множество, не содержащее ни одного элемента.

Способы задания (описания) множеств:

1) Множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, т.е. записывается в виде: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. При задании множества перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурных скобках и разделяют запятыми. Перечислением можно задавать только *конечные* множества.

2) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T , которые обладают общим свойством $P(x)$. В этом случае используется обозначение $A = \{x \mid x \in T \wedge P(x)\}$, т.е. задается характеристическим предикатом. Характеристическим предикатом можно задать как *конечные*, так и *бесконечные* множества.

Пример. $A = \{1; 2; 3; 4\}$ - множество натуральных чисел от 1 до 4. Множество задано перечислением всех своих элементов. Причем, элемент $3 \in A$, а $5 \notin A$.

Пример. $M = \{\text{токарные, сверлильные, строгальные, резьбофрезерные, ...}\}$ - множество станков.

Пример. Множество A из примера 1.1. можно задать характеристическим предикатом $A = \{x \mid x \in N \wedge 1 \leq x \leq 4\}$.

1.1.2. Подмножество. Равенство множеств

Определение. Множество A называется подмножеством множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B , т.е. если $x \in A$, то $x \in B$. Символ $\subseteq$ обозначает *отношение включения* между множествами.

Пример. Пусть $B = \{1; 2; 3\}$ и $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Тогда $B \subseteq A$. Но $C = \{\{1; 2\}; 3\} \not\subseteq A$.

В частности, каждое множество есть подмножество самого себя, т.е. $A \subseteq A$.

Определение 1.2. Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что A *равно* B , и пишут $A=B$, если для любого x имеем: $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Иначе говоря, $A=B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то это записывается $A \subset B$, и говорят, что A есть собственное подмножество B . Пустое множество есть подмножество любого данного множества A , т.е. $\emptyset \subset A$.

Таким образом, доказательство равенства двух множеств A и B состоит из двух этапов:

1) Доказать, что A есть подмножество B .

2) Доказать, что B есть подмножество A .

Определение. Универсальное множество U (или универсум) есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

По определению, каждое множество есть подмножество универсального множества.

Пример. Так для множества $A = \{1; 2; 3; 4\}$ за универсум можно взять множество натуральных чисел, т.е. $U = \mathbb{N}$.

Определение. Булеаном множества A (обозначается $\Pi(A)$) называется множество, состоящее из всех подмножеств множества A .

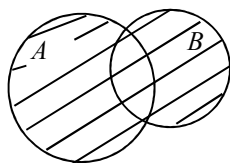
Пример. Пусть $A = \{1; 2; 3\}$. Следовательно, булеан множества A есть множество $\Pi(A) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

Множество A из примера содержит три элемента, а булеан $\Pi(A)$ состоит из $2^3=8$ элементов. В общем случае, если множество A содержит n элементов, множество $\Pi(A)$ включает 2^n элементов, т.к. A имеет 2^n подмножеств. По этой причине $\Pi(A)$ часто обозначают через 2^A .

1.1.3. Операции над множествами

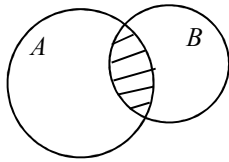
Для наглядного изображения операций над множествами воспользуемся диаграммами Эйлера-Венна.

Определение. Объединением множеств A и B называется множество, (которое обозначается $A \cup B$) состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

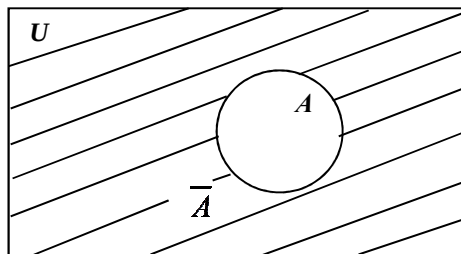
Определение. Пересечением множеств A и B называется множество, (которое обозначается $A \cap B$) которое состоит из общих элементов этих множеств.



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Определение. Разностью множеств A и B называется множество, (которое обозначается $A \setminus B$) всех тех и только тех элементов множества A , которые не принадлежат B .

Определение. Дополнением множества A (обозначается $\bar{A}$) – это множество элементов универсума, которые не принадлежат A , т.е. $\bar{A} = U \setminus A$.



$$\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$$

Пример. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{3; 4; 5\}$. Тогда:

- а) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; в) $A / B = \{1; 2\}$;
 б) $A \cap B = \{3; 4\}$; г) если $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, то $\bar{A} = \{0; 5\}$.

