Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль «Математика и Информатика»*

Новокузнецк

2019

УДК 514.75(072)
ББК 22.151я73
П 47

Позднякова Е.В.

П 47 Дифференциальная геометрия: методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 53 с.

В работе изложены методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине «Дифференциальная геометрия»: основные теоретические сведения в форме конспектов лекций, примеры решения типовых задач, варианты домашней контрольной работы и образец ее решения, методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 10 от 25.05.2019

Заведующий каф. МФММ
___________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 9 от 30.05.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
___________/ Г.Н. Бойченко

УДК 514.75(072)
ББК 22.151я73
П 47

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении домашней контрольной работы по дифференциальной геометрии.

Дифференциальная геометрия - раздел геометрии, в котором геометрические образы изучаются методами математического анализа. Главными объектами дифференциальной геометрии являются произвольные достаточно гладкие кривые (линии) и поверхности евклидова пространства, а также семейства линий и поверхностей.

Целью изучения дифференциальной геометрии как одного из разделов геометрии является: формирование геометрической культуры студента, начальная подготовка в области алгебраического анализа геометрических объектов, овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях, вооружение конкретными знаниями, дающими возможность преподавать данный предмет в школе и квалифицированно вести факультативные курсы по геометрии.

Задача дисциплины: углубление уровня научной подготовки студентов в области геометрии; ознакомление с основными идеями и методами дифференциальной геометрии

В методические рекомендации включено:

1) конспект лекций по дифференциальной геометрии (основные понятия, свойства, теоремы, формулы);
2) примеры решения типовых задач;
3) особенности оценивания домашней контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;
4) варианты домашней контрольной работы и образец ее решения;
5) требования к выполнению и оформлению домашней контрольной работы;

6) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения по дифференциальной геометрии представлены в объеме, достаточном для подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних, индивидуальных и контрольных заданий.

Теоретический материал иллюстрируется необходимыми чертежами, актуализируется в примерах задач разного уровня сложности.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют получить студенту целостное представление о содержании курса “Дифференциальная геометрия”, подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам, успешно выполнить домашнюю контрольную работу. Кроме того, пособие может оказаться полезным при написании курсовых и выпускных квалификационных работ, а также при прохождении производственной (педагогической) практики в старших классах.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ (КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

1.1. Векторная функция одного скалярного аргумента

Если каждому значению параметра t из некоторого промежутка отвечает определенный вектор $\vec{r}$ (зависящий от t), то вектор $\vec{r}$ называется векторной функцией (кратко вектор-функция) от скалярного аргумента t и в этом случае пишут: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (1.1)

Будем считать, что вектор $\vec{r}(t)$ исходит из начала координат, т.е. $\vec{r}$ − радиус-вектор некоторой точки . В этом случае при изменении параметра конец вектора опишет линию L. Уравнение (1.1) называют векторным уравнением кривой L.

Если через x, y, z обозначить проекции вектора $\vec{r}(t)$ на оси прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, то эти величины для каждого значения параметра t в свою очередь принимают определенные числовые значения и поэтому являются ***скалярными функциями скалярного аргумента t:***

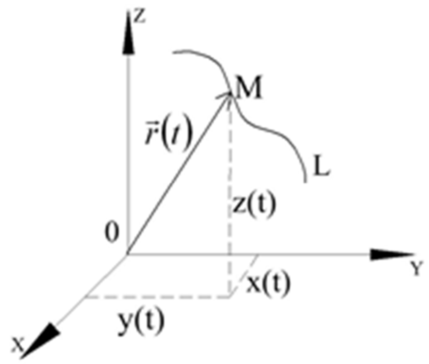

Рисунок 1. Векторная функция и функции скалярного аргумента

x=x(t); y=y(t); z=z(t) (1.2) (Рис.1)

Уравнения (1.2) − параметрические уравнения кривой в пространстве.

Над векторными функциями производятся те же операции, что и над обычными векторами (сложение, вычитание, умножение на число).

Разложив векторную функцию по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, получим равенство:

$$\boldsymbol{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}} \quad (1.3)$$

Задача 1: Дана вектор-функция $\vec{r}(t)=(t^2; \frac{t}{1-t}; t-1)$. Построить векторы $\vec{r}(2)$; $\vec{r}(-1)$; $\vec{r}(2)+\vec{r}(-1)$ и векторное произведение $\vec{r}(2)\times\vec{r}(-1)$.

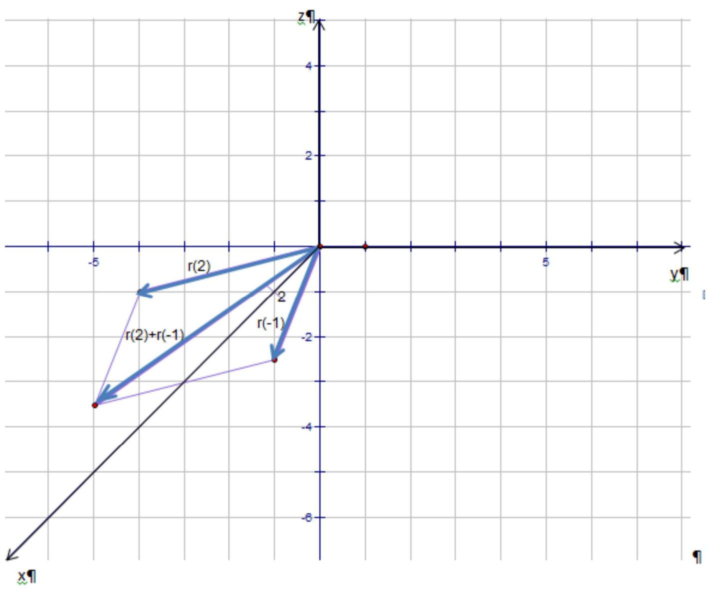

Рисунок 2. Построение векторов в задаче 1

Решение

$\vec{r}(2)$=(4; -2; 1)

$\vec{r}(-1)$=(1;- $\frac{1}{2}$; -2)

$\vec{r}(2)+\vec{r}(-1)$=(5;-2$\frac{1}{2}$; -1)

$$\vec{r}(2)\times\vec{r}(-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2} & -2\end{vmatrix}=(4{,}5;9;0)$$

Предел вектор-функции

Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0, кроме самой точки t_0.

Вектор $\vec{r}_0$ называется пределом векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t\to t_0$ (или в точке t_0), если

$$\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-\vec{r}_0\right|=0. \qquad (1.4)$$

Если $\vec{r}_0$ есть предел функции $\vec{r}(t)$ при $t\to t_0$, то это записывается так

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0. \qquad (1.5)$$

Если записать векторную функцию $\vec{r}(t)$ и вектор $\vec{r}_0$ в проекциях

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k},$$

то получим

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{r}_0\right|=\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+(z(t)-z_0)^2}. \qquad (1.6)$$

Тогда из равенства (1.4) следует, что

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0. \qquad (1.7)$$

Свойства вектор-функции:

1. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right|=\left|\vec{r}_0\right|$.

2. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

3. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(f(t)\vec{r}(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$, $f(t)$ − скалярная функция.

4. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$

5. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

Вектор-функция $\vec{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется непрерывной в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0$.

Из равносильности (1.4) и (1.7) следует, что для того чтобы вектор-функция $\vec{r}(t)$ была непрерывной в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны функции $x(t), y(t), z(t)$.

Задача 2: Найти предел вектор-функции $\lim_{t\to 0}\overrightarrow{r}(t)$***;*** $\overrightarrow{r}(t)$=($\frac{\boldsymbol{sint}}{\boldsymbol{2t}}$; $\frac{\boldsymbol{tg2t}}{\boldsymbol{tg3t}}$; $\frac{\boldsymbol{cost}}{\boldsymbol{t-3}}$)

Решение:

$\lim_{t\to 0}\overrightarrow{r}(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{2t}; \frac{tg2t}{tg3t}; \frac{\cos t}{t-3}\right)=\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Задача 3: Составить уравнение прямой, направляющим вектором которой является вектор $\overrightarrow{r_0}=\lim_{t\to t_0} r(t)$ и точка М, являющаяся концом вектора $\vec{r}(t_0)$, принадлежит прямой. $t_0 = 1; \vec{r}(t) = (t^2; lnt; \frac{t-2}{t})$

Решение:

$$\vec{r}(t_0)=\vec{r}(1) = (1; 0; -1)$$

$\overrightarrow{r_0}=\lim_{t\to 1} r(t)$=(1; 0; -1)

Параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -1 - t \end{cases}$ - искомое уравнение прямой

Производная вектор-функции

Введем понятие производной векторной функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Предполагаем, что начало вектора $\vec{r}(t)$ находится в начале системе координат.

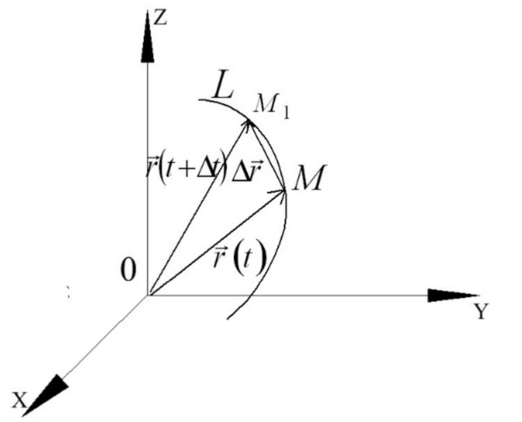

Рисунок 3. Приращение вектор-функции

Возьмем фиксированное значение параметра, соответствующее какой-либо точке определенной точке M на кривой, и дадим параметру t приращение Δt. Тогда получим вектор: $\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}$, который определяет некоторую точку M_1. Найдем приращение вектора:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = (x(t+\Delta t) - x(t))\vec{i} + (y(t+\Delta t) - y(t))\vec{j} + \\ + (z(t+\Delta t) - z(t))\vec{k}. \quad (1.8)$$

На рисунке 3, где $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}(t+\Delta t)$, вектор приращения определяется вектором $\overrightarrow{MM_1} = \Delta\vec{r}(t)$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ приращения вектор-функции к приращению скалярного аргумента; это есть вектор коллинеарный с вектором $\Delta\vec{r}(t)$. При этом вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ направлен в сторону, соответствующую возрастанию параметра t.

Далее с учетом (1.8) вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k}\,. \quad (1.9)$$

Если функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют производные при выбранном значении параметра t, то множители при $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в равенстве (1.9) в пределе при $\Delta t \to 0$ обратятся в производные $x'(t), y'(t), z'(t)$.

Значит, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$.

Вектор, определяемый последним равенством, называется производной от вектора $\vec{r}(t)$ по скалярному аргументу t. Ее обозначают $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ или $\vec{r}'(t)$. Итак,

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{1.11}$$

Дифференциал длины дуги кривой равен

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt,$$

откуда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) имеем

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{dl}{dt}. \tag{1.13}$$

Таким образом, модуль производной вектор-функции $|\vec{r}'(t)|$ равен производной от длины кривой по аргументу t.

Правила дифференцирования вектор-функции:

1. Если $\bar{c}$ - постоянный вектор, то $\dfrac{d\bar{c}}{dt} = 0$.

2. $\dfrac{d(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$.

3. $\dfrac{d(f\vec{r})}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} f + \dfrac{df}{dt}\vec{r}$, где f -скалярная функция.

4. $\dfrac{d(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{dt} = (\vec{r}_1, \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}) + (\dfrac{d\vec{r}_1}{dt}, \vec{r}_2)$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) -$ скалярное произведение.

5. $\dfrac{d[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{dt} = \left[\dfrac{d\vec{r}_1}{dt}, \vec{r}_2\right] + \left[\vec{r}_1, \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}\right]$, $[\vec{r}_1, \vec{r}_2] -$ векторное произведение.

Последовательным дифференцированием можно найти производные высших порядков

$$\vec{r}''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k} \text{ и т.д.}$$

Задача 4: Вычислить $\left|\overrightarrow{r'}(t_0)\right|$, если $\vec{r}(t) = (acos^3 t; bsin^3 t; c);\ t_0 = \frac{\pi}{4}$

Решение:

$$\overrightarrow{r'}(t) = (-3asintcos^2 t; 3bcostsin^2 t; 0)$$

$\overrightarrow{r'}(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{3a\sqrt{2}}{4};\ \frac{3b\sqrt{2}}{4}; 0)$

$\left|\overrightarrow{r'}(\frac{\pi}{4})\right| = \frac{3}{4}\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

1.2. Длина дуги кривой

Гладкая кривая

Кривая называется гладкой на отрезке [a; b], если ее можно задать при помощи уравнений $\boldsymbol{\vec{r}(t) = (x(t);\ y(t);\ z(t))}$, t∈[a; b], где $\boldsymbol{x(t), y(t), z(t)}$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные на отрезке [a; b], одновременно не равные 0.

Если кривая гладкая, то $\left|\overrightarrow{r'}(t)\right| \neq 0$.

Задача 5: Кривая, заданная уравнением $\vec{r}(t) = (Rcost; Rsint; 0);\ t \in (0; 2\pi)$ есть окружность. Доказать, что она является гладкой.

Решение:

$\overrightarrow{r'}(t) = (-Rsint; Rcost; 0)$

$$\left|\overrightarrow{r'}(t)\right| = \sqrt{R^2sin^2t + R^2cos^2t} = |R| \neq 0$$

Произвольная параметризация кривой

Пусть кривая задана в виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Тогда говорят, что кривая задана в *произвольной параметризации.*

Известно, что длина дуги кривой, заданной параметрически, вычисляется по формуле: $S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

Но $\left|\overrightarrow{r'}(t)\right|$=$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$

Значит, $S = \int_{t_0}^{t}\left|\overrightarrow{r'}(t)\right|dt$ (2.1)

Пусть в равенстве (2.1) верхний предел будет переменным. Тогда по свойствам интеграла с переменным верхним пределом:

dS= $\left|\overrightarrow{r'}(t)\right|$dt

$\left|\overrightarrow{r'}(t)\right|$=$\frac{dS}{dt}$ (2.2)

Естественная параметризация кривой

Кривая $\vec{r} = \vec{r}(S)$ задана в естественной параметризации, если за параметр выбрана длина S дуги кривой.

Кривая задана в естественной параметризации тогда и только тогда, когда $\left|\frac{d\vec{r}}{dS}\right| = 1.$

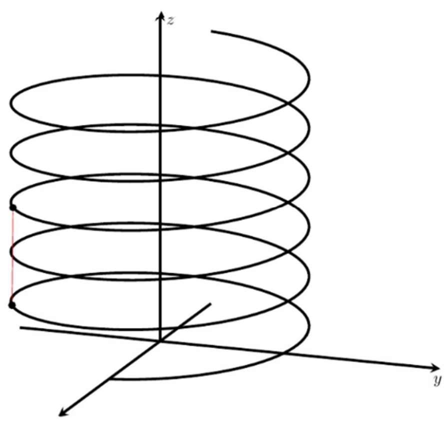

Рисунок 4. Винтовая линия

Задача 6: Выяснить, в какой параметризации задана кривая $\vec{r}(t) = (acost; asint; bt)$

Решение: Данная кривая является винтовой линией (рис. 4).

Если $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$, то за параметр взята длина дуги кривой.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-asint; acost; b)$$

$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1$

Вывод: винтовая линия задана в произвольной параметризации.

Задача 7: Записать уравнение винтовой линии в естественной параметризации.

Решение:

$$S = \int_{t_0}^{t} \left|\vec{r}'(t)\right| dt = S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

Пусть $t_0=0$

$$S = \int_{0}^{t} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$t = \frac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\vec{r}(t) = \left(acos \frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}; asin \frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}; b \frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ – уравнение винтовой линии в естественной параметризации

Формулы для вычисления длины дуги плоской кривой

Пусть в плоскости xOy задана плоская кривая. Она может быть задана следующими уравнениями:

- явным образом: y=y(x)
- в полярной системе координат ρ=ρ(φ)
- неявным образом F(x, y)=0

1) y=y(x).

Вектор - функция кривой: $\vec{r}(x) = \big(x; y(x)\big)$.

$\vec{r}'(x)$=(1; y′(x))

$|\vec{r}'(x)| = \sqrt{1 + y'^2(x)}$

$S = \int_{x_0}^{x_1} |\vec{r}'(x)| dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ (2.3)

Формула (2.3) - длина дуги плоской кривой, заданной явным образом.

2) ρ=ρ(φ)

Формулы перехода от полярных координат к декартовым: x=ρcosφ; y=ρsinφ

Вектор - функция кривой: $\vec{r}(\varphi) = \big(\rho(\varphi)\cos\varphi; \rho(\varphi)\sin\varphi\big)$.

$\vec{r}'(\varphi)$=(ρ′cosφ-ρsinφ; ρ′sinφ+ρcosφ)

$|\vec{r}'(\varphi)| = \sqrt{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$

$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |\vec{r}'(\varphi)| d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$ (2.4)

Формула (2.4) - длина дуги плоской кривой, заданной в полярной системе координат.

3) F(x, y)=0

На заданном промежутке выражают y через x: y=y(x) (случай 1) *или* используют формулу: $y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$

Задача 8: Вычислить длину дуги кривой: $\vec{r}(t) = (t^2; t^3 + 1; 1)$ t∈[1,2]

Решение:

$$S = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(t)| dt$$

$\vec{r}'(t) = (2t; 3t^2; 0)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$

$S = \int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2} dt = |d(4 + 9t^2) = 18t dt| =$

$\frac{1}{18}\int_1^2 \sqrt{4 + 9t^2} d(4 + 9t^2) =$

$\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$

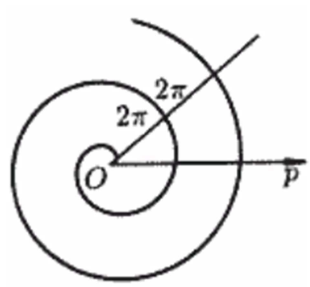

Рисунок 5. Спираль Архимеда

Задача 9: Вычислить длину дуги спирали Архимеда: ρ=πφ; φ∈[0,2π]

Решение:

$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi$$

$$\rho'=\pi$$

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{\pi^2+(\pi\varphi)^2}\,d\varphi=\int_0^{2p}\pi\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=\pi\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2}+\frac{1}{2}ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|\right.$$

Касательная к кривой

Пусть кривая L задана в произвольной параметризации: $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

Пусть точка $M_0(t_0)\in L$ и в достаточной близости от нее по одну сторону взята точка M_1.

Пусть $M_1(t_0+\Delta t)\in L$. Тогда M_0M_1 – секущая к данной кривой (Рис. 6).

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ – направляющий вектор секущей.

$\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=\Delta\vec{r}$ – приращение векторной функции.

Пусть $M_1\to M_0$ по кривой L.

Предельное положение секущей M_0M_1 называется *касательной кривой* в данной на ней точке.

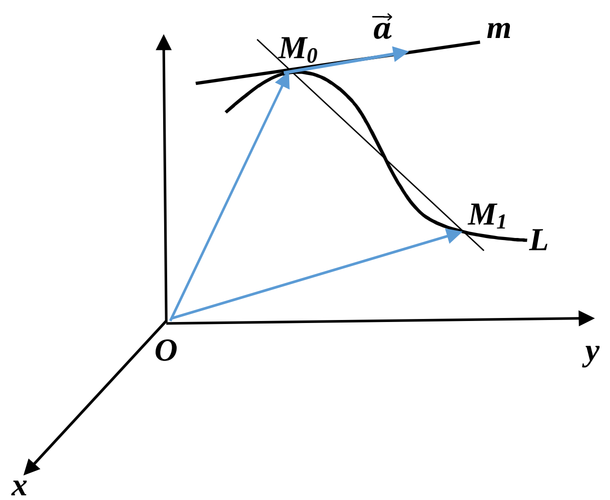

Рисунок 6. Секущая и касательная к кривой

Касательная к кривой в точке M_0 вполне определяется координатами точки M_0 и направляющим вектором $\vec{a}=\vec{r'}(t_0)$.

Если $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $\vec{r'}(t_0)=(x'(t_0);\ y'(t_0);\ z'(t_0))=(p_1;\ p_2;\ p_3)$, то

m: $\frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3}$ (2.5) или

$x = x_0 + p_1 t$
$y = y_0 + p_2 t$ (2.6)
$z = z_0 + p_3 t$

Формулы (2.5) и (2.6) – уравнения касательной в точке M_0.

Задача 10. Написать уравнение касательной к кривой $\vec{r}(t) = (\frac{1}{cost}; tgt; 4t)$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение:

$M_0 \sim \vec{r}(t_0) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}; 1; \pi)$

$\overrightarrow{r'}(t) = (\frac{sint}{cos^2 t}; \frac{1}{cos^2 t}; 4)$

$\overrightarrow{r'}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}; 2; 4)$

m: $\frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3}$

m: $\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\pi}{4}$ – уравнение касательной.

1.3. Сопровождающий трехгранник кривой. Формулы Френе

Соприкасающаяся плоскость

Соприкасающейся плоскостью кривой линии называется предельное положение плоскости, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки этой линии. (Рис.7)

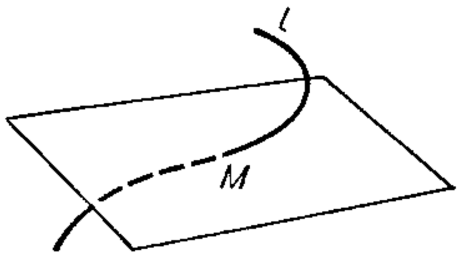

Рисунок 7. Соприкасающаяся плоскость

- Соприкасающаяся плоскость проходит через точку прикосновения.
- Вектор производной лежит в соприкасающейся плоскости.
- Если принять во внимание, что соприкасающаяся плоскость проходит через точку A_0, то из этого следует: *соприкасающаяся плоскость кривой в данной ее точке проходит через касательную прямую, определенную для той же точки.*

Теорема: При любой параметризации кривой вектор второй производной радиуса- вектора кривой расположен в ее соприкасающейся плоскости.

• Нормальный вектор соприкасающейся плоскости равен векторному произведению векторов первой и второй производной:

$$\vec{\mathrm{B}} = \left[\vec{r}\,'\cdot \overrightarrow{r\,''}\right]$$

• Уравнение соприкасающейся плоскости в точке t_0 в векторной форме: $\left(\vec{r} - \vec{r}_0,\ \overrightarrow{r_0\,',r_0\,''}\right)$=0 (3.1)

в координатной форме: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0\,' & y_0\,' & z_0\,' \\ x_0\,'' & y_0\,'' & z_0\,'' \end{vmatrix}$=0 (3.2)

Замечание: Уравнение теряет смысл для тех точек, в которых $\left[\vec{r}\,'\cdot \overrightarrow{r\,''}\right] = \mathbf{0}$

Такие точки мы будем называть точками *спрямления*. Будем считать, что соприкасающаяся плоскость в этих точках не определена и в дальнейшем исключать их из рассмотрения.

Задача 11: Составить уравнение соприкасающейся плоскости конической винтовой линии $\vec{r}(t) = (tcost; -tsint; at)$ в начале координат. (Рис. 8)

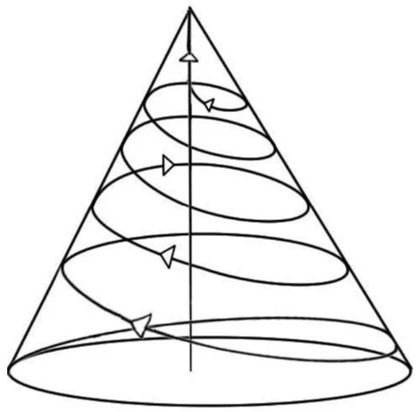

Рисунок 8. Коническая винтовая линия

Решение:

Уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0\,' & y_0\,' & z_0\,' \\ x_0\,'' & y_0\,'' & z_0\,'' \end{vmatrix}$=0

Начало координат (0; 0; 0) соответствует значению t=0. Вычисляя производные радиус-вектора, получим: $\vec{r}\,'(t) = (cost - tsint; -sint - tcost; a)$

$$\vec{r}\,''(t) = (-2sint - tcost; -2cost + tsint; 0)$$

$\vec{r}\,'(0) = (1; 0; a)$ $\vec{r}\,''(0) = (0; -2; 0)$

Записывая уравнение соприкасающейся плоскости $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$=0, получим общее уравнение: *–ax+z=0*

Основной трехгранник

Нормалью пространственной кривой называется всякая прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку прикосновения.

Таким образом в каждой своей точке кривая имеет бесчисленное множество нормалей. Все они расположены в одной плоскости, перпендикулярной касательной прямой, эту плоскость называют *нормальной плоскостью* кривой.

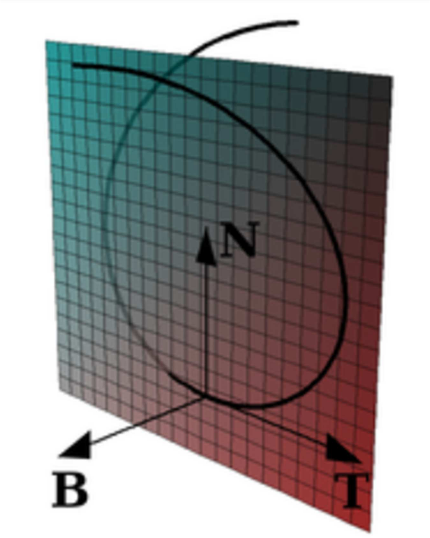

Рисунок 9. В точке кривой построены векторы касательной $\vec{T}$, главной нормали $\vec{N}$ и бинормали $\vec{B}$

Среди нормалей выделяют две.

1. *Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью*.

2. *Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется главной бинормалью*. (Рис. 9)

Касательная, главная нормаль и бинормаль определяют в каждой точке кривой трехгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой кривой. Этот трехгранник называется *сопровождающим*, *основным* или *натуральным трехгранником* кривой. Гранями основного трехгранника будут три взаимно перпендикулярные плоскости:

1) *соприкасающаяся плоскость*, содержащая касательную и главную нормаль;

2) *нормальная плоскость*, содержащая главную нормаль и бинормаль;

3) *спрямляющая плоскость*, содержащая бинормаль и касательную (рис.10).

Если точка кривой задана, то для определения граней и ребер основного трехгранника нужно уметь вычислять их направляющие векторы.

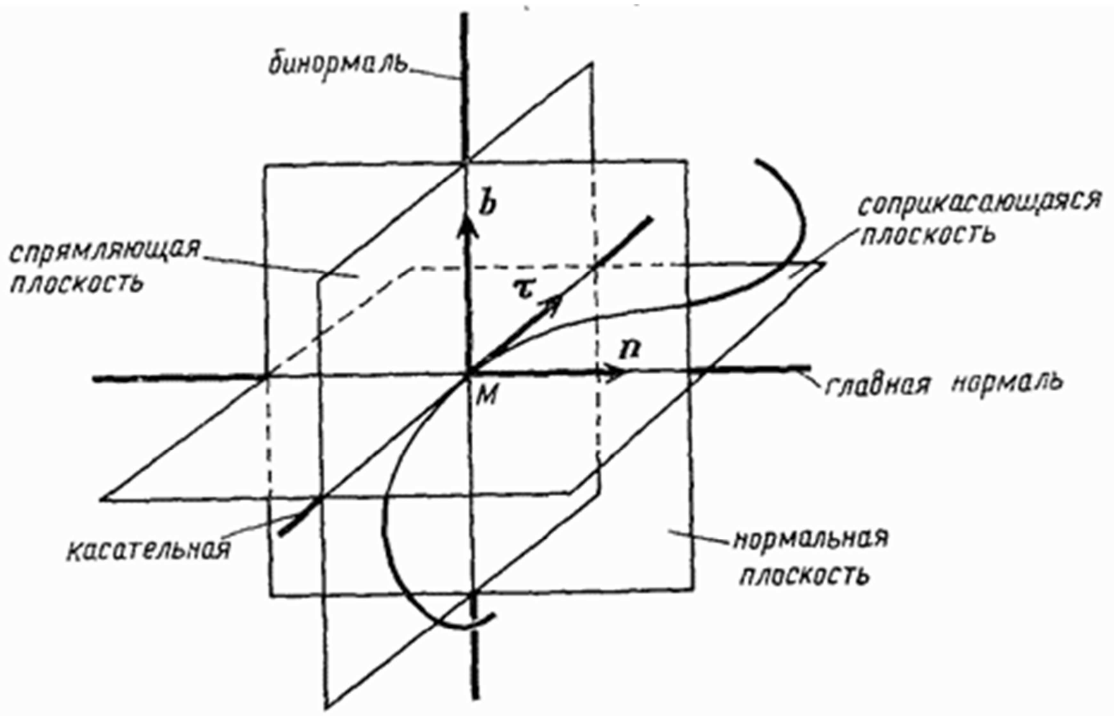

Рисунок 10. Сопровождающий трехгранник кривой

- Направляющий вектор касательной равен первой производной

$$\vec{T} = \vec{r}\,'$$

- Направляющий вектор бинормали равен векторному произведению векторов первой и второй производной $\vec{\mathrm{B}} = \left[\vec{r}\,' \cdot \overrightarrow{r\,''}\right]$
- Направляющий вектор главной нормали перпендикулярен вектору касательной и вектору бинормали. Поэтому его можно положить равным их векторному произведению $\vec{N} = \left[\vec{r}\,' \cdot \left[\vec{r}\,' \cdot \overrightarrow{r\,''}\right]\right]$

Если кривая задана в произвольной параметризации $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то

$\tau = \frac{\overrightarrow{r'}}{\left|\overrightarrow{r'}\right|}$ (3.2) - единичный вектор касательной;

$\beta = \frac{\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}}{\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right|}$ (3.3) - единичный вектор бинормали;

$\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$ (3.4) – единичный вектор главной нормали.

Задача 12: Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали кривой: $\vec{r}(t) = (t; t^2; t^3)$ в начале координат.

Решение:

Найдем производные радиус вектора: $\vec{r}\,'(t) = (1; 2t; 3t^2)$;

$$\vec{r}\,''(t) = (0; 2; 6t)$$

Началу координат соответствует значение параметра t=0.

$\vec{r}\,'(0) = (1; 0; 0)$;

$$\vec{r}\,''(0) = (0; 2; 0)$$

Таким образом, единичный вектор касательной $\vec{\tau} = \vec{r}\,'(0) = (1; 0; 0)$.

Найдем единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$:

$\vec{\mathrm{B}} = [\vec{r}\,' \cdot \overrightarrow{r\,''}]$=(0; 0; 2)

$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$=(0;0;1)

Вектор главной нормали $\vec{\nu} = [\vec{\beta}\vec{\tau}] = (0; 1; 0)$.

Единичные векторы основного трехгранника в естественной параметризации

Основной трехгранник позволяет связать с каждой точкой кривой прямоугольную систему координат, оси которой совпадают с *касательной, главной нормалью и бинормалью*. Чтобы определить их ориентацию, введем единичные векторы, направленные по этим осям в положительную сторону.

Пусть кривая задана в естественной параметризации: $\vec{r} = \vec{r}(S)$.

1. Единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ определим так, чтобы он совпадал с первой производной радиуса - вектора по натуральному параметру

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,'.$$

2. Единичный вектор главной нормали $\vec{\nu}$ определим так, чтобы его ориентация совпадала с ориентацией вектора второй производной по натуральному параметру $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|}$

3. Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$ определим так, чтобы тройка векторов $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ была правой.

Так как векторы основного трехгранника единичны и ортогональны, то их скалярные квадраты равны единице, а их произведение между собой равно нулю. $\vec{\tau}^2 = \vec{\beta}^2 = \vec{\nu}^2 = 1$; $(\vec{\tau}\cdot\vec{\nu})=(\vec{\nu}\cdot\vec{\beta})=(\vec{\beta}\cdot\vec{\tau})=0$.

Векторные произведения двух различных векторов тройки, следующие друг за другом в круговом порядке; касательная - главная нормаль - бинормаль - касательная, равны третьему вектору тройки, так как это имеет место для координатных векторов всякой правой системы координат.

$[\vec{\tau}\cdot\vec{\nu}]=\vec{\beta}$ $[\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}]=\vec{\tau}$ $[\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}]=\vec{\nu}$.

Формулы Френе – Серре

Векторы основной тройки меняются при движении точки по кривой. Чтобы охарактеризовать это изменение, нужно уметь вычислять их производные по натуральному параметру. Особенно удобно знать разложения этих производных по векторам основной тройки.

Получим *производную вектора касательной* $\vec{\tau}$.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{d(\vec{r}')}{dS} = \vec{r}''$$

Вектор второй производной $\vec{r}''$ направлен по главной нормали, ориентирован так же, как и вектор $\vec{\nu}$. Поэтому $\boldsymbol{\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu}}$ (3.5)**,** где k – некоторая положительная величина, зависящая от S.

Найдем разложение *производной вектора бинормали* $\vec{\beta}$. $\vec{\beta} = [\vec{\tau}\,\vec{\nu}]$

$\frac{d\vec{\beta}}{dS} = [\frac{d(\vec{\tau})}{dS}\vec{\nu}] + \left[\vec{\tau}\ \frac{d\vec{\nu}}{dS}\right] = k\left[\vec{\nu}\,\vec{\nu}\right] + \left[\vec{\tau}\ \frac{d\vec{\nu}}{dS}\right] = =\left[\vec{\tau}\ \frac{d\vec{\nu}}{dS}\right]$

Так как векторное произведение перпендикулярно каждому из своих сомножителей, то полученный результат показывает, что $\frac{d\vec{\beta}}{dS}\perp\vec{\tau}$.

С другой стороны, $\vec{\beta}$— единичный вектор, поэтому его производная перпендикулярна его самому.

Но будучи перпендикулярна касательной и бинормали, $\frac{d\vec{\beta}}{dS}$ должен быть направлен по главной нормали. Обозначая коэффициент пропорциональности **-К**, получим

$\frac{d\vec{\beta}}{dS}$=-$\varkappa\,\vec{\nu}$ (3.6).

Найдем разложение *производной вектора главной нормали* $\vec{\nu}$. $\vec{\nu} = [\vec{\beta}\vec{\tau}]$

$$\frac{d\vec{\nu}}{dS} = [\frac{d(\vec{\beta})}{dS}\overrightarrow{\tau}] + \left[\vec{\beta}\ \frac{d\vec{\tau}}{dS}\right] = -\varkappa[\vec{\nu}\vec{\tau}] + k[\vec{\beta}\vec{\nu}]$$

Так как $[\vec{\tau}\cdot\vec{\nu}]=\vec{\beta}$ $[\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}]=\vec{\tau}$ $[\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}]=\vec{\nu}$, векторные произведения в правой части можно заменить векторами основной тройки, следовательно: $\frac{d\vec{\nu}}{dS}$=-**k** $\vec{\tau}$ +$\varkappa\,\vec{\beta}$ (3.7).

Объединяя предыдущие результаты, получим систему формул, называемых формулами Френе - Серре:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\vec{\tau}}{dS}=\mathbf{k}\vec{\nu} \\ &\frac{d\vec{\nu}}{dS}=-\mathbf{k}\,\vec{\tau}+\varkappa\,\vec{\beta} \\ &\frac{d\vec{\beta}}{dS}=-\varkappa\vec{\nu} \end{aligned}} \qquad (3.7)$$

1.4. Кривизна и кручение кривой

Кривизна кривой в произвольной параметризации

Кривизной окружности радиуса R называется число $\frac{1}{R}$. Это число можно получить как отношение угла между касательными в концах какой-либо дуги окружности к длине этой дуги.

Последнее утверждение дает возможность определения кривизны для произвольной гладкой кривой.

Рассмотрим гладкую кривую L.

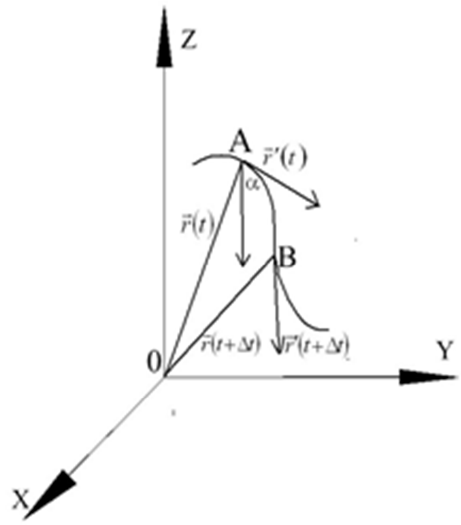

Рисунок 11. Угол смежности α дуги AB

Угол α (0≤α≤π) называется *углом смежности* дуги AB (рис. 11). Отношение угла смежности дуги AB к ее длине называется *средней кривизной* дуги AB.

Кривизной кривой L в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги AB кривой к ее длине ΔS (ΔS>0), когда последняя стремится к нулю

$$\boldsymbol{k} = \lim_{\Delta \boldsymbol{S} \to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\Delta \boldsymbol{S}}$$

Таким образом, $0 \le k \le \infty$.

По определению, величина R=$\frac{1}{k}$ называется радиусом кривизны в точке A.

Получим формулу для вычисления кривизны кривой, заданной в произвольной параметризации.

Так как угол смежности - это угол между векторами $\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})$ и $\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}) = \vec{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}'$, то $sin\alpha = \frac{|\vec{r}\,' \times (\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,')|}{|\vec{r}\,'||\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'|} = \frac{|\vec{r}\,' \times \Delta\vec{r}\,'|}{|\vec{r}\,'||\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'|}$

При Δt→0 $|\vec{r}\,'||\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}\,'| \to |\vec{r}\,'|^2$, а числитель $|\vec{r}\,' \times \Delta\vec{r}\,'| \to 0$

Будем теперь предполагать, что радиус−вектор кривой имеет вторую производную $\vec{r}\,''$, и при этом условии докажем существование конечной кривизны в точке A.

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{sin\alpha}{\Delta S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\overrightarrow{r'} \times \frac{\overrightarrow{\Delta r'}}{\Delta t}\right|}{\left|\overrightarrow{r'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{r'}(t + \Delta t)\right| \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}} = \frac{\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right|}{\left|\overrightarrow{r'}\right|^3}$$

$k = \frac{1}{R} = \frac{\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right|}{\left|\overrightarrow{r'}\right|^3}$ (4.1) – кривизна кривой

Замечание: в формулах Френе (3.7) число k есть кривизна кривой.

Кручение кривой

При движении вдоль кривой в окрестности заданной точки соприкасающаяся плоскость вращается, причём касательная к кривой является мгновенной осью этого вращения. Скорость вращения соприкасающейся плоскости при равномерном, с единичной скоростью, движении называется *кручением*. Направление вращения определяет знак кручения.

Абсолютная величина кручения в данной точке кривой равна пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги: $|\varkappa| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Psi}{\Delta S} = \left|\frac{d\vec{\beta}}{dS}\right|$.

В формулах Френе число $\varkappa$ есть *кручение кривой*.

Если кривая задана в произвольной параметризации, то формулы для вычисления кручения имеют вид: $\varkappa = \frac{(\overrightarrow{r'}\,\overrightarrow{r''}\,\overrightarrow{r'''})}{\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right|^2}$ (4.2)

Свойства кривизны и кручения кривой

1. Кривая является прямой линией тогда и только тогда, когда ее кривизна во всех точках равна нулю.
2. Кривая является плоской тогда и только тогда, когда кручение во всех ее точках равно нулю.

Задача 13: Найти кривизну и кручение винтовой линии

$\vec{r} = (2cost; 2sint; t),\ t_0 = \frac{3\pi}{2}$

Решение:

$$k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}$$

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}\,\vec{r}\,'\vec{r}\,''')}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|^2}$$

$\vec{r}'$=(-2sint; 2cost; 1) $\vec{r}'(\frac{3\pi}{2})$=(2;0;1)

$\vec{r}''$=(-2cost; -2sint; 0) $\vec{r}''(\frac{3\pi}{2})$=(0;2;0)

$\vec{r}'''$=(2sint; -2cost; 0) $\vec{r}'''(\frac{3\pi}{2})$=(-2;0;0)

$|\vec{r}\,'| = \sqrt{5}$

$\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''$=(-2;0;4); $|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|$=$2\sqrt{5}$

$(\vec{r}\,\vec{r}\,'\vec{r}\,''')$=4

$k = \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$=0,4 $\varkappa = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Задача 14: Показать, что кривая $x=1+3t+2t^2$; $y = 2 - 2t + 5t^2$; $z = 1 - t^2$ плоская

Решение:

Докажем, что кручение кривой равно нулю.

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}\,\vec{r}\,'\vec{r}\,''')}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|^2}$$

$\vec{r}'$=(3+4t; -2+20t; -2t)

$\vec{r}''$=(4; 20; -2)

$\vec{r}'''$=(0;0;0)

$\overrightarrow{(r}\,\vec{r}\,'\vec{r}\,''')$=0, значит $\varkappa$=0.

Кривизна плоской кривой

Пусть кривая является плоской, а это значит, что систему координат можно выбрать так, что кривая будет лежать в плоскости XOY.

1) $\vec{r} = \vec{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big)$

Введем $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); 0)$

$\vec{r}'(t) = (x'(t); y'(t); 0)$; $\vec{r}''(t) = (x''(t); y''(t); 0)$;

$|\vec{r}'|=\sqrt{x'^2 + y'^2}=(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$

$\vec{r}'\times\vec{r}''$=(0;0; $x'y''- y'x''$); $|\vec{r}'\times\vec{r}''|=|x'y''- y'x''|$

$\boldsymbol{k} = \frac{|x'y''- y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (4.3) - кривизна плоской кривой, заданной параметрически.

2) Пусть кривая задана явным образом: y=y(x)

Тогда $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$

x′=1; x′′=0

y′=y′(x); y′′=y′′(x)

$\boldsymbol{k} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (4.4) -кривизна плоской кривой, заданной явным образом.

3) Кривая задана в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases}$$

$\boldsymbol{k} = \frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (4.5) - кривизна кривой, заданной в полярной системе координат.

Задача 15: Найти кривизну плоской кривой $\rho = 1 + cos\varphi$ в точке (1; $\frac{\pi}{2}$)

Решение:

$\boldsymbol{k} = \frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$

ρ′=-sinφ; ρ′′=-cosφ

ρ′($\frac{\pi}{2}$)=-sin($\frac{\pi}{2}$)=-1; ρ′′($\frac{\pi}{2}$)=0; ρ($\frac{\pi}{2}$)=1

$$\boldsymbol{k} = \frac{|\mathbf{1}^2+\mathbf{2}(-\mathbf{1})^2-\mathbf{0}|}{(\mathbf{1}+\mathbf{1})^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

1.5. Первая квадратичная форма поверхности и ее применение

Криволинейные координаты на поверхности

Предположим, что на поверхности задано некоторое семейство линий, зависящих от одного параметра.

Семейство линий, зависящих от одного параметра, называется *правильным* в некоторой области точек поверхности, если через каждую точку этой области проходит одна и только одна линия семейства.

Если на поверхности заданы два семейства линий, то говорят, что они образуют *сеть* в той области, в которой оба они правильны.

Будем предполагать, что в этой области линии различных семейств не совпадают между собою и не касаются друг друга и пересекаются только в одной точке.

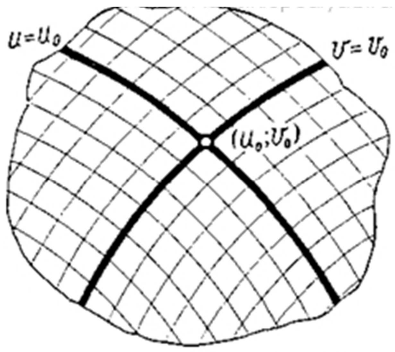

Рисунок 12. Координатная сеть и криволинейные координаты точки

Предположим, что на поверхности задана сеть, удовлетворяющая всем этим условиям. Пусть линия одного семейства этой сети определяется значением параметра *u*, а линия другого семейства значением параметра *v*. Так как через каждую точку области проходят вполне определенные линии каждого семейства, то всякой точке соответствуют вполне определенные значения параметров *u* и *v*.

Значения параметров *u* и *v*, определяющих кривые сети, пересекающиеся в данной точке поверхности, называются *криволинейными координатами* этой точки. Сами эти линии и образованная ими сеть называются *координатными* (рис.12).

Если на поверхности введены криволинейные координаты, то поверхность называется *параметризованной*.

В таком случае, всякой паре значений параметров *u*, и *v*, соответствует определенная точка поверхности. Значение радиуса-вектора этой точки вполне определяется заданием значений независимых переменных *u* и *v*. Тогда векторная переменная $\vec{r}$ является функцией двух скалярных аргументов *u* и *v:*

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Зависимость радиуса-вектора точки параметризованной поверхности от криволинейных координат этой точки называется *параметрическим уравнением поверхности.*

Параметрические уравнения некоторых поверхностей

1. Пусть дан прямой круговой цилиндр радиуса R. Введем систему координат так, чтобы ось oz являлась осью цилиндра (рис.13)

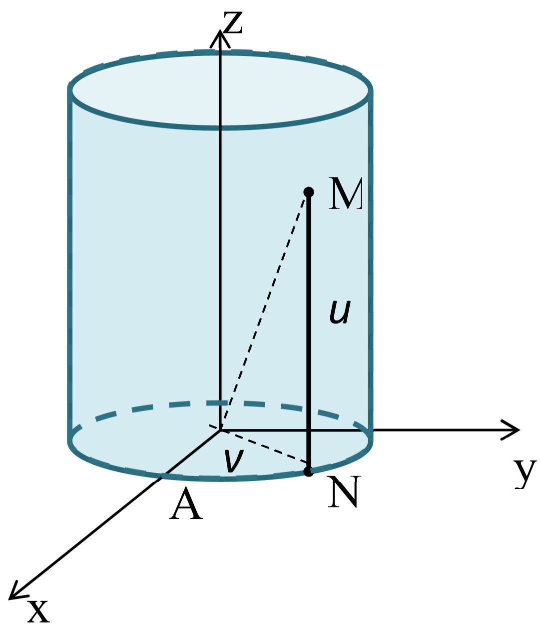

Рисунок 13. Прямