Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Решетникова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(Часть 2)

Методические указания к практическим занятиям
для обучающихся по направлениям подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии»

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:517.9](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.161.6я73
Р47

Решетникова Е.В.

Р47 Дифференциальные уравнения (часть 2): методические указания к практическим занятиям для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», / Е.В. Решетникова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 77 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для решения на практических занятиях и выполнения домашнего задания; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для наиболее рациональной организации работы студентов на практических занятиях и дома.

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № __3____от_22.10.2020___

Заведующий каф. МФММ

_____ / Е.В.Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики

Протокол № 4 от 12.11.2020
Председатель методической комиссии ФИМЭ

_____/Г.Н.Бойченко

УДК [378.147.88:517.9](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.161.6я73
Р47

© Решетникова Елена Васильевна
© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2020
Текст представлен в авторской редакции

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5
1 ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ 7
1.1. Устойчивость решений линейных автономных систем. Фазовые траектории линейной автономной системы в окрестности особой точки. 7
1.2. Фазовые траектории в окрестности положений равновесия нелинейных систем. 17
1.3. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. 28
2 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ 33
2.1 Краевая задача. Задача Штурма-Лиувилля. 33
2.2 Функция Грина. Метод ее построения. 36
3 ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ 40
3.1. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов. 40
3.2. Метод Пикара 43
3.3. Метод малого параметра. 46
4 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 51
4.1. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений с помощью первых интегралов. 51
4.2. Линейные однородные уравнения первого порядка в частных производных. 57
4.3. Квазилинейные уравнения первого порядка в частных производных. 62
4.4. Приведение к каноническому виду квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка. 65

4.5. Нахождение общего решения и решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка 71
5. УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА 76

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», и направлены на оказание помощи студентам и преподавателю при организации работы на практических занятиях и домашней работы студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения» во втором семестре.

Курс «Дифференциальные уравнения» во втором семестре для направления «Прикладная математика и информатика» складывается из следующих глав: элементы теории устойчивости, краевые задачи, численно-аналитические методы решения, уравнения в частных производных первого и второго порядка. Эти разделы являются традиционными для изучения студентами технических и физико-математических направлений.

Целью изучения данной дисциплины является построение прочного фундамента математического образования для изучения специализированных курсов, читаемых на направлениях, связанных с математическим обеспечением информационных технологий.

В методические рекомендации включено: краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для решения на практических занятиях и выполнения домашнего задания; список основной и дополнительной литературы.

Приведенные примеры решения типовых заданий представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, контрольным работам и выполнения домашних заданий.

Таким образом, данные методические материалы позволяют студенту подготовиться к практическим занятиям и контрольным работам по соответствующим темам, успешно выполнить домашние задания. Методические указания могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

1 ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1. Устойчивость решений линейных автономных систем. Фазовые траектории линейной автономной системы в окрестности особой точки

Рассмотрим ***механический смысл*** системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, ..., y_n), \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (1)$$

Переменная t обозначает текущий момент времени, вектор неизвестных функций $\left(y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)\right)$ представляет собой координаты точки в ***фазовом пространстве*** в момент времени t.

Вектор $\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right)$ задает ***расширенное фазовое пространство.***

Решение системы (1): $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), ..., y_n = y_n(t)$ представляет собой ***закон движения*** точки в фазовом пространстве, определяемый системой (1).

График решения в расширенном фазовом пространстве называется ***интегральной кривой***.

Фазовая кривая (***траектория***) это проекция интегральной кривой из расширенного фазового пространства в фазовое пространство.

Если все функции $f_i(t, y_1^0, ..., y_n^0) \equiv 0, i = 1, 2, ..., n$, то точка $(y_1^0, ..., y_n^0)$ фазового пространства называется ***точкой покоя*** (***положением равновесия***) системы (1).

Система, в которой в правой части отсутствует функция, в явном виде содержащая переменную t, называется ***автономной*** системой:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1,...,y_n), \quad i = 1,2,...,n \qquad (2)$$

Точка покоя $y_i \equiv 0$, $i = 1,2,...,n$ автономной системы (2) называется ***устойчивой по Ляпунову***, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall i = 1,2,...,n\ \ |\tilde{y}_i(t_0)| < \delta \ \Rightarrow\ \forall t \geq t_0\ \ |\tilde{y}_i(t)| < \varepsilon,$$

где $\tilde{y}_i(t)$ - решение задачи Коши с ***возмущенными начальными условиями***: $\tilde{y}_i(t_0) = \delta_i$.

Точка покоя $y_i \equiv 0$, $i = 1,2,...,n$ автономной системы (2) называется ***асимптотически устойчивой***, если она устойчива по Ляпунову и $\exists \lim\limits_{t\to\infty} |\tilde{y}_i(t)| = 0,\ \ \forall i = 1,2,...,n$.

Теорема 1. Если действительные части всех характеристических чисел системы отрицательны, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если существует хотя бы одно характеристическое число системы с положительной действительной частью, то положение равновесия неустойчиво.

Терема 3. Если действительные части обоих характеристических чисел системы второго порядка нулевые или одно отрицательно, а другое равно нулю, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Пример 1. Исследуем на устойчивость нулевой положение равновесия системы $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

Ее собственные числа $\lambda_1 = -3 + 2i$ и $\lambda_2 = -3 - 2i$.

По теореме 1 решение асимптотически устойчиво.

В случае систем большого порядка вместо вычисления всех собственных чисел системы удобнее пользоваться **условиями**

неотрицательности вещественных частей всех корней уравнения $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ **с вещественными коэффициентами:**

1) Необходимое условие: все $a_i > 0$. В случае $n \le 2$ условие является и достаточным.

2) Условие Рауса-Гурвица: необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & .. & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

3) Условие Льенара-Шипара: необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и чтобы $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$, …, где Δ_i - главные диагональные миноры матрицы Гурвица.

4) Критерий Михайлова: необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и чтобы корни многочленов

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - ... \text{ и } q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - ...$$

были все положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1, т.е.: $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < ....$

Пример 2. Исследуем нулевое решение уравнения $y^{IV} + 2y''' + ay'' + 3y' + 1 = 0$.

Для поиска собственных чисел необходимо решить характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$.

Воспользуемся критерием Гурвица.

Матрица Гурвица имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

тогда $\Delta_1 = 2 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 3 > 0$, следовательно, $a > \frac{3}{2}$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3a - 2) - 9 = 6a - 13 > 0$, следовательно, $a > \frac{13}{6}$,

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3$.

Итак, нулевое решение асимптотически устойчиво при $a > \frac{13}{6}$.

***Теорема* (*о выпрямлении*).** В достаточно малой окрестности не особой точки векторное поле диффеоморфно постоянному полю $\boldsymbol{e}_1$.

Фазовые траектории в окрестности нулевой точки покоя линейной автономной системы второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \qquad (3)$$

определяются собственными числами λ_1, λ_2 (η, ξ – собственные векторы для λ_1, λ_2 соответственно) следующим образом:

1) Если $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, то положение равновесия является неустойчивым и называется ***неустойчивый узел***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1а.

2) Если $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, то положение равновесия является асимптотически устойчивым и называется ***устойчивый узел***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1б.

3) Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$, то положение равновесия является неустойчивым и называется ***седло (седловина)***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1в.

4) Если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, то положение равновесия является асимптотически устойчивым и называется ***вырожденный узел***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1г.

5) Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то положение равновесия является неустойчивым и называется ***вырожденный узел***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1д.

6) Если $\lambda_{1,2} = i\beta$, то положение равновесия является устойчивым по Ляпунову и называется ***центр***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1е.

7) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha < 0$, то положение равновесия является асимптотически устойчивым и называется ***устойчивый фокус***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1ж.

8) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha > 0$, то положение равновесия является неустойчивым и называется ***неустойчивый фокус***. Фазовые траектории в окрестности такого положения равновесия изображены на рисунке 1з.

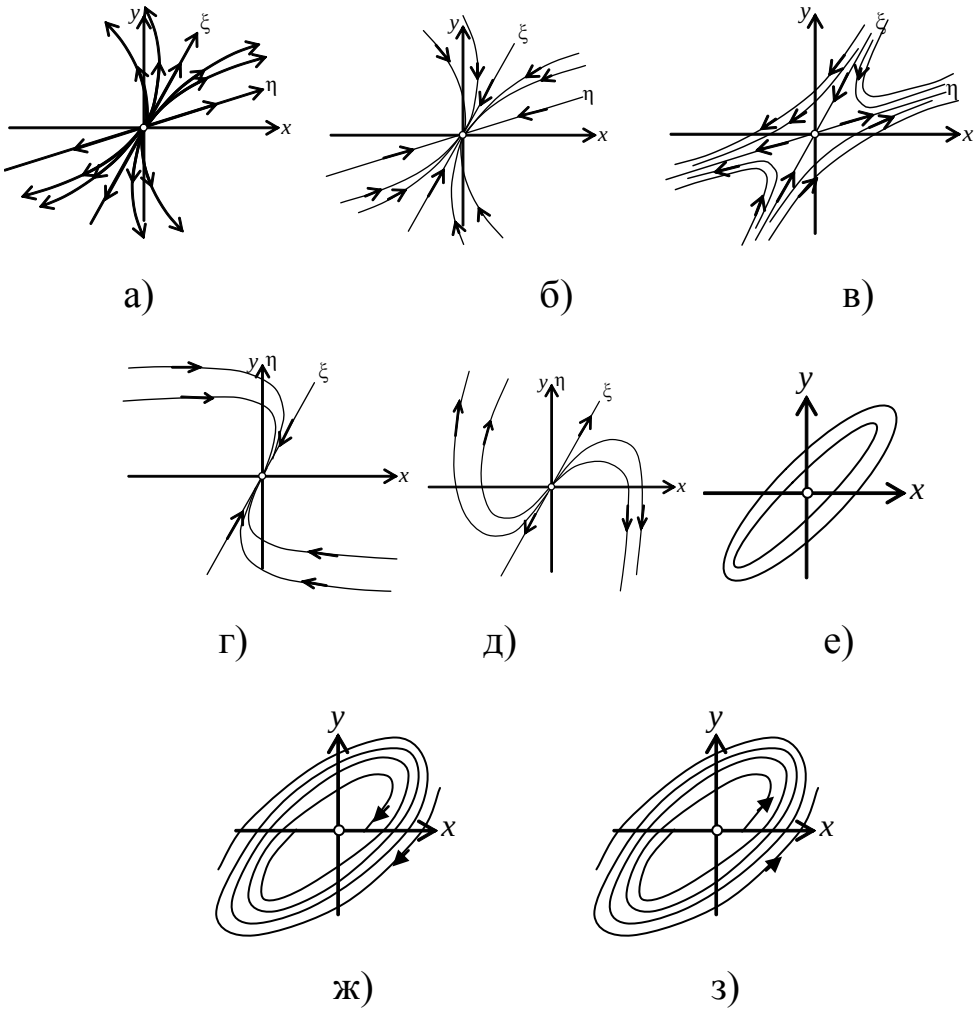


Рисунок 1 – Фазовые в окрестности положения равновесия линейной автономной системы второго порядка

Направление движения по фокусу и центру, а также направление завитка в фокусе определяется вектором фазовой скорости (рассчитанному, например, в точке (0,1): $v(0,1) = (a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1, a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1))$.

Фазовые траектории в окрестности точки покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2. \end{cases}$$

совпадают с интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11} y_1 + a_{12} y_2}{a_{21} y_1 + a_{22} y_2}.$$

В случае нетривиальной точки покоя $(y_1^0, y_2^0) \neq (0,0)$, прежде чем проводить исследование надо сделать замену: $y_1 = z_1 + y_1^0$, $y_2 = z_2 + y_2^0$.

Пример 3. Исследуем особую точку уравнения $y' = \dfrac{x+4y-5}{2x+3y}$ на устойчивость.

Вместо уравнения будем исследовать точки покоя системы:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y - 5. \end{cases}$$

Определим точку покоя, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ x + 4y - 5 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ y = 2. \end{cases}$$

После замены: $y = u + 2$, $x = v - 3$, система имеет вид:

$$\begin{cases} v' = 2v + 3u, \\ u' = v + 4u. \end{cases}$$

Собственные числа последней системы: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Следовательно, положение равновесия является неустойчивым узлом. Чтобы изобразить фазовые траектории в окрестности узла найдем собственные векторы. Для $\lambda_1 = 1$ собственный вектор $\xi = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, для $\lambda_2 = 5$ собственный вектор $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

На рисунке 2 изображены фазовые траектории системы $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y - 5. \end{cases}$ в окрестности точки покоя $\begin{cases} x = -3, \\ y = 2. \end{cases}$

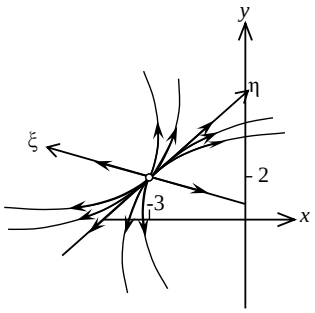


Рисунок 2 - фазовые траектории системы $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x + 4y - 5. \end{cases}$ в окрестности точки покоя $\begin{cases} x = -3, \\ y = 2. \end{cases}$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение систем. Схематически изобразить фазовые траектории в окрестности точки покоя, указав направление движения.

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y, \\ \dot{y} = 5x + 5y. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 7y. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y. \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 6x + 7y. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y, \\ \dot{y} = 20x + 12y. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y, \\ \dot{y} = -16x - 2y. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$ 1.16. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x + 7y. \end{cases}$

2. Исследовать особые точки уравнений на устойчивость. Схематически изобразить фазовые траектории в окрестности точки покоя, указав направление движения.

2.1. $y' = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y + 1}$,

2.2. $y' = \dfrac{2x - y + 2}{x - y + 1}$,

2.3. $y' = \dfrac{y - x - 2}{3x + y + 1}$,

2.4. $y' = \dfrac{2x + y}{x - 2y - 5}$.

3. Исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь известными условиями отрицательности вещественных частей всех корней многочлена.

3.1. $y''' + y'' + y' + 2y = 0$,

3.2. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$,

3.3. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$.

Контрольные вопросы.

1. Каков механический смысл системы дифференциальных уравнений?

2. Что такое фазовое пространство системы? Расширенное фазовое пространство? Что такое фазовая кривая?

3. В каком случае точка фазового пространства называется точкой покоя (положением равновесия) для системы дифференциальных уравнений?

4. В каком случае система дифференциальных уравнений называется автономной?

5. Когда тривиальное решение автономной системы дифференциальных уравнений называется устойчивым по Ляпунову?

6. Когда тривиальное решение автономной системы дифференциальных уравнений называется асимптотически устойчивым?

7. Сформулируйте и докажите теорему об определении асимптотической устойчивости положения равновесия по характеристическим числам системы.

8. Сформулируйте и докажите теорему об определении устойчивости по Ляпунову положения равновесия по характеристическим числам системы.

9. Сформулируйте и докажите теорему о определении неустойчивости положения равновесия по характеристическим числам системы.

10. Сформулируйте теорему о выпрямлении фазового пространства.

11. В каком случае система дифференциальных уравнений называется простой? Сложной?

12. Выведите уравнения фазовых траекторий в окрестности нулевой точки покоя линейной автономной системы второго порядка с постоянными коэффициентами для разных случаев собственных чисел простой системы.

13. Выведите уравнения фазовых траекторий в окрестности точек покоя сложной системы для разных случаев собственных чисел.

1.2. Фазовые траектории в окрестности положений равновесия нелинейных систем

Для исследования нулевого решения $(y_1, y_2) = (0,0)$ нелинейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2), \end{cases} \tag{4}$$

будем строить **систему первого приближения (линеаризованную систему)**.

Для построения системы первого приближения функции $f_1(y_1, y_2)$ и $f_2(y_1, y_2)$ раскладываем в ряд Маклорена:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\right|_{(0,0)} \cdot y_1 + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\right|_{(0,0)} \cdot y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\right|_{(0,0)} \cdot y_1 + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}\right|_{(0,0)} \cdot y_2. \end{cases} \tag{5}$$

($f_k(0,0) = 0$ по определению точки покоя).

Положение равновесия нелинейной системы 2-го порядка (4) называется **грубым положением равновесия**, если матрица линеаризованной в точке покоя системы (5) имеет такие собственные значения λ_1, λ_2, для которых $\operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0, \ \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$ (**простая система**).

В окрестности грубого положения равновесия автономной системы поведение фазовых траекторий качественно одинаково с поведением фазовых траекторий линеаризованной в этой точке системы.

Теорема об асимптотической устойчивости по первому приближению. Если положение равновесия линеаризованной системы асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво положение

равновесия нелинейной системы.

Теорема о неустойчивости по первому приближению. Если положение равновесия линеаризованной системы неустойчиво, то неустойчиво положение равновесия нелинейной системы.

В случае нетривиальной точки покоя $(y_1^0, y_2^0) \neq (0,0)$, прежде чем проводить исследование надо сделать замену: $y_1 = z_1 + y_1^0$, $y_2 = z_2 + y_2^0$.

Пример 1. Найти положения равновесия и определить их характер в окрестности положений равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = \sin x - y^2 + 1. \end{cases}$$

1) Для нахождения положений равновесия данной системы, решаем систему:

$$\begin{cases} 2x + y^2 - 1 = 0, \\ \sin x - y^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения получим: $\sin x = -2x$, откуда $x = 0$. Подставляем в первое уравнение: $y^2 = 1$.

Итак, данная система имеет два положения равновесия $(x_1, y_1) = (0,-1)$ и $(x_2, y_2) = (0,1)$.

Исследуем, например, первое: $(x_1, y_1) = (0,-1)$.

2) После замены: $x = u + x_1 = u$, $y = v + y_1 = v - 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u + (v-1)^2 - 1, \\ \dot{v} = \sin u - (v-1)^2 + 1. \end{cases}$$

3) Линеаризуем полученную систему, используя (5):

$$\begin{cases} \dot{u} = \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{(0,0)} \cdot u + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial v}\right|_{(0,0)} \cdot v = 2u - 2v \\ \dot{v} = \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{(0,0)} \cdot u + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial v}\right|_{(0,0)} \cdot v = u + 2v. \end{cases}$$

4) Для исследования на устойчивость найдем собственные числа линеаризованной системы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2-\lambda)^2 + 2 = 0,$$

$$2 - \lambda = \pm\sqrt{2}i,$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}i.$$

Итак, положение равновесия $(x_1, y_1) = (0, -1)$ является неустойчивым фокусом.

Пример 2. Для уравнения $\ddot{x} + x^3 - e^{-\frac{4\dot{x}}{x}} = 0$ найти положения равновесия и определить их характер.

1) Введя обозначение: $\dot{x} = y$, преобразуем уравнение к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 + e^{-\frac{4y}{x}}. \end{cases}$$

2) Приравнивая к 0 правые части системы, находим положение равновесия $(x_1, y_1) = (1, 0)$.

3) После замены: $x = u + 1,\ \ y = v$, получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -(u+1)^3 + e^{-\frac{4v}{u+1}}. \end{cases}$$

4) Линеаризованная система (5) имеет вид: $\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -3u - 4v. \end{cases}$

5) Собственные числа линеаризованной системы $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$.

Следовательно, положение равновесия данного уравнения является устойчивым узлом.

Пример 3. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1-4y). \end{cases}$$

Рассмотрим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = ax - 4y. \end{cases}$$

Ее собственные числа $\lambda_1 = -3 + \sqrt{1-a}$ и $\lambda_2 = -3 - \sqrt{1-a}$.

При $a > 1$ собственные числа комплексные с отрицательной действительной частью, следовательно, решение асимптотически устойчиво.

При $-8 < a \le 1$ собственные числа вещественные и отрицательные, следовательно, решение асимптотически устойчиво.

При $a < -8$ одно собственное число положительно, следовательно, решение неустойчиво.

При $a = -8$ собственные числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$, следовательно, вопрос об устойчивости не решается на основании теорем о первом приближении.

При исследовании систем высокого порядка для нахождения собственных чисел приходится решать алгебраические уравнения больших степеней.

Чтобы этого избежать удобно пользоваться ***условиями отрицательности вещественных частей всех корней уравнени***я:

$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$ с вещественными коэффициентами.

1) Необходимое условие: все $a_i > 0$. При $n \le 2$ это условие является и достаточным.

2) Условие Рауса-Гурвица: необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, ...$$

3) Условие Льенара-Шипара: необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и главные диагональные миноры матрицы Гурвица удовлетворяли условию $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0$.

4) Критерий Михайлова: необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и корни многочленов:

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - ... \text{ и } q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - ...$$

были положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1, т.е. $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < ...$.

Пример 4. Исследуем нулевое решение уравнения $y^{IV} + 2y''' + ay'' + 3y' + 1 = 0$.

Для поиска собственных чисел необходимо решить

характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$.

Воспользуемся критерием Гурвица.

Матрица Гурвица (6) имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

тогда $\Delta_1 = 2 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 3 > 0$, следовательно, $a > \frac{3}{2}$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3a - 2) - 9 = 6a - 13 > 0$, следовательно, $a > \frac{13}{6}$,

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3$.

Итак, нулевое решение асимптотически устойчиво при $a > \frac{13}{6}$.

Положение равновесия нелинейной системы 2-го порядка называется **негрубым положением равновесия**, если матрица линеаризованной в точке покоя системы имеет такие собственные значения λ_1, λ_2, для которых $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$ либо $\operatorname{Re}\lambda_2 = 0$ (сложная система).

В окрестности негрубого положения равновесия поведение фазовых траекторий нелинейной автономной системы может качественно отличаться от поведения фазовых траекторий линеаризованной в этой точке системы.

Если точка покоя для линеаризованной системы является центром, то для нелинейной системы она может быть как центром, так и фокусом или центрофокусом.

Для исследования точки покоя в этом случае принято переходить к полярным координатам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ и изучать поведение решений системы при $t \to +\infty$.

Предельным циклом называется такая замкнутая траектория, вблизи которой не проходит других замкнутых траекторий.

Траектория предельного цикла разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Траектории во внутренней и внешней областях наматываются на предельный цикл как спирали. При этом существует три типа поведения траекторий вблизи предельного цикла:

1) предельный цикл называется ***устойчивым***, если при $t \to +\infty$ все траектории (и внешние и внутренние) наматываются на него;

2) предельный цикл называется ***вполне неустойчивым***, если при $t \to +\infty$ все траектории (и внешние и внутренние) стремятся от него (все траектории (и внешние и внутренние) наматываются на него при $t \to -\infty$);

3) предельный цикл называется ***полуустойчивым*** в двух случаях: если при $t \to +\infty$ внутренние траектории наматываются, а внешние стремятся от предельного цикла или наоборот.

Пример 5. Исследовать предельные циклы системы $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(1-r^2), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$

Приравнивая к нулю $\frac{dr}{dt} = r(1-r^2) = 0$, получаем два предельных цикла: $r_1 = 0, r_2 = 1$.

Так как $\varphi = t + C$, то при $t \to +\infty$, $\varphi \to +\infty$.

Исследуем знак производной на интервалах:

$r \in (0,1)$	$r \in (1,+\infty)$
$\frac{dr}{dt} < 0$	$\frac{dr}{dt} > 0$

Следовательно, $r_1 = 0$ - устойчивый предельный цикл, а $r_2 = 1$ - вполне неустойчив.

Пример 6. Исследовать характер нулевого положения равновесия системы: $\begin{cases} \dot{x} = -y + x\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = x + y\left(x^2 + y^2\right). \end{cases}$

Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\varphi + r^3\cos\varphi, \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + r^3\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3, \\ r\dot{\varphi} = r. \end{cases}$$

Положение равновесия $r_1 = 0$. Так как при $r > 0$ $\varphi = t + C$, то при $t \to +\infty$, $\varphi \to +\infty$, а $\frac{dr}{dt} > 0$ и следовательно положение равновесия является неустойчивым.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия автономной системы.

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1-y), \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x-4y} + x - 2 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(1 + \sqrt{1+4y-y^3}\right) - \ln 2, \\ \dot{y} = \dfrac{2}{\pi} arctg(x+3y)\pi + 2 - y. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sqrt{1+2y}, \\ \dot{y} = \sin\left(\sqrt{x} - y - 1\right). \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + x + 2y^2 - 2, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$

2. Исследовать особые точки уравнений. Определить их характер и схематически изобразить фазовые траектории линеаризованного уравнения в окрестности положений равновесия.

2.1. $\ddot{x} + x^3 - e^{-\frac{4\dot{x}}{x}} = 0,$

2.2. $\ddot{x} + \dot{x} = \ln\left(1 - 3x + x^2 - \dot{x}\right),$

2.3. $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - x}$,

2.4. $\ddot{x} - (1+\dot{x})^2 + x^5 = 0$,

2.5. $2\ddot{x} + 5\sin\dot{x} + \sqrt{1+4x} - 1 = 0.$

3. Исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение.

3.1. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$

4. Исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь условием отрицательности вещественных частей всех корней многочлена (например, Рауса-Гурвица или Михайлова)

4.1. $y''' + y'' + y' + 2y = 0$

4.2. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$

4.3. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$

5. Исследовать предельные циклы систем. Начертить траектории систем на фазовой плоскости.

5.1. $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(1-r)(2-r), \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(1-r)^2, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \sin r, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$

6. Начертить траектории систем на всей фазовой плоскости.

6.1. $\begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} \dot{x} = -y - x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right), \\ \dot{y} = x - y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right). \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} \dot{x} = -y - x\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = x - y\left(x^2 + y^2\right). \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} \dot{x} = -y + x\left(x^2 + y^2 - 4\right), \\ \dot{y} = x + y\left(x^2 + y^2 - 4\right). \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} \dot{x} = -2y + 2x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = 2x + 2y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \dot{y} = x - y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Какая система называется системой первого приближения (линеаризованной системой) для нелинейной системы дифференциальных уравнений?

2. В каком случае положение равновесия называется грубым? Как ведут себя фазовые траектории нелинейной системы уравнений в окрестности грубого положения равновесия?

3. Сформулируйте и докажите теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению.

4. Сформулируйте и докажите теорему о неустойчивости по первому приближению.

5. В каком случае положение равновесия называется негрубым? Как ведут себя фазовые траектории нелинейной системы уравнений в окрестности негрубого положения равновесия?

6. Сформулируйте критерий отрицательности вещественных частей всех корней алгебраического уравнения n-го порядка Рауса-Гурвица

7. Сформулируйте критерий отрицательности вещественных частей всех корней алгебраического уравнения n-го порядка Михайлова

8. Сформулируйте критерий отрицательности вещественных частей всех корней алгебраического уравнения n-го порядка Льенара-Шипара

9. Какая фазовая траектория называется предельным циклом? Когда предельный цикл называется устойчивым? Вполне устойчивым? Полуустойчивым?

1.3. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости

При использовании всех нижеследующих теорем предполагается, что положение равновесия системы (4) это точка с координатами (0,0). Если положение равновесия другая точка $(y_1^0, y_2^0) \neq (0,0)$, то прежде чем проводить исследование надо сделать замену: $y_1 = z_1 + y_1^0$, $y_2 = z_2 + y_2^0$.

Функция $v(y_1, y_2)$ называется **функцией Ляпунова** для системы (4), если удовлетворяет следующим условиям:

1) $v(y_1, y_2) \geq 0$, причем $v(0,0) = 0$,

2) Производная в силу системы: $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \cdot f_1(y_1, y_2) + \frac{\partial v}{\partial y_2} \cdot f_2(y_1, y_2)$ знакопостоянна в некоторой ε-окрестности начала координат.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если существует функция Ляпунова, производная в силу системы которой неположительна, то точка покоя (0,0) устойчива по Ляпунову.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если существует функция Ляпунова, производная в силу системы которой неположительна, причем найдется такая ε-окрестность точки покоя, в которой она становится строго отрицательной, то точка покоя (0,0) асимптотически устойчива.

Теорема Ляпунова о неустойчивости. Если существует функция Ляпунова, производная в силу системы которой неотрицательна, то точка покоя (0,0) неустойчива.

Теорема Четаева о неустойчивости. Если существует дифференцируемая функция $v(y_1, y_2)$, удовлетворяющая в некоторой замкнутой h-окрестности начала координат следующим условиям:

1). В сколь угодно малой окрестности U начала координат существует область (v>0) в которой $v(y_1, y_2) > 0$, причем $v(y_1, y_2) = 0$ на лежащей в Г части границы этой области.

2). В области (v>0) производная в силу системы неотрицательна, причем в области $(v \geq \alpha)$, $\alpha > 0$ при $x \geq x_0$, $\frac{dv}{dx} \geq \beta > 0$, то точка покоя (0,0) неустойчива.

Пример 1. С помощью функции Ляпунова исследовать устойчивость точки покоя (0,0) системы $\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$

Будем искать функцию Ляпунова в виде $v(x, y) = ax^2 + by^2$.

Вычислим производную функции $V(x, y)$ в силу данной системы:

$$\frac{dv}{dt} = 2ax \cdot \dot{x} + 2by \cdot \dot{y} = 2ax\left(-y - x^3\right) + 2by\left(x - y^3\right) =$$
$$= -2axy - 2ax^4 + 2bxy - 2by^4.$$

Если выбрать a=b=1, то условие 1) из определения функции Ляпунова не нарушится, а производная в силу системы преобразуется в выражение:

$$\frac{dV}{dt} = -2\left(x^4 + y^4\right),$$

которое всюду отрицательно, а в точке (0,0) равно 0.

Следовательно, согласно **теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости** точка покоя (0,0) данной системы асимптотически устойчива.

Пример 2. С помощью теорем Ляпунова и Четаева исследовать устойчивость точки покоя (0,0) системы $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$.

Для исследования используем теорему Четаева. Возьмем функцию $v(x, y) = x^4 - y^4$.

1) Эта функция строго положительна в части окрестности начала координат, заданной неравенством: $|x| > |y|$, причем на границе этой области Г: x=y равна 0.

2) Вычислим производную в силу системы данной функции:

$$\frac{dv}{dt} = 4x^3 \cdot \dot{x} - 4y^3 \cdot \dot{y} = 4x^3 \cdot \left(y^3 + x^5\right) - 4y^3 \cdot \left(x^3 + y^5\right) = 4\left(x^8 - y^8\right).$$

Как видно, $\frac{dv}{dt} > 0$ всюду в области $|x| > |y|$. Следовательно, согласно теореме Четаева точка покоя (0,0) неустойчива.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. С помощью функции Ляпунова вида $v(x,y)=ax^2+by^2$ исследовать устойчивость точки покоя (0,0).

1.1. $\begin{cases}\dot{x}=y-x+xy,\\ \dot{y}=x-y-x^2-y^3\end{cases}$

1.2. $\begin{cases}\dot{x}=y-2x^3,\\ \dot{y}=-2x-y^3.\end{cases}$

1.3. $\begin{cases}\dot{x}=-x-y^2,\\ \dot{y}=xy-x^2y.\end{cases}$

1.4. $\begin{cases}\dot{x}=-xy^2,\\ \dot{y}=-y-2x^2y.\end{cases}$

1.5. $\begin{cases}\dot{x}=2y-x^3\sin^2 t,\\ \dot{y}=-3x-y^5\end{cases}$

1.6. $\begin{cases}\dot{x}=x-y^2,\\ \dot{y}=xy+y^3.\end{cases}$

1.7. $\begin{cases}\dot{x}=2y+x^3,\\ \dot{y}=-x+y^3.\end{cases}$

1.8. $\begin{cases}\dot{x}=-y+2x^3,\\ \dot{y}=2x+y^3.\end{cases}$

1.9. $\begin{cases}\dot{x}=-4x^2y-2x^3,\\ \dot{y}=-x^2y.\end{cases}$

2. С помощью теорем Ляпунова и Четаева исследовать устойчивость точки покоя (0,0).

2.1 $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. Какая функция называется функцией Ляпунова системы обыкновенных дифференциальных уравнений?
2. Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об устойчивости.
3. Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости.
4. Сформулируйте и докажите теорему Ляпунова о неустойчивости.
5. Сформулируйте и докажите теорему Четаева о неустойчивости.

2 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

2.1 Краевая задача. Задача Штурма-Лиувилля

Краевая задача для линейного уравнения второго порядка:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \tag{7}$$

$$\alpha_1 y(x_0) + \beta_1 y'(x_0) = \gamma_1,\ \alpha_2 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = \gamma_2. \tag{8}$$

Решается краевая задача (7) так же как и задача Коши.

Пример 1. $y'' + y' = 1,\ y'(0) = 0, y(1) = 1.$

Найдем общее решение уравнения: $y'' + y' = 1.$ Это линейное неоднородное уравнение. Будем решать его методом неопределенных коэффициентов.

Характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0,$ его решения: $k_1 = 0, k_2 = -1.$

Тогда общее решение неоднородного: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + y^*.$

Будем искать частное решение в виде: $y^* = Ax.$ Подставляем в уравнение для определения коэффициента *A*, получаем: $A = 1.$

Итак, общее решение уравнения $y'' + y' = 1$: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x.$

Для нахождения решения краевой задачи подставим краевые условия в решение и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 e^{-1} + 1 = 1, \\ y'(0) = -C_2 + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 e^{-1} = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{e},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Итак, $C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{e},\ C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$

Решение краевой задачи: $y = -\frac{1}{e} + e^{-x} + x$.

Задача Штурма-Лиувилля:

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = py$,

$\alpha_1 y(x_0) + \beta_1 y'(x_0) = 0,\ \alpha_2 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = 0.$ (9)

Необходимо найти все значения p, при которых задача имеет нетривиальное решение **- собственные значения**. Эти нетривиальные решения называются **собственными функциями**.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные функции уравнения: $y'' = py,\ y(0) = y(1) = 0$

Начнем решать данное однородное уравнение с составления характеристического: $k^2 = p$.

Дальнейшее решение зависит от значений параметра p:

1) Пусть p=0, тогда имеем двукратный корень: $k_1 = k_2 = 0$.

Общее решение уравнения выглядит как: $y = C_1 + C_2 x$.

Подставляем краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y(1) = C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен 0. Определитель данной системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, следовательно, нетривиального решения при p=0 не существует.

2) Пусть $p=w^2>0$, тогда имеем два простых действительных корня: $k_1 = w, k_2 = -w.$

Общее решение уравнения выглядит как: $y = C_1 e^{wx} + C_2 e^{-wx}$.

Подставляем краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y(1) = C_1 e^{w} + C_2 e^{-w} = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{w} & e^{-w} \end{vmatrix} = e^{-w} - e^{w}$, и равен нулю только при w=0.

следовательно нетривиального решения при p>0 также не существует.

3) Пусть p=-w^2<0, тогда имеем пару комплексно-сопряженных корней: $k_1 = -iw, k_2 = iw$.

Общее решение уравнения выглядит как: $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$.

Подставляем краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y(1) = C_1 \cos w + C_2 \sin w = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos w & \sin w \end{vmatrix} = \sin w$, и равен нулю при $w = \pi n, n \in Z$.

Следовательно, $p = -\pi^2 n^2, n \in Z$ - множество собственных значений уравнения.

Дорешаем систему уравнений и вычислим собственные функции:

$y = C_2 \sin wx = C_2 \sin \pi n x$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

1. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным краевым условиям.

1.1. $y'' - 4y = 4,\ y(0) = -1, y(1) = 0$

1.2. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

1.3. $x^2 y'' + xy' - y = 2x,\ y(1) = 0, y(2) = 2\ln 2$

1.4. $y'' - y = 2\sin x,\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

1.5. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(x) = o(x),\ при\ x \to 0, y(1) = 3$

1.6. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0,\ y'(1) = 3,\ y(x) = O(x^{-2})\ при\ x \to +\infty$

1.7. $y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0, y(1) = -1$

1.8. $y'' + \pi^2 y = 1,\ y(0) = y(1) = 0$

2. Найти собственные значения и собственные функции граничной задачи.

2.1. $y'' + 2y' - 2\lambda y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'(0) + y(0) = 0$

2.2. $y'' + \lambda^2 y = 0,\ y(0) = 0, y'(1) = \lambda y(1)$

Контрольные вопросы.

1. Как формулируется краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка?

2. Как формулируется задача Штурма-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка? Что называют собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля? Что называют собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля?

2.2 Функция Грина. Метод ее построения

Функция $G(x,s)$ называется **функцией Грина** краевой задачи (7-8), если удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна по x при фиксированном s $\forall x, s \in [x_0, x_1]$;

2) является решением соответствующего однородного уравнения для (7) $\forall x \in [x_0, x_1]$ за исключением $x=s$;

3) удовлетворяет граничным условиям (8);

4) $\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ имеет разрыв первого рода в точке $x=s$ со скачком равным 1.

Теорема 1 (о существовании функции Грина). Если однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, то существует функция Грина:

$$G(x,s) = \frac{1}{W(\varphi_1(s), \varphi_2(s))} \begin{cases} \varphi_2(s)\varphi_1(x), & x \in [x_0, s) \\ \varphi_1(s)\varphi_2(x), & x \in (s, x_1] \end{cases} \qquad (10)$$

где $W(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix}$ - определитель Вронского.

$\varphi_1(x)$ - решение задачи Коши $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$,

$y(x_0) = \beta_1, y'(x_0) = -\alpha_1$,

$\varphi_2(x)$ - решение задачи Коши $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$,

$y(x_1) = \beta_2, y'(x_1) = -\alpha_2$,

Теорема 2 (о решении краевой задачи при помощи функции Грина). Если соответствующая однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, то решение данной краевой задачи существует, единственно и определяется как:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s) ds = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x)}{W(\varphi_1(s), \varphi_2(s))} f(s) ds + \int_{x}^{x_1} \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x)}{W(\varphi_1(s), \varphi_2(s))} f(s) ds \qquad (11)$$

Пример1. Построить функцию Грина для краевой задачи $y'' + y' = f(x)$, $y(0) = y'(1) = 0$ и записать с ее помощью решение краевой задачи.

Шаг 1) Найдем общее решение однородного уравнения: $y''+y'=0$.

Решение характеристического уравнения: $\lambda^2+\lambda=0$, $\lambda(1+\lambda)=0$, $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1$.

Общее решение однородного уравнения: $y=C_1+C_2e^{-x}$.

Шаг 2) Решим начальную задачу $y''+y'=0,\ y(0)=0, y'(0)=-1$. Подставим начальные условия в общее решение:

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=0, \\ y'(0)=-C_2=-1, \end{cases} \begin{cases} C_1=-1, \\ C_2=1. \end{cases}$$

Итак, $\varphi_1(x)=-1+e^{-x}$.

Шаг 3) Решим начальную задачу $y''+y'=0,\ y(1)=1, y'(1)=0$. Подставим начальные условия в общее решение:

$$\begin{cases} y(1)=C_1+\dfrac{C_2}{e}=1, \\ y'(1)=-\dfrac{C_2}{e}=0, \end{cases} \begin{cases} C_1=1, \\ C_2=0. \end{cases}$$

Итак, $\varphi_2(x)=1$.

Шаг 4) Составляем функцию Грина, используя (10).

$$W(\varphi_1(s),\varphi_2(s))=\begin{vmatrix} -1+e^{-s} & 1 \\ -e^{-s} & 0 \end{vmatrix}=e^{-s}.$$

$$G(x,s)=e^s\begin{cases} -1+e^{-x}, & x\in[0,s), \\ -1+e^{-s}, & x\in(s,1]. \end{cases}$$

Шаг 5) Запишем решение краевой задачи, используя (11):

$$y(x)=\int_0^x\left(1-e^s\right)f(s)ds+\int_x^1 e^s\left(-1+e^{-x}\right)f(s)ds.$$

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

Построить функцию Грина и записать с ее помощью решение краевой задачи.

1. $y'' + y' = f(x),\ y(+\infty) = 0, y'(0) = 0;$

2. $x^2 y'' - 2y = f(x),\ y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$ и при $x \to 0;$

3. $x^2 y'' - 2y = f(x),\ y(1) = 0, y(2) + 2y'(2) = 0.$

Контрольные вопросы.

1. Что такое функция Грина краевой задачи?

2. Сформулируйте и докажите теорему о существовании функции Грина.

3. Сформулируйте и докажите теорему о решении краевой задачи при помощи функции Грина.

3 ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

Теорема. Если $f(x)$ голоморфна в точке (0,0), то есть представима в виде ряда $f(x,y)=\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$, с радиусами сходимости: $|x|<\rho, |y|<r$, то задача Коши $y'=f(x,y), y(0)=0$ имеет единственное решение $y=y(x)$, голоморфное в точке (0,0): $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k, |x|<\rho_1<\rho$.

Метод последовательного дифференцирования. Решение задачи Коши $y'=f(x,y), y(x_0)=y_0$ ищем в виде ряда Тейлора:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+R_n, \qquad (1)$$

первое слагаемое – это начальное условие, остальные ищем последовательным дифференцированием функции $f(x,y)$. Погрешность найденного решения не превышает остаточного члена ряда:

$$R_n \le \max\left|\frac{y^{(n+1)}(x)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти, используя метод последовательного дифференцирования, решение задачи Коши $y'=2x+\cos y,\ y(0)=0$ в виде степенного ряда. Вычислить коэффициенты ряда до коэффициента при x^3 включительно.

$y(0)=0$,

$y'(x)=2x+\cos y(x),\ y'(0)=2\cdot 0+\cos(y(0))=\cos 0=1$,

$y''(x)=2-\sin y(x)\cdot y'(x),\ y''(0)=2-\sin(y(0))\cdot y'(0)=2-\sin 0\cdot 1=2$,

$$y'''(x) = -\cos y(x)\cdot\left(y'(x)\right)^2 - \sin y(x)\cdot y''(x),$$

$$y'''(0) = -\cos y(0)\cdot\left(y'(0)\right)^2 - \sin y(0)\cdot y''(0) = -\cos 0\cdot 1^2 - \sin 0\cdot 2 = -1,$$

Итак, запишем решение задачи Коши в виде степенного ряда, используя формулу (1):

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}(x-0) + \frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{y'''(0)}{3!}(x-0)^3 + R_3 = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + R_3 \cdot$$

Метод неопределенных коэффициентов. Решение задачи Коши $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ ищем в виде ряда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Коэффициенты ряда a_i находятся методом неопределенных коэффициентов, после подстановки решения в начальные условия и в уравнение.

Пример 2. Найти, используя метод неопределенных коэффициентов, решение задачи Коши $y' = 2x + \cos y,\ y(0) = 0$ в виде степенного ряда. Вычислить коэффициенты ряда до коэффициента при x^3 включительно.

Будем искать решение задачи Коши в виде ряда:

$$y(x) \approx \sum_{n=0}^{3} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \qquad (3)$$

Вычислим

$$y'(x) \approx a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2. \qquad (4)$$

Подставляем (3, 4) в заданное уравнение и в начальные условия:

$$a_0 + a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0^2 + a_3\cdot 0^3 = a_0 = 0,$$
$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = 2x + \cos\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right).$$

или

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = 2x + \cos\left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right). \qquad (5)$$

Разложим функцию $g(x)=\cos\left(a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)$ в ряд по формуле (1):

$$g(0)=\cos\left(a_1\cdot 0+a_2\cdot 0^2+a_3\cdot 0^3\right)=1,$$

$$g'(x)=-\sin\left(a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)\cdot\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2\right),\ g'(0)=0,$$

$$g''(x)=-\cos\left(a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)\cdot\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2\right)^2-$$

$$-\sin\left(a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3\right)\cdot\left(2a_2+6a_3x\right),$$

$$g''(0)=-{a_1}^2.$$

Тогда $g(x)=\cos\left(a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)\approx 1-\frac{a_1^2x^2}{2}$.

Подставляем $g(x)$ в уравнение (5):

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2=2x+1-\frac{{a_1}^2x^2}{2}.$$

Для полученного уравнения используем метод неопределенных коэффициентов:

$$x^0:\ \ a_1=1,$$

$$x^1:\ \ 2a_2=2\ \ \Rightarrow\ \ a_2=1,$$

$$x^2:\ \ 3a_3=-\frac{{a_1}^2}{2}\ \ \Rightarrow\ \ a_3=-\frac{1}{6}.$$

Подставляя в формулу (3), найденные коэффициенты, получим решение задачи Коши в виде ряда: $y(x)\approx x+x^2-\frac{x^3}{6}$.

Задания для решения на практическом занятии и самостоятельной работы.

Найти в виде степенного ряда решение, задачи Коши. Вычислить коэффициенты ряда до коэффициента при x^4 включительно двумя

методами: методом последовательного дифференцирования и методом неопределенных коэффициентов.

1. $y' = y + xe^y,\ y(0) = 0.$

2. $y'' = xy^2 - y', y(0) = 2, y'(0) = 1.$

3. $y'' - x^2 y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

4. $y'' = xy' - y^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

5. $y'' - xy' - 2y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте и докажите теорему о голоморфном решении задачи Коши.

2. В чем состоит метод последовательного дифференцирования для построения решения в виде степенного ряда?

3. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов для построения решения в виде степенного ряда?

3.2. Метод Пикара

Решение задачи Коши $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ ищем последовательными приближениями по рекуррентной формуле:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx. \qquad (6)$$

Погрешность n-го приближения в прямоугольнике $D:\ \{|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$, полученного методом Пикара, оцениваем по формуле:

$$\varepsilon_n = |y_{n+1} - y_n| \le \frac{MN^n}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad (7)$$

где $N = \max\limits_{D} \left| \dfrac{\partial f}{\partial y} \right|$,

$M = \max\limits_{D} |f(x, y)|$,

$H = \min\left(a, \dfrac{b}{M} \right)$.

Пример 1. Для задачи Коши $y' = (x+1)^2 y, \quad y(0) = 1$, найти второе приближение методом Пикара, оценить погрешность полученного решения.

По условию $y_0 = y(0) = 1$.

Используя формулу (6) получим последовательно приближения к решению задачи Коши до второго включительно:

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (x+1)^2 y_0 dx = 1 + \int_0^x (x+1)^2 dx = \frac{2}{3} + \frac{(1+x)^3}{3},$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (x+1)^2 y_1 dx = 1 + \int_0^x (x+1)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{(1+x)^3}{3} \right) dx =$$

$$= 1 + \frac{2(x+1)^3}{9} + \frac{(x+1)^6}{18} - \frac{5}{18}.$$

На рисунке 1 изображены все полученные приближения и точное решение данной задачи. На рисунке 1 хорошо прослеживается асимптотическое приближение элементов последовательности Пикара при росте *n* к точному решению.

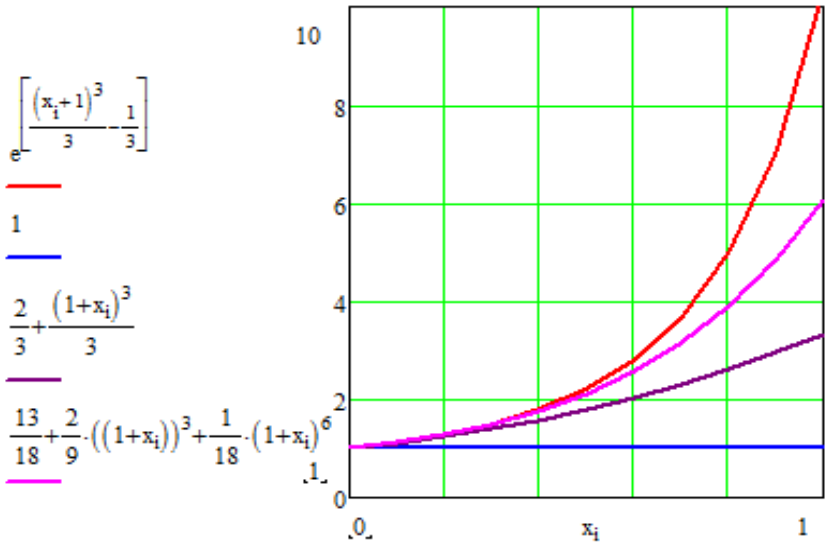


Рисунок 1 – Точное решение задачи Коши и последовательные приближения Пикара из примера 1

Для оценки погрешности решения $y(x)=1+\dfrac{2(x+1)^3}{9}+\dfrac{(x+1)^6}{18}-\dfrac{5}{18}$, воспользуемся формулой (7). Возьмем для оценки прямоугольник D: $\{-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$. Рассчитаем:

$$N=\max_D\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\max_D(x+1)^2=4,$$

$$M=\max_D|f(x,y)|=8,$$

$$H=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)=\min\left(1,\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}.$$

Итак, оценка погрешности: $\varepsilon_2\le\dfrac{8\cdot4^2}{(2+1)!}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2+1}=\dfrac{1}{24}$.

Задание для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Методом Пикара найти три последовательных приближения и оценить погрешность, полученного решения.

1.1. $x'=2t-x,\ \ x(0)=2,\ \ a=1,b=1.$

1.2. $x''=-2tx,\ \ x(0)=x'(0)=1.$

1.3. $\begin{cases} x' = y, & x(0) = 0, \\ y' = t + x^2, & y(0) = 1. \end{cases}$

1.4. $x' = 2\cos t - tx^2,\ x(0) = 1,\ a = \frac{1}{2}, b = 1.$

1.5. $x'' - tx' + x = 1,\quad x(0) = x'(0) = 0.$

1.6. $\begin{cases} x' = x + ty, & x(1) = 1, \\ y' = 1 - xy, & y(1) = -2. \end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. По какой формуле составляются последовательные приближения Пикара?

2. Как рассчитать погрешность *n*-го приближения Пикара?

3. Сформулируйте и докажите Лемму 2 о том, что ни одно из последовательных приближений Пикара не выйдет из прямоугольника *D*.

4. Сформулируйте и докажите Лемму 3 о том, что существует предел последовательности Пикара.

5. Сформулируйте и докажите Лемму 4 о том, что предел последовательности Пикара является решением задачи Коши.

3.3. Метод малого параметра

Рассмотрим задачу Коши, в условии которой присутствует некоторая величина $0 < \mu \ll 1$, называемая ***малым параметром***:

$$y' = f(x, y, \mu), y(x_0) = y_0. \qquad (8)$$

Часто при наличии малого параметра, уравнение из задачи (8) невозможно решить аналитически. Решение в этом случае можно искать в виде ряда по степеням малого параметра. Условия, при которых такой подход к решению возможен, определяет следующая теорема.

Теорема об аналитической зависимости решения от параметра. Решение $y(x,\mu)$ дифференциального уравнения $y' = f(x,y,\mu)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ аналитически зависит от параметра μ в окрестности значения $\mu = \mu_0$, если функция $f(x,y,\mu)$ в заданной области изменения x и y и в некоторой окрестности точки μ_0 непрерывна по x и аналитически зависит от μ и y.

Условия данной теоремы для доказательства разобьем на две теоремы:

Теорема 1. О непрерывности решения по параметру. Пусть в некоторой области $D = \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, |\mu - \mu_0| \le c\}$ $f(x,y,\mu)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица: $|f(y_1,x,\mu) - f(y_2,x,\mu)| \le N|y_1 - y_2|$. Тогда решение $y(x,\mu)$ непрерывно по μ $\forall \mu: |\mu - \mu_0| \le c$.

Теорема 2. О дифференцируемости решения по параметру. Пусть в некоторой области $D = \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, |\mu - \mu_0| \le c\}$ $f(x,y,\mu)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица: $|f(y_1,x,\mu) - f(y_2,x,\mu)| \le N|y_1 - y_2|$, а также существуют непрерывные по всем аргументам производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial \mu}$. Тогда решение $y(x,\mu)$ $\forall \mu:$ $|\mu - \mu_0| \le c$ имеет непрерывную производную по μ.

Следствие теоремы (о непрерывности и дифференцируемости решений по начальным данным).

Если правая часть уравнения $y' = f(x,y)$ имеет непрерывную производную по x и y, то решение $y(x,x_0,y_0)$, которое удовлетворяет

задаче Коши непрерывно и имеет непрерывные производные по x_0 и y_0.

Таким образом, согласно сформулированным теоремам метод малого параметра позволяет получить асимптотическое представление решения, т.е. в виде функции, содержащей неустранимую погрешность, но асимптотически приближающуюся к тонному решению при стремлении параметра к 0.

Алгоритм применения метода малого параметра к решению задачи (8).

Решение задачи (8) будем искать в виде степенного ряда по степеням малого параметра, оставляя в нем столько слагаемых, сколько требуется:

$$y(x,\mu) = \varphi_0(x) + \mu\varphi_1(x) + \mu^2\varphi_2(x) + \dots . \qquad (9)$$

Для определения коэффициентов $\varphi_i(x)$ из формулы (9) подставляем (9) в задачу (8), для чего составляем производную неизвестной функции:

$$\frac{dy(x,\mu)}{dx} = \varphi_0'(x) + \mu\varphi_1'(x) + \mu^2\varphi_2'(x) + \dots . \qquad (10)$$

Коэффициенты $\varphi_i(x)$ находятся методом неопределенных коэффициентов.

Пример 1. Для задачи Коши $y' = y - x + \mu x e^{2y}$, $y(1) = 2 - \mu$ найти два члена разложения решения по степеням малого параметра μ.

Согласно формуле (9) решение будем искать в виде:

$$y(x,\mu) = \varphi_0(x) + \mu\varphi_1(x) + \mu^2\varphi_2(x) + o(\mu^2). \qquad (11)$$

Вычислим:

$$y'(x,\mu) = \varphi_0'(x) + \mu\varphi_1'(x) + \mu^2\varphi_2'(x) + o(\mu^2). \qquad (12)$$

Подставим (11, 12) в исходную задачу Коши:

в уравнение:

$$\varphi_0'(x)+\mu\varphi_1'(x)+\mu^2\varphi_2'(x)+o(\mu^2)=$$

$$=\varphi_0(x)+\mu\varphi_1(x)+\mu^2\varphi_2(x)+o(\mu^2)-x+ \qquad (13)$$

$$+\mu x e^{2(\varphi_0(x)+\mu\varphi_1(x)+\mu^2\varphi_2(x)+o(\mu^2))},$$

и в начальное условие:

$$y(1,\mu)=\varphi_0(1)+\mu\varphi_1(1)+\mu^2\varphi_2(1)+o(\mu^2)=2-\mu. \qquad (14)$$

Для применения метода неопределенных коэффициентов разложим экспоненту в ряд Маклорена по степеням малого параметра μ:

$$e^{2(\varphi_0(x)+\mu\varphi_1(x)+\mu^2\varphi_2(x)+o(\mu^2))}=e^{2\varphi_0(x)}+2\varphi_1(x)e^{2\varphi_0(x)}\mu+o(\mu), \qquad (15)$$

и подставим (15) в уравнение (13):

$$\varphi_0'(x)+\mu\varphi_1'(x)+\mu^2\varphi_2'(x)+o(\mu^2)=$$

$$=\varphi_0(x)+\mu\varphi_1(x)+\mu^2\varphi_2(x)+o(\mu^2)-x+ \qquad (16)$$

$$+\mu x\left(e^{2\varphi_0(x)}+2\varphi_1(x)e^{2\varphi_0(x)}\mu+o(\mu)\right).$$

Выписываем коэффициенты при степенях малого параметра μ из уравнения (16) и начальных условий (14):

$$\mu^0:\ \varphi_0'=\varphi_0-x,\ \varphi_0(1)=2, \qquad (17)$$

$$\mu^1:\ \varphi_1'=\varphi_1+xe^{2\varphi_0},\ \varphi_1(1)=-1, \qquad (18)$$

$$\mu^2:\ \varphi_2'=\varphi_2+2x\varphi_1e^{2\varphi_0},\ \varphi_2(1)=0. \qquad (19)$$

Решая последовательно задачи Коши (17-19), получим коэффициенты в разложении (11).

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Найти два члена разложения решения по степеням малого параметра μ.

1.1. $y' = 2\mu x^{-1} + y^2,\ \ y(1) = -1.$

1.2. $y' = 2x + \mu y^2,\ y(0) = \mu - 1.$

1.3. $y' = 2xy + \sin y, \quad y(1) = y_0,$

1.4. $\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, & y(0) = 0. \end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте и докажите лемму о дифференциальных неравенствах.

2. Сформулируйте и докажите лемму Адамара.

3. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности решения по параметру.

4. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцируемости решения по параметру.

5. Сформулируйте и обоснуйте следствие о сведении задачи зависимости решения от начальных данных к исследованию зависимости решения от параметра.

4 УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4.1. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений с помощью первых интегралов

Непрерывно дифференцируемая функция $u(y)$ называется ***первым интегралом*** автономной системы

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, ..., y_n), (i = 1, 2, ..., n), \qquad (1)$$

если для каждого решения системы $y = \varphi(t)$ - $u\left[\varphi(t)\right] \equiv const$.

Критерий первого интеграла. Непрерывно дифференцируемая функция $u(y)$ является первым интегралом системы (1) в том и только в том случае, когда производная в силу системы: $\dot{u}(y) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(y) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y_j} \equiv 0$.

Пример 1. Проверить являются ли функции $u_1 = t^2 + 2xy,\ u_2 = x^2 - ty$ первыми интегралами системы: $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2 - t}{y}, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

Воспользуемся критерием первого интеграла. Вычислим производную в силу системы функций u_1 и u_2:

$$\frac{du_1}{dt} = 2t + 2y\dot{x} + 2x\dot{y} = 2t + 2y \cdot \frac{x^2 - t}{y} + 2x \cdot (-x) \equiv 0,$$

$$\frac{du_2}{dt} = 2x\dot{x} - y - t\dot{y} = 2x \cdot \frac{x^2 - t}{y} - y - t \cdot (-x) = \frac{2x^3 - xt - y}{y}.$$

Итак, согласно критерию функция u_1 является первым интегралом данной системы, а функция u_2 не является.

Первые интегралы $u_1(y), u_2(y), ..., u_k(y)\ 1 \le k \le n$, определенные в некоторой окрестности точки $a \in \Omega$ называются ***независимыми*** в точке a, если ранг матрицы Якоби: $\left\| \frac{\partial u_i(a)}{\partial y_j} \right\|$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$ равен k.

Теорема. Система n-го порядка имеет в окрестности не особой точки ровно n-1 независимых первых интегралов. Если известны независимые в точке a первые интегралы $u_1(y)$, …, $u_k(y)$, то в некоторой окрестности этой точки Ω_a порядок системы можно понизить на k единиц.

Для нахождения первых интегралов системы используют методику составления интегрируемых комбинаций из уравнений системы, для чего:

1) Составляют новые уравнения из исходных, умножая, деля, вычитая уравнения.

2) Используя симметрическую форму записи системы (1)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy_1}{f_1(y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(y_1, y_2, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(y_1, y_2, ..., y_n)},$$

составляют новые уравнения, пользуясь свойством равных дробей:

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = p$, то $\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + ... + k_n b_n} = p$.

Пример 2. Найдя первый интеграл, решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = xy - 2z^2, \\ \dot{z} = xz. \end{cases}$

Разделим первое уравнение системы на третье: $\frac{dx}{dz} = \frac{-x^2}{xz}$ - получили уравнение с разделяющимися переменными. Его общий интеграл:

$$xz = C_1. \qquad (2)$$

Функция (2) и есть первый интеграл системы. Используем эту функцию для решения системы. Выразим из нее $x = \frac{C_1}{z}$ и подставим в третье уравнение: $\frac{dz}{dt} = \frac{C_1}{z} \cdot z = C_1$. Получили уравнение с разделяющимися переменными, его общее решение: $z = C_1 t + C_2$, тогда $x = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}$.

Подставляя найденные выражения для x и z во второе уравнение системы, получим линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$\dot{y} = \frac{C_1 y}{C_1 t + C_2} - 2\left(C_1 t + C_2\right)^2,$$

его общее решение: $y = \left(C_1 t + C_2\right)\left(C_3 - C_1 t^2 - 2C_2 t\right)$.

Итак, решение исходной системы:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{C_1 t + C_2}, \\ y = \left(C_1 t + C_2\right)\left(C_3 - C_1 t^2 - 2C_2 t\right), \\ z = C_1 t + C_2. \end{cases}$$

Пример 3. Найдя два независимых первых интеграла, решить систему $\begin{cases} \dot{x} = xz, \\ \dot{y} = yz, \\ \dot{z} = -xy. \end{cases}$

Запишем систему в симметрической форме: $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$.

Первое равенство образует интегрируемую комбинацию: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, интегрируя которую получаем первый интеграл:

$$\frac{x}{y}=C_1. \qquad (3)$$

Для нахождения второй интегрируемой комбинации, воспользуемся свойством равных дробей и из симметрической формы записи системы, получим:

$$\frac{ydx+xdy}{yxz+xyz}=\frac{dz}{-xy},$$

$$\frac{d(xy)}{2z(xy)}=\frac{dz}{-xy},$$

$$d(xy)=-2zdz,$$

$$xy+z^2=C_2. \qquad (4)$$

Проверим независимость первых интегралов (3,4). Ранг матрицы Якоби равен 2:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ y & x & 2z \end{Vmatrix}.$$

Используя первые интегралы (3,4), понижаем порядок системы до первого. Выражаем из (3) $x=C_1y$, подставляем в (4) и выражаем $z=\pm\sqrt{C_2-C_1y^2}$. Подставляем во второе уравнение исходной системы и получаем уравнение с разделяющимися переменными $\dot{y}=\pm\sqrt{C_2-C_1y^2}\cdot y$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Для данных систем проверить являются ли функции $u=C$ первыми интегралами этих систем.

1.1. $\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2. \end{cases}$

$u_1 = x\ln y - x^2 y, \quad u_2 = \dfrac{y^2}{x^2} - 2\ln x.$

1.2. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = -z. \end{cases}$

$u = yz - vx.$

1.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2xz, \\ \dot{y} = 2yz, \\ \dot{z} = z^2 - x^2 - y^2. \end{cases}$

$u_1 = \dfrac{1}{x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \quad u_2 = \dfrac{y}{x}.$

2. Найдя первый интеграл, решить системы.

2.1. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y, \\ \dot{y} = xy^2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + z, \\ \dot{y} = y^2 e^{3x}, \\ \dot{z} = (1+z)^2. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{y}, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} \dot{x} = x\left(2y + z\right), \\ \dot{y} = xe^z + y, \\ \dot{z} = -(2y + z). \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \dot{x} = y - xy, \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$

3. Найти два независимых первых интеграла, проверить их независимость, построив матрицу Якоби. Используя найденные первые интегралы, решить системы.

3.1. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - x, \\ \dot{y} = -xy^2, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} \dot{x} = z^2 - y^2, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} \dot{x} = x(x + y), \\ \dot{y} = -y(x + y), \\ \dot{z} = -z(x - y). \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} \dot{x} = x(y - z), \\ \dot{y} = -y(y + z), \\ \dot{z} = z(y + z). \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + z^2, \\ \dot{y} = y(x - z), \\ \dot{z} = 2xz. \end{cases}$

Контрольные вопросы.

1. Какая функция называется первым интегралом автономной системы дифференциальных уравнений?

2. Сформулируйте и докажите критерий первого интеграла.

3. Сформулируйте и докажите лемму о суперпозиции первых интегралов.

4. Сформулируйте и докажите утверждение о бесконечном множестве первых интегралов для автономной системы дифференциальных уравнений.

5. В каком случае первые интегралы называются независимыми в данной точке?

6. Сформулируйте и докажите теорему о существовании независимых первых интегралов в окрестности не особой точки.

7. Сформулируйте и докажите теорему о понижении порядка системы по k первым интегралам.

8. Как записать систему дифференциальных уравнений в симметрической форме?

4.2. Линейные однородные уравнения первого порядка в частных производных

Линейное однородное уравнение первого порядка в частных производных:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \qquad (5)$$

Для решения уравнения (5) находим $u_1(x), u_2(x), ..., u_{n-1}(x)$ - n-1 независимых первых интегралов ***характеристической системы***:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ ..., \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \quad (6)$$

Тогда ***общее решение*** линейного однородного уравнения (5):

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = F(u_1(x), u_2(x), ..., u_{n-1}(x)). \quad (7)$$

Начальные условия (задача Коши)

$$u(x)\big|_{x\in\gamma} = \varphi(x),\ \gamma : g(x) = 0. \quad (8)$$

Геометрический смысл задачи Коши. Найти гиперповерхность, удовлетворяющую уравнению (5) и проходящую через начальную кривую $u = \varphi(x)$, если $x_1, x_2, ..., x_n$ образуют начальную поверхность $\gamma : g(x) = 0$.

Геометрический смысл задачи Коши для уравнения второго порядка $a_1(x_1, x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, $u(x)\big|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$ (см. рисунок 1):

γ - кривая на плоскости x_1Ox_2,

$u = \varphi(x_1, x_2)$ - кривая в пространстве x_1ux_2.

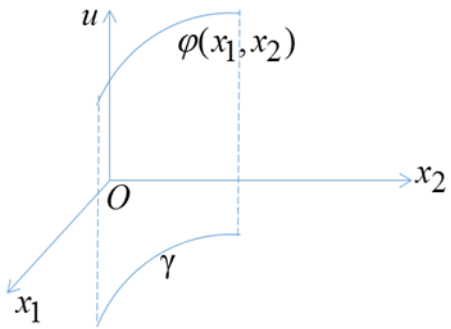


Рисунок 1 - Геометрический смысл задачи Коши для уравнения второго порядка

Чтобы решить задачу Коши (5,8) необходимо найти n-1 независимых первых интегралов системы (6) $u_1(x), u_2(x), ..., u_{n-1}(x)$, и из системы:

$$\begin{cases} g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ u_1(x_1, x_2, ..., x_n) = C_1, \\ ..., \\ u_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = C_{n-1} \end{cases} \qquad (9)$$

выразить $x_1, x_2, ..., x_n$ через $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ и подставить найденные выражения в функцию $u = \varphi(x)$.

Пример 1. Найти общее решение системы $x\frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 + y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ и решить задачу Коши с начальными условиями $u\big|_{x=1} = y^2 - z^2$.

Составляем характеристическую систему: $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + z, \\ \dot{z} = x^2 + y. \end{cases}$

Два независимых первых интеграла для данной системы:

$x(y - z) = C_1$ и $\frac{y + z - 2x^2}{2x} = C_2$.

Тогда общее решение можно составить по формуле (7):

$$u(x, y, z) = F\left(x(z - y), \frac{y + z - 2x^2}{2x} \right).$$

Для решения задачи Коши составим систему (9):

$$\begin{cases} x(z - y) = u_1, \\ \frac{y + z - 2x^2}{2x} = u_2, \\ x = 1. \end{cases}$$

С помощью последней системы выразим функцию $y^2 - z^2$ через первые интегралы u_1 и u_2.

Подставим значение x=1 в первое и второе уравнение:

$$\begin{cases}(z-y)=u_1,\\ y+z=2u_2+2,\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на второе:

$$(z-y)(z+y)=2u_1(u_2+1),$$

$$y^2-z^2=-2u_1(u_2+1).$$

Итак, решение задачи Коши: $u(x,y,z)=-2x(z-y)\left(\frac{y+z-2x^2}{2x}+1\right)$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Найти общее решение и решить задачу Коши.

1.1. $x\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+x^4y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\frac{2z-x^2}{2x^2}$ при $xy=-1.$

1.2. $(x^2+z^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2(xy-xz^3)\frac{\partial u}{\partial y}+2xz\frac{\partial u}{\partial z}=0,$

$u=\frac{y}{z}-\frac{z^2}{2}$ при $x^2-z^2=2.$

1.3. $x\frac{\partial u}{\partial x}+\left(y+\frac{x^4}{z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=\frac{yz^5-1}{z^7}$ при $xz=1.$

1.4. $\frac{z}{y}\frac{\partial u}{\partial x}-2yz\frac{\partial u}{\partial y}+(z^2+2xy-1)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=xy-\frac{1}{2}$ при $xy+z^2=1.$

1.5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z^2(x-3y)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=\frac{x^2}{y}$ при $3yz=1.$

Контрольные вопросы.

1. Какой общий вид уравнения в частных производных первого порядка?

2. Что является решением уравнения в частных производных первого порядка? Что является графиком решения?

3. Какое уравнение называется линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка?

4. Как составить характеристическую систему для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка?

5. Что такое характеристики линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка?

6. Сформулируйте и докажите теорему о виде решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

7. Как записывается задача Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка? Каков геометрический смысл задачи Коши в случае, когда неизвестная функция имеет два аргумента?

8. Какая точка называется характеристической точкой линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка? В чем геометрический смысл характеристической точки? Как связаны положения равновесия характеристической системы и характеристические точки уравнения?

9. Сформулируйте и докажите теорему о решении задачи Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка в окрестности не характеристической точки.

4.3. Квазилинейные уравнения первого порядка в частных производных

Квазилинейное уравнение первого порядка в частных производных:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = c(x_1, x_2, ..., x_n, u) \tag{10}$$

Для решения уравнения (10) находим $v_1(x,u), v_2(x,u), ..., v_n(x,u)$ - n независимых первых интегралов ***характеристической системы***:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, x_2, ..., x_n, u), \\ ..., \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, x_2, ..., x_n, u) \\ \dot{u} = c(x_1, x_2, ..., x_n, u) \end{cases} \tag{11}$$

Тогда ***общее решение*** системы (10)

$$F(v_1(x,u), v_2(x,u), ..., v_n(x,u)) = 0. \tag{12}$$

Если искомая функция входит только в один из первых интегралов: $v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x,u)$, то общее решение можно записать в явном виде:

$$v_n(x,u) = f(v_1, v_2, ..., v_{n-1}). \tag{13}$$

Задача Коши для уравнения с двумя независимыми переменными: задача нахождения интегральной поверхности, проходящей через кривую $\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{cases}$

Для решения задачи Коши необходимо из системы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ v_1(x_1, x_2, x_3) = C_1, \\ v_2(x_1, x_2, x_3) = C_2 \end{cases} \tag{14}$$

исключить x_1, x_2, x_3.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-xy$ и решить задачу Коши с начальными условиями: $x=2, u=1+y^2$.

Составим характеристическую систему (11):

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x,\\ \dot{y}(t)=y,\\ \dot{u}(t)=u-xy.\end{cases}$$

Первые интегралы этой системы: $v_1=\frac{y}{x}=C_1$ и $v_2=\frac{u}{y}+x=C_2$.

По формуле (12) запишем общее решение исходного уравнения:

$$F\left(\frac{y}{x},\frac{u}{y}+x\right)=0.$$

Так искомая функция входит только в первый интеграл $v_2(x,u)=C_2$, общее решение можно записать в явном виде по формуле (13):

$$u=y\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)-xy.$$

Решение задачи Коши ищем, исключая *x*, *y*, *u* из системы (14):

$$\begin{cases}x=2,\\ u=1+y^2,\\ u_1=\frac{y}{x},\\ u_2=\frac{u}{y}+x.\end{cases}$$

Подставляем выражения $x=2, u=1+y^2$ в третье и четвертое уравнения системы:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{y}{2}, \\ u_2 = \dfrac{1+y^2}{y} + 2. \end{cases}$$

Выражаем y из первого уравнения и подставляем во второе, получаем:

$$u_2 = \frac{1+4u_1^2}{2u_1} + 2\,.$$

Возвращаясь к выражениям для первых интегралов, получаем решение задачи Коши:

$$\frac{u}{y} + x = \frac{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\dfrac{y}{x}} + 2, \text{ или } u = y \cdot \left(\frac{1+4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\dfrac{y}{x}} + 2 \right) - xy\,.$$

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Найти общее решение и решить задачу Коши.

1.1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - 1$

1.2. $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, z = x,\ y = 1$

1.3. $xz^4\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz^4\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2, z = x^2,\ y = \dfrac{1}{x}$

1.4. $(x^2y - x)\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = z, z = x,\ y = 1$

1.5. $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz, z = x,\ y = 1$

1.6. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y, z = y,\ x = 0$

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение в частных производных первого порядка называется квазилинейным уравнением?

2. Как составить характеристическую систему для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка?

3. Что такое характеристики квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка?

4. Сформулируйте и докажите теорему о связи между характеристиками квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка и интегральной поверхностью.

5. Как привести квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка к линейному?

6. Как составить общее решение квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка?

7. Как записывается задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка? Каков геометрический смысл задачи Коши в случае, когда неизвестная функция имеет два аргумента?

8. Какая точка называется характеристической точкой квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка? В чем геометрический смысл характеристической точки?

9. Сформулируйте и докажите теорему о решении задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в окрестности не характеристической точки.

4.4. Приведение к каноническому виду квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка

Квазилинейное уравнение в частных производных второго порядка:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \quad (15)$$

Дискриминантом уравнения (15) называется выражение:

$$\Delta(x,y)=B^2-AC. \quad (16)$$

Если в области $D\in xOy$ дискриминант (16):

1) $\Delta>0$, то (15) ***гиперболическое уравнение*** в области *D*.

2) $\Delta=0$, то (15) ***параболическое уравнение*** в области *D*.

3) $\Delta<0$, то (15) ***эллиптическое уравнение*** в области *D*.

Для решения уравнение (15) приводят ***в канонический вид:***

Гиперболическое: $$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \quad (17)$$

Параболическое: $$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \quad (18)$$

Эллиптическое: $$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \quad (19)$$

Замена переменных для приведения в канонический вид:

$$\xi=\varphi_1(x,y),\eta=\varphi_2(x,y), \quad (20)$$

Для подстановки (20) в (15) рассчитываем производные по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}.$$

Для проведения замены (20) необходимо выполнение ***условия разрешимости*** относительно *x*, *y*:

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (22)$$

Для определения формул в замене (20) решаем ***характеристическое уравнение***:

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0. \qquad (23)$$

1 случай) Если A=C=0, $B\neq 0$, то уравнение (15) гиперболического типа и его канонический вид: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{-f\left(x,y,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{2B(x,y)}$.

2 случай) Если $A\neq 0$, то характеристическое уравнение (23) разрешается двумя способами:

$$Ady-\left(B+\sqrt{\Delta}\right)dx=0 \text{ или } Ady-\left(B-\sqrt{\Delta}\right)dx=0\ . \qquad (24)$$

Если $C\neq 0$, то характеристическое уравнение (23) разрешается двумя способами:

$$Cdx-\left(B+\sqrt{\Delta}\right)dy=0 \text{ или } Cdx-\left(B-\sqrt{\Delta}\right)dy=0. \qquad (25)$$

Решения уравнений вида (24-25): $\varphi_1(x,y)=C_1$, $\varphi_2(x,y)=C_2$ называются ***характеристиками***.

После нахождения характеристик выполняем замену:

1) В гиперболическом уравнении $\xi=\varphi_1(x,y),\eta=\varphi_2(x,y)$.

2) В параболическом уравнении

$\xi=\varphi_1(x,y)$, $\eta=x$ или $\xi=\varphi_1(x,y)$, $\eta=y$ (при выборе η проверить условие разрешимости (22))

3) В эллиптическом уравнении:

По комплексному интегралу одного из уравнений (24, 25) $\tilde{\varphi}_1(x,y)$ записываем функции $\varphi_1(x,y)=\mathrm{Re}\,\tilde{\varphi}_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)=\mathrm{Im}\,\tilde{\varphi}_1(x,y)$.

Для упрощения решения можно подбирать формулы для замены, пользуясь следующим замечанием:

Замечание. Если $\varphi(x,y)$ интеграл уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, то $\Phi\big(\varphi(x,y)\big)$ также является его интегралом. Φ - произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Определить тип уравнения и привести в канонический вид $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

Вычисляем дискриминант по формуле (16):

$$\Delta(x,y)=B^2-AC=x^2y^2-2x^2y^2=-x^2y^2. \qquad (26)$$

Так как выражение (26) всюду отрицательное, то данное уравнение эллиптического типа.

По формуле (23) составим характеристическое уравнение: $y^2dy^2-2xydxdy+2x^2dx^2=0$.

Для решения характеристического уравнения воспользуемся формулой (24):

$ydy-(1+i)xdx=0$ или $ydy-(1-i)xdx=0$.

Решим первое из двух последних уравнений:

$-y^2+(1+i)x^2=C$,

$x^2-y^2+ix^2=C$.

Выполняем замену:

$\xi=\mathrm{Re}(x^2-y^2+ix^2)=x^2-y^2$, $\eta=\mathrm{Im}(x^2-y^2+ix^2)=x^2$.

Проверим условие разрешимости (22):

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2x & 0\end{vmatrix}=4xy\neq 0.$$

Вычисляем производные по формулам (21):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}==\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 4y^2-2\frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-4xy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$y^2\left(4x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right)+2xy\left(-4xy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)\right)+$$

$$+2x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 4y^2-2\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+y\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 2y\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{1}{\eta-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Последнее уравнение имеет канонический вид.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Привести к каноническому виду

1.1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

1.2. $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

1.3 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.7 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.8 $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ye^x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{e^{2x}}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.9. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение в частных производных второго порядка называется квазилинейным уравнением?

2. Как вычислить дискриминант квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка?

3. Как определяется тип квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка по его дискриминанту?

4. Какой канонический вид у гиперболического уравнения? Параболического уравнения? Эллиптического уравнения?

5. Как выполняется замена переменных в квазилинейном уравнении в частных производных второго порядка для приведения в канонический вид?

6. Какое условие разрешимости замены относительно *x*, *y*?

7. Как составить характеристическое уравнение для квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка? Как находятся характеристики в случае разных значений коэффициентов?

4.5. Нахождение общего решения и решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка

После приведения к каноническому типу иногда возможно проинтегрировать уравнение.

Рассмотрим приемы интегрирования некоторых видов уравнений:

1) Уравнение вида $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$,

Общее решение находим двукратным интегрированием:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=f(\eta),$$

$$u(\xi,\eta)=\int f(\eta)d\eta+\psi(\xi)=\chi(\eta)+\psi(\xi).$$

2) Уравнения вида $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a(\xi)\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$ или $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b(\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$.

Выполняем замену: $\frac{\partial u}{\partial\eta}=v$:

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}+a(\xi)v=0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}\Big/v+a(\xi)=0,$$

$$\frac{\partial \ln v}{\partial \xi} = -a(\xi).$$

Интегрируем:

$$\ln v = -\int a(\xi) d\xi + \ln f(\eta),$$

$$v = f(\eta) e^{-\int a(\xi) d\xi}.$$

Возвращаемся в замену:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta) e^{-\int a(\xi) d\xi}.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$u(\xi, \eta) = e^{-\int a(\xi) d\xi} \cdot \int f(\eta) d\eta + \psi(\xi) = e^{-\int a(\xi) d\xi} \cdot \chi(\eta) + \psi(\xi).$$

Задача Коши для уравнения (15), содержит условия:

$$u\big|_L = \varphi(x, y), \ \left.\frac{\partial u}{\partial n^+}\right|_L = \psi(x, y), \qquad (27)$$

где L – гладкая бесконечная кривая,

n^+ - внутренняя нормаль области D^+.

Если кривая L из условий (27) задана как $y = y(x)$ или $x = x(y)$, то второе из условий (27) перепишется в виде:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_L = \psi(x) \text{ или } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_L = \psi(y).$$

Пример 1. Решить задачу Коши: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

$$u\big|_{y=0} = 3x^2, \ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.$$

Для приведения в канонический вид делаем замену: $\xi = x + y, \ \eta = y - 3x$. Каноническое уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

Его общее решение: $u(x,y)=\chi(y-3x)+\psi(x+y)$.

Для решения задачи Коши подставляем в общее решение начальные условия:

$$u(x,0)=\chi(-3x)+\psi(x)=3x^2,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\chi'(-3x)+\psi'(x)=0. \qquad (28)$$

В последнем равенстве штрихи обозначают производные по аргументам функций, вычислим производную:

$\frac{d\chi(-3x)}{dx}=\frac{d\chi(-3x)}{d(-3x)}\cdot\frac{d(-3x)}{dx}=-3\frac{d\chi(-3x)}{d(-3x)}=-3\chi'(-3x)$, откуда

$$\chi'(-3x)=-\frac{1}{3}\frac{d\chi(-3x)}{dx}. \qquad (29)$$

Подставляем (29) во второе начальное условие (28):

$$-\frac{1}{3}\frac{d\chi(-3x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx}=0,$$

$$-\frac{1}{3}d\chi(-3x)+d\psi(x)=0,$$

$$-\frac{1}{3}\chi(-3x)+\psi(x)=C.$$

Таким образом начальные условия (28) преобразуются к системе:

$$\begin{cases}\chi(-3x)+\psi(x)=3x^2,\\ -\frac{1}{3}\chi(-3x)+\psi(x)=C.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\chi(-3x)=\frac{9x^2}{4}-\frac{3C}{4},\\ \psi(x)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3C}{4}.\end{cases} \qquad (30)$$

Для решения в (30) положим $z=-3x$, тогда

$$\begin{cases} \chi(z) = \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{3C}{4}, \\ \psi(x) = \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3C}{4}. \end{cases} \tag{31}$$

Подставляем функции из (30) в общее решение и получаем решение задачи Коши:

$$u(x,y) = \chi(y-3x) + \psi(x+y) = \frac{(y-3x)^2}{4} - \frac{3C}{4} + \frac{3(x+y)^2}{4} + \frac{3C}{4} = 3x^2 + y^2.$$

Замечание. Чтобы не пересчитывать производные (29) можно вместо функции $\chi(y-3x)$ рассматривать функцию $\tilde{\chi}(\omega(y-3x))$, подобрав функцию ω так, чтобы при y=0 аргумент стал равен x. Например, $\omega(z) = -\dfrac{z}{3}$, тогда $\tilde{\chi}\left(-\dfrac{y-3x}{3}\right) = \tilde{\chi}\left(-\dfrac{y}{3} + x\right)$.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

Найти общее решение уравнений:

1.1. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.2. $2x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.5 $y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ye^x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2x} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{e^{2x}}{y} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2. Найти решение уравнений при заданных начальных условиях.

2.1. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u\big|_{y=1}=f_0(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=f_1(x)$

2.2. $2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ u\big|_{y=1}=x^2-2,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=x^3.$

2.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u\big|_{x=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-x-1.$

2.4 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, u\big|_{y=0}=2x,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=3x+1$

2.5 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ u\big|_{y=1}=2x,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=x$

Контрольные вопросы.

1. Какие приемы интегрирования используются для нахождения общего решения квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка?

2. Как записываются условия задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка? Как упрощаются условия в случае явного задания начальной кривой?

5. УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература

Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления : учебное пособие / В. К. Романко. — 4-е изд. (эл.). — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 347 с. — ISBN 978-5-9963-3013-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/70785.

Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению : учебное пособие / под редакцией В. К. Романко. — 5-е изд. (эл.). — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 222 с. — ISBN 978-5-9963-2662-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/70710.

Дополнительная учебная литература

Жабко, А. П. Дифференциальные уравнения и устойчивость : учебник / А. П. Жабко, Е. Д. Котина, О. Н. Чижова. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1759-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/60651.

Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / Ю. Н. Бибиков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-1176-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/1542.

Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-4099-3. — Текст :

электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/115196.