1.1.4. Декартово произведение

Упорядоченная пара (x, y) интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y , расположенных в определенном порядке. Две пары (x, y) и (u, v) считаются равными тогда и только тогда, когда $x=u$ и $y=v$.

Определение. Пусть A и B – два множества. Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит A , а второй принадлежит B :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Пример. Пусть $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{r; s\}$. Тогда

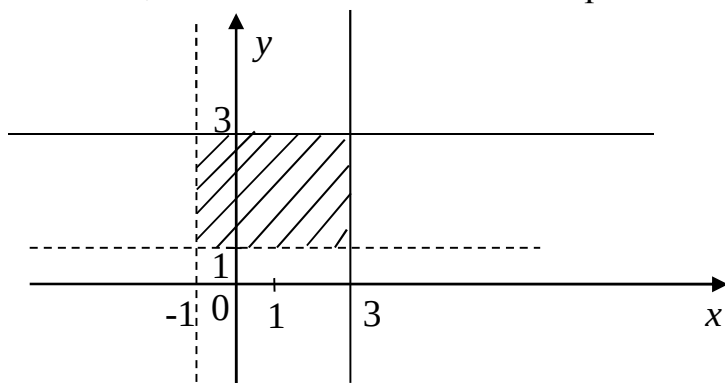
$$A \times B = \{(1; r), (1; s), (2; r), (2; s), (3; r), (3; s)\}.$$

$$B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (s, 1), (s, 2), (s, 3)\}.$$

Пример. На координатной плоскости построить следующее множество:

$$(-1; 3] \times [1; 3)$$

Первое множество помещаем на оси OX , второе на оси OY . Множество всех пар, т.е. декартово произведение, изображается точками заштрихованного прямоугольника, но без левой и нижней стороны.



1.1.5. Бинарные отношения

Для строгого математического описания любых связей между элементами двух множеств введем понятие бинарного отношения.

Определение. Бинарным (или двухместным) отношением ρ между множествами A и B называется произвольное подмножество $A \times B$, т.е.

$$a \rho b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho, \quad \text{где } \rho \subset A \times B.$$

В частности, если $A = B$ (то есть $\rho \subseteq A^2$), то говорят, что ρ есть отношение на множестве A .

Элементы a и b называются компонентами (или координатами) отношения ρ .

Определение. Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \{a \mid \exists b, \text{ что } a \rho b\}$ (левая часть). Областью значений бинарного отношения ρ называется множество $R_\rho = \{b \mid \exists a, \text{ что } a \rho b\}$ (правая часть).

Пример. Пусть даны два множества $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$. Отношение зададим следующим образом $\tau = \{(x; y) \in A \times B \mid x + y = 9\}$. Это отношение будет

состоять из следующих пар (3; 6), (5; 4) и (7; 2), которые можно записать в виде $\tau = \{(3; 6), (5; 4), (7; 2)\}$. В данном примере $D_\tau = \{3; 5; 7\}$ и $R_\tau = B = \{2; 4; 6\}$.

Пример. Пусть A – множество товаров в магазине, а B – множество действительных чисел. Тогда $\varphi = \{(x; y) \in A \times B \mid y \text{ – цена } x\}$ – отношение множеств A и B .

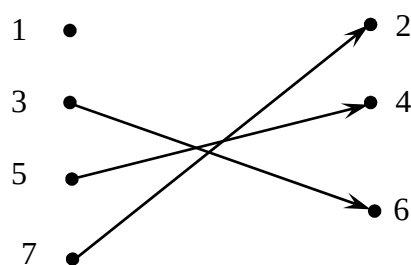
Способы задания отношений:

- 1) с помощью подходящего предиката;
- 2) множество упорядоченных пар;
- 3) в графической форме: пусть A и B – два конечных множества и ρ – бинарное отношение между ними. Элементы этих множеств изображаем точками на плоскости. Для каждой упорядоченной пары отношения ρ рисуют стрелку, соединяющую точки, представляющие компоненты пары. Такой объект называется ориентированным графом или орграфом, точки же, изображающие элементы множеств, принято называть вершинами графа.
- 4) в виде матрицы: пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, ρ – отношение на $A \times B$. Матричным представлением ρ называется матрица $M = [m_{ij}]$ размера $n \times m$, определенная соотношениями $M = [m_{ij}] = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in \rho \\ 0, & (a_i, b_j) \notin \rho \end{cases}$.

Пример. Пусть даны два множества $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$. Отношение задано следующим образом $\tau = \{(x; y) \mid x + y = 9\}$. Задать данное отношение как множество упорядоченных пар, орграфом, в виде матрицы.

Решение. 1) $\tau = \{(3; 6), (5; 4), (7; 2)\}$ – есть задание отношения как множества упорядоченных пар;

2) соответствующий ориентированный граф показан на рисунке.



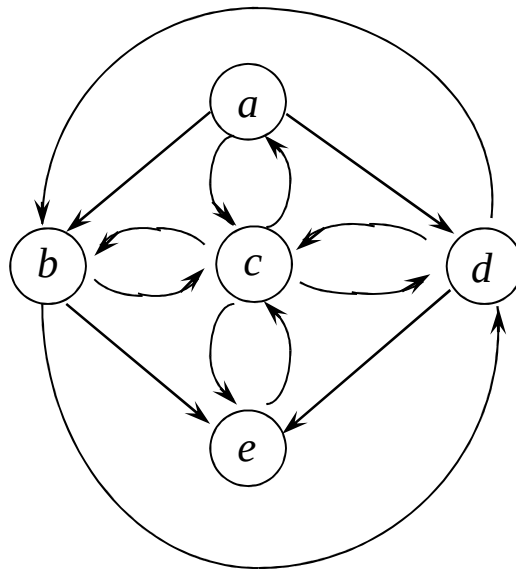
3) в матричном представлении это отношение имеет вид

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Пример 3.5. Пусть задано бинарное на множестве $M = \{a, b, c, d, e\}$

$$\rho = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, e), (b, d), \\ (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (d, e), (e, c)\}$$

Соответствующий орграф, задающий это бинарное отношение, представлен на рисунке:



Матричное представление этого бинарного отношения имеет вид:

$$S(\rho) = \left(\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Для бинарных отношений обычным образом определены теоретико-множественные операции: объединение, пересечение и т.д.

Определение. Пусть $\rho \subseteq A \times B$ есть отношение на $A \times B$. Тогда отношение ρ^{-1} называется обратным отношением к данному отношению ρ на $A \times B$, которое определяется следующим образом:

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}.$$

Определение. Пусть $\rho \subseteq A \times B$ есть отношение на $A \times B$, а $\sigma \subseteq B \times C$ – отношение на $B \times C$. Композицией отношений σ и ρ называется отношение $\tau \subseteq A \times C$, которое определяется следующим образом:

$$\tau = \sigma \circ \rho = \{(a, c) \mid \exists b \in B, \text{ что } (a, b) \in \rho \text{ и } (b, c) \in \sigma\}.$$

Пример. Пусть $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{x; y\}$ и $C = \{., !, \delta, *\}$. И пусть отношение ρ на $A \times B$ и отношение σ на $B \times C$ заданы в виде: $\rho = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}$;

$$\sigma = \{(x, .), (x, !), (y, \delta), (y, *)\}.$$

Найти ρ^{-1} и $\sigma \circ \rho$, $\rho \circ \sigma$.

Решение. 1) По определению $\rho^{-1} = \{(x, 1), (y, 1), (x, 3)\}$;

2) Используя определение композиции двух отношений, получаем

$$\sigma \circ \rho = \{(1, .), (1, !), (1, \delta), (1, *), (3, .), (3, !)\},$$

$$3) \rho \circ \sigma = \emptyset.$$

Теорема. Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

$$1) (\rho^{-1})^{-1} = \rho;$$

$$2) (\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1};$$

$$3) \tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\tau \circ \sigma) \circ \rho \text{ - ассоциативность композиции.}$$

1.1.6. Свойства бинарных отношений

Рассмотрим специальные свойства бинарных отношений на множестве A .

1. Отношение ρ на $A \times A$ называется рефлексивным, если (a, a) принадлежит ρ для всех a из A .

2. Отношение ρ называется антирефлексивным, если из $(a, b) \in \rho$ следует $a \neq b$.

3. Отношение ρ симметрично, если для a и b , принадлежащих A , из $(a,b) \in \rho$ следует, что $(b,a) \in \rho$.

4. Отношение ρ называется антисимметричным, если для a и b из A , из принадлежности (a,b) и (b,a) отношению ρ следует, что $a=b$.

5. Отношение ρ транзитивно, если для a, b и c из A из того, что $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$, следует, что $(a,c) \in \rho$.

Пример. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. На этом множестве задано отношение $\rho \subseteq A^2$, которое имеет вид: $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), (4, 2)\}$. Какими свойствами обладает данное отношение?

Решение. 1) Это отношение рефлексивно, так как для каждого $a \in A$, $(a, a) \in \rho$.

2) Отношение не является антирефлексивным, так как не выполняется условие этого свойства. Например, $(2, 2) \in \rho$, но отсюда не следует, что $2 \neq 2$.

3) Рассмотрим все возможные случаи, показав, что отношение ρ является симметричным:

Случай	$(a, b) \in \rho$	(b, a)	$(b, a) \in \rho?$
1	(1; 2)	(2; 1)	Да
2	(1; 4)	(4; 1)	Да
3	(2; 1)	(1; 2)	Да
...	...	...	...

4) Данное отношение не является антисимметричным, поскольку $(1, 2) \in \rho$ и $(2, 1) \in \rho$, но отсюда не следует, что $1=2$.

5) Можно показать, что отношение ρ транзитивно, используя метод прямого перебора.

Случай	$(a, b) \in \rho$	$(b, c) \in \rho$	(a, c)	$(a, c) \in \rho?$
1	(1; 2)	(2; 1)	(1; 1)	Да
2	(1; 2)	(2; 2)	(1; 2)	Да
3	(1; 2)	(2; 4)	(1; 4)	Да
4	(1; 4)	(4; 1)	(1; 1)	Да

5	(1; 4)	(4; 2)	(1; 2)	Да
...	...	...	...	...

Определение. Отношение ρ на A есть отношение эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение эквивалентности $a \rho b$ часто обозначается: $a \sim b$.

Пример. Отношение равенства на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности.

1.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1.2.1. Понятие алгебраической операции

Определение. Пусть A - произвольное множество, $A^2 = A \times A$ - его декартов квадрат. Внутренней бинарной алгебраической операцией на множестве A называют отображение $A^2 \rightarrow A$.

Другими словами, говорят, что на множестве A задана алгебраическая операция, если каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x и y множества A поставлено в соответствие, по некоторому правилу, единственный для этой пары элемент $z \in A$. Говорят, что этот элемент z есть результат алгебраической операции, примененной к паре (x, y) и этот элемент (результат операции) записывается специальным образом. Вот примеры записи результата алгебраической операции: $z = x + y, z = x \cdot y, z = x \circ y, z = x * y, z = x \cup y, z = x \oplus y$. Применяются и другие символы.

Задание алгебраической операции.

Пусть A - произвольное множество. Для того, чтобы задать на множестве A алгебраическую операцию $*$ необходимо выполнить два условия:

1) нужно определить правило, по которому любым двум элементам x и y множества A ставился бы в соответствие единственный для этой пары элементов (именно в этом порядке: x, y) элемент $z = x * y$;

2) этот элемент $z = x * y$ должен принадлежать множеству A . В этом случае говорят, что множество A замкнуто относительно данной операции $*$.

Так как по определению алгебраическая операция есть отображение множеств, то способы задания алгебраической операции повторяют способы задания отображения (функции): описательный, аналитический, табличный, графический и т.д.

Рассмотрим на примере табличный способ задания алгебраической операции.

Пример. Пусть $A = \{a, b, c\}$ - произвольное множество из трех элементов. Зададим на A алгебраическую операцию $*$ с помощью таблицы:

$*$	a	b	c
a	$a * a$	$a * b$	$a * c$
b	$b * a$	$b * b$	$b * c$
c	$c * a$	$c * b$	$c * c$

Эта таблица пока еще не задает никакой алгебраической операции на множестве A , т.к. мы еще не определили отображения $A^2 \rightarrow A$. Заполним эту таблицу, поставив в соответствие каждой упорядоченной паре элементов множества A конкретный элемент множества A :

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	a
c	a	c	b

Здесь $a * a = a, b * a = c, c * b = c$, и т.д.

Такая таблица, задающая операцию, называется таблицей Кэли. Если операцию называют сложением, то таблицу Кэли называют таблицей сложения. Если операцию называют умножением, то таблицу Кэли называют таблицей умножения.

Пример. На множестве X натуральных чисел, кратных 3, заданы операции: сложение, умножение, вычитание и деление. Какие из них являются на этом множестве алгебраическими?

Решение. Любое натуральное число, кратное 3, имеет вид $3n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $3n$ и $3m$ - два натуральных числа из множества X , $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $3n + 3m = 3(n+m)$, причем $n + m$ - сумма двух натуральных чисел и, значит, число натуральное и единственное. Следовательно, складывая два любых натуральных числа, кратных 3, мы всегда получаем число, кратное 3, и это число единственное. Таким образом, сложение на данном множестве X есть алгебраическая операция.

Рассмотрим произведение двух чисел из множества X : $3n \cdot 3m = 9n \cdot m$, причем $n \cdot m$ - произведение двух натуральных чисел и, значит, число натуральное и единственное. Но 9 делится на 3, следовательно, умножая два любых натуральных числа, кратных 3, мы всегда получаем число, кратное 3, и это число единственное. Таким образом, умножение на данном множестве X есть алгебраическая операция.

Рассмотрим теперь разность двух чисел из множества X : $3n - 3m = 3(n-m)$, но разность $n-m$ существует на множестве натуральных чисел лишь при условии, что $n > m$. Таким образом, вычитание на множестве X не является алгебраической операцией.

Выполним деление чисел на множестве X : $3n : 3m = n:m$. Так как частное натуральных чисел n и m существует не всегда и, кроме того, если оно существует, то оно может быть не кратно 3. Значит, деление на множестве чисел, кратных 3, не является алгебраической операцией.

1.2.2. Свойства алгебраических операций

Определение. Алгебраическая операция $*$, определенная на множестве A называется коммутативной, если она подчиняется закону коммутативности, т.е. для любых двух элементов x и y множества A выполняется равенство:

$$x * y = y * x.$$

В школьных учебниках математики, когда говорят об операциях сложения и умножения чисел, это свойство называется переместительным законом.

Примерами коммутативных операций могут служить сложение и умножение натуральных чисел, поскольку для любых натуральных чисел x и y выполняются

равенства $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$. Эти равенства справедливы не только для натуральных чисел, но и для любых действительных чисел, следовательно, на множестве действительных чисел сложение и умножение тоже коммутативны.

Существуют алгебраические операции, не обладающие свойством коммутативности. Так, не является коммутативным вычитание целых чисел: существуют целые числа x и y , для которых $x - y \neq y - x$. Например, $12 - 7 \neq 7 - 12$.

Определение. Алгебраическая операция $*$, определенная на множестве A называется ассоциативной, если она подчиняется закону ассоциативности, т.е. для любых трех элементов x, y, z множества A выполняется равенство:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Здесь сначала определяется результат операции в скобках, а затем еще раз применяется операция к оставшимся двум элементам. При этом, если результат операции не зависит от способа расстановки скобок, то операция называется ассоциативной. В школьных учебниках математики, когда говорят об операциях сложения и умножения чисел, это свойство называется сочетательным законом.

Например, ассоциативно сложение натуральных чисел: для любых натуральных чисел x, y и z выполняется равенство $(x + y) + z = x + (y + z)$. Ассоциативно сложение рациональных и действительных чисел. Поэтому сумму нескольких чисел можно записывать без скобок.

Существуют алгебраические операции, не обладающие свойством ассоциативности. Так, не является ассоциативным вычитание целых чисел: существуют целые числа x, y и z , для которых $(x - y) - z \neq x - (y - z)$. Например, $(12 - 7) - 3 \neq 12 - (7 - 3)$.

Пусть на множестве A определены две алгебраических операции, которые мы обозначим символами $*$ и $\perp$.

Определение. Говорят, что операция $*$ дистрибутивна относительно операции $\perp$, если $\forall x, y, z \in A$ верны два равенства:

$$x * (y \perp z) = (x * y) \perp (x * z) \text{ и } (x \perp y) * z = (x * z) \perp (y * z).$$

В школьных учебниках математики, когда говорят об операциях сложения и умножения чисел, это свойство называют распределительным законом умножения относительно сложения.

Пример. Пусть дано некоторое множество V . Обозначим через $P(V)$ – множество всех подмножеств множества V . Тогда на множестве $P(V)$ определены две операции: объединение и пересечение множеств. Действительно, для любых двух подмножеств A и B множества V , $A \cup B$ и $A \cap B$ – тоже подмножества множества V . Легко проверяется (например, с помощью диаграмм Венна), что обе операции являются коммутативными, ассоциативными и каждая из них является дистрибутивной относительно другой.

Наиболее распространенными обозначениями алгебраических операций являются символы «+» и «·». В соответствии с этими обозначениями алгебраические операции носят название сложения и умножения. Результат алгебраической операции называют соответственно суммой и произведением.

Определение. Если алгебраическую операцию называют сложением и обозначают символом сложения «+», то говорят, что алгебраическая операция имеет аддитивную форму записи. Если алгебраическую операцию называют умножением и обозначают символом умножения «·», то говорят, что алгебраическая операция имеет мультипликативную форму записи.

1.2.3. Понятие алгебраической структуры и некоторые ее замечательные элементы

Определение. Множество A , вместе с одной или несколькими алгебраическими операциями, определенными на этом множестве называют алгебраической структурой.

Обозначение: $(A, *)$ – алгебраическая структура с одной алгебраической операцией; $(A, *, \perp)$ – алгебраическая структура с двумя алгебраическими операциями.

Рассмотрим сначала алгебраическую структуру с одной алгебраической операцией $(A, *)$.

Определение. Элемент $e \in A$ называется нейтральным элементом относительно алгебраической операции $*$, если $\forall x \in A$ выполняется равенство: $x * e = e * x = x$.

Нейтральный элемент относительно сложения называется нулевым элементом или просто нулем и обозначается соответствующей цифрой 0:

$$\forall x \in A, \quad x + 0 = 0 + x = x$$

Нейтральный элемент относительно умножения называется единичным элементом или просто единицей и обозначается либо цифрой 1, либо буквой e :

$$\forall x \in A, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \text{ или } x \cdot e = e \cdot x = x.$$

Теорема. Пусть $(A, *)$ – алгебраическая структура. Тогда, если в множестве A существует нейтральный элемент, то он единственный.

Определение. Пусть $(A, *)$ – алгебраическая структура с нейтральным элементом e . Элемент x' называется симметричным элементу $x \in A$ относительно алгебраической операции $*$, если $x * x' = x' * x = e$.

Определение. Пусть $(A, *)$ – алгебраическая структура с нейтральным элементом e . Если каждый элемент $x \in A$ имеет симметричный ему $x' \in A$, тогда говорят, что множество A симметрично относительно операции $*$.

Теорема. Пусть $(A, *)$ – алгебраическая структура с нейтральным элементом e и ассоциативной алгебраической операцией $*$. Если элемент $x \in A$ имеет симметричный ему элемент $x' \in A$, то такой элемент единственный.

Замечание. В алгебраической структуре с аддитивной формой записи элемент симметричный элементу x называется противоположным и обозначается $(-x)$:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

В алгебраической структуре с мультипликативной формой записи элемент симметричный элементу x называется обратным и обозначается x^{-1} :

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e \text{ или } x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

1.2.4. Основные алгебраические структуры: группа

Определение. Группой называется множество G , на котором определена одна внутренняя бинарная алгебраическая операция $*$, которая подчиняется трем законам (аксиомы группы).

1. Закон ассоциативности: $\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$

2. Существование нейтрального элемента:

$$\exists e \in G : \forall x \in G \quad x * e = e * x = x$$

3. Существование симметричного элемента:

$$\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

Другими словами, группой называется множество с одной ассоциативной внутренней алгебраической операцией, обладающее нейтральным элементом и симметричное относительно этой операции.

Определение. Если группа G подчиняется еще одному закону:

4. Закон коммутативности: $\forall x, y \in G, x * y = y * x$, тогда группа G называется коммутативной.

Замечание. Если $(G, *)$ – группа, то алгебраическая операция $*$ называется групповой операцией.

Часто коммутативную группу называют абелевой, если ее групповая операция записана в аддитивной форме.

Примеры групп.

1. Множество целых чисел относительно сложения $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Множество рациональных чисел относительно сложения $(\mathbb{Q}, +)$.

3. Множество действительных чисел относительно сложения $(\mathbb{R}, +)$.

4. Обозначим через V множество всех векторов как направленных отрезков. Известно, что векторы можно складывать по правилу параллелограмма (или по правилу треугольника). Эта операция – сложения векторов является внутренней бинарной алгебраической операцией, т.к. для каждой упорядоченной пары векторов $(\vec{a}, \vec{b}) \in V^2$ определена их сумма $\vec{a} + \vec{b} \in V$. Легко проверяется, что

сложение векторов подчиняется законам ассоциативности и коммутативности:

$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V, \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ и $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$. В множестве векторов V существует нулевой вектор $\bar{0} \in V : \forall \bar{a} \in V, \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$. Для любого вектора $\bar{a} \in V$ существует противоположный ему $-\bar{a}$ и $\bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$.

Таким образом, множество V векторов, как направленных отрезков относительно операции сложения является абелевой группой.

2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

2.1. Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных заданий

Самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общепрофессиональных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к практическим занятиям, семинарам, сдаче зачетов и экзаменов.

Самостоятельная работа по алгебре направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по алгебре;
- приобретение дополнительных знаний и умений по темам «Множества и бинарные отношения». «Алгебраические структуры»;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из вариантов содержится четыре задания.

Задания построены так, чтобы охватить основное содержание темы. Можно считать, что материал студентами усвоен, если они владеют следующими учебно-познавательными и специальными действиями на уровне применения элементов теории множеств, бинарных отношений и основных алгебраических структур к решению основных задач курса алгебры.

В первом задании требуется доказать равенство двух множеств. Для успешного выполнения задания студенту необходимо проработать материал пунктов 1.1.1 и 1.1.2 и изучить примеры решения задач, представленные в них.

Во втором задании необходимо найти область определения и область значения бинарного отношения; задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы; выяснить какими свойствами оно обладает. Полезным при выполнении этого задания будет материал пункта 1.1.5 и 1.1.6 и примеры решения задач.

В третьем задании предлагается выяснить является ли представленная операция $*$ алгебраической на множестве R , В случае положительного ответа указать ее свойства. Помощь в решении окажет теоретический материал и примеры решения типовых задач, представленных в пунктах 1.2.1 и 1.2.2.

В четвертом задании требуется для каждого элемента данной группы найти обратный элемент. При выполнении этого задания полезен материал, изложенный в 1.2.4.

Оценивание работы представлено в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
-----------	------------------------	---------------------	-------

1	Доказать равенство двух множеств	Логично и последовательно выполнены все шаги доказательства, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ. Рассмотрены два способа доказательства	3
		Правильно и обоснованно выполнен только один из способов доказательства (на основе доказательства двух включений)	2
		Правильно и обоснованно выполнен только один из способов доказательства (с помощью диаграмм Эйлера-Венна)	1
2	Найти область определения и область значения бинарного отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Указать какими свойствами оно обладает	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения. Получены верные ответы	4
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ не перечислены все свойства данного отношения ИЛИ есть недочеты в способах задания отношения ИЛИ имеются недочеты при нахождении области определения и область значения бинарного отношения.	3
		Выполнены верно только два из предложенных пунктов в задании с небольшими недочетами.	2
		В ходе решения наблюдаются недочеты при выполнении каждой из частей задания	1
3	Выяснить является ли данная операция * алгебраической на множестве R, Если да, то какими свойствами она	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные ответы	2

	обладает	Выполнена только одна часть задания ИЛИ обе части выполнены, но имеются недочеты в решении	1
4	Для каждого элемента данной группы найти обратный элемент	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ	1
ИТОГО			максимум 10

2.2. Требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы

1. Самостоятельная работа выполняется в отдельной тетради или на скрепленных тетрадных листах синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. На обложке тетради должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название раздела дисциплины, номер варианта.

Например: ***Индивидуальная работа 1. Вариант 1 студентки факультета информатики, математики и экономики I курса группы МФ-19 Ивановой Татьяны Александровны***

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

- а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;
- б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;
- в) необходимо правильно употреблять математические символы;

г) фиксировать ответ.

5. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями.

6. Самостоятельная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком. Преподаватель имеет право не принимать работу на проверку во время сессии.

2.3. Варианты индивидуальной работы

Вариант 1

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a - b = 2$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает.
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = a^3 \cdot b^2$? Если да, то какими свойствами она обладает?
4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.
 - | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| | a | b | c | d |
| a | | c | d | a |
| b | | d | a | b |
| c | | a | b | c |
| d | | b | c | d |

Вариант 2

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a + b = 10$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает.
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = ab + a + b$? Если да, то какими свойствами она обладает?
4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

•	x	y	z	t
x	x	y	z	t
y	y	x	t	z
z	z	t	x	y
t	t	z	y	x

Вариант 3

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow ab = 12$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает. Укажите, какими свойствами оно обладает.
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = |a| - |b|$? Если да, то какими свойствами она обладает?
4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

•	α	β	γ	δ
α	δ	γ	β	α
β	γ	δ	α	β
γ	β	α	δ	γ
δ	α	β	γ	δ

Вариант 4

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a : b = 3$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает.
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = \frac{ab}{2}$. Если да, то какими свойствами она обладает?

4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

• $a \quad b \quad c \quad d$

$a \quad b \quad a \quad d \quad c$

$b \quad a \quad b \quad c \quad d$

$c \quad d \quad c \quad a \quad b$

$d \quad c \quad d \quad b \quad a$

Вариант 5

- Доказать равенство множеств $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$.
- На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a : b = 2$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает.
- Является ли данная операция $*$ алгебраической на множестве $\mathbb{R}$, если $a * b = \frac{a - b}{2}$. Если да, то какими свойствами она обладает?
- Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

• $a \quad b \quad c \quad d$

$a \quad b \quad a \quad d \quad c$

$b \quad a \quad b \quad c \quad d$

$c \quad d \quad c \quad a \quad b$

$d \quad c \quad d \quad b \quad a$

Вариант 6

- Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.
- На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a - b = 3$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает. Укажите, какими свойствами оно обладает.
- Является ли данная операция $*$ алгебраической на множестве $\mathbb{R}$, если $a * b = |a| + |b|$? Если да, то какими свойствами она обладает?

4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

$$\begin{array}{c}
 \bullet \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \\
 \alpha \quad \delta \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha \\
 \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \alpha \quad \beta \\
 \gamma \quad \beta \quad \alpha \quad \delta \quad \gamma \\
 \delta \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta
 \end{array}$$

Вариант 7

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a + b = 11$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = ab^3$? Если да, то какими свойствами она обладает?
4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

$$\begin{array}{c}
 \bullet \quad x \quad y \quad z \quad t \\
 x \quad x \quad y \quad z \quad t \\
 y \quad y \quad x \quad t \quad z \\
 z \quad z \quad t \quad x \quad y \\
 t \quad t \quad z \quad y \quad x
 \end{array}$$

Вариант 8

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow ab = 10$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает.
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = a^3 \cdot b$? Если да, то какими свойствами она обладает?

4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

$$\begin{array}{c} \bullet \quad a \quad b \quad c \quad d \\ a \quad c \quad d \quad a \quad b \\ b \quad d \quad a \quad b \quad c \\ c \quad a \quad b \quad c \quad d \\ d \quad b \quad c \quad d \quad a \end{array}$$

Вариант 9

1. Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a + b = 12$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает. Укажите, какими свойствами оно обладает.
3. Является ли данная операция * алгебраической на множестве R , если $a * b = 2a - 3b$? Если да, то какими свойствами она обладает?
4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \\ \alpha \quad \delta \quad \gamma \quad \beta \quad \alpha \\ \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \alpha \quad \beta \\ \gamma \quad \beta \quad \alpha \quad \delta \quad \gamma \\ \delta \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \end{array}$$

Вариант 10

1. Доказать равенство множеств $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup (A \cap B)$.
2. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано $a \rho b \Leftrightarrow a : b = 4$ бинарное отношение. Найти область определения и область значения этого отношения. Задать это отношение: графически, с помощью орграфа, в виде матрицы. Укажите, какими свойствами оно обладает.

3. Является ли данная операция $*$ алгебраической на множестве R , если $a * b = \frac{a+b}{3}$. Если да, то какими свойствами она обладает?
4. Дана мультипликативная группа, операция задана таблицей Кэли. Для каждого элемента группы найти обратный элемент.
- $\begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & b & a & d & c \\ b & a & b & c & d \\ c & d & c & a & b \\ d & c & d & b & a \end{matrix}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) основная учебная литература

1. Ляпин, Е.С. Курс высшей алгебры. [Электронный ресурс] : учебник / Е. С. Ляпин — Электронные текстовые данные. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 368 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/246>

2.Окунев, Л.Я. Высшая алгебра. [Электронный ресурс] : учебник / Л. Я. Окунев. — Электронные текстовые данные. - Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/289>

3.Алферова, З.В. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : учебно-методический комплекс / З.В. Алферова, Э.Л. Балюкевич, А.Н. Романников. - Электронные текстовые данные. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 279 с. - Режим доступа: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90645>

б) дополнительная литература

1.Владимирский, Б. М. Математика [Текст] : общий курс : учебник для бакалавров естественнонаучных направлений / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2008. - 957 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 948940. - ISBN 9785811404452

2.Полещук Г. Г.Теория групп [Текст]: учебное пособие для студентов специальности 032100 " Математика и информатика", квалификация: Учитель математики и информатики / Полещук Г. Г. ; Федеральное агентство по образованию ; Кузбасская государственная педагогическая академия. - Новокузнецк : РИО КузГПА, 2007. - 38 с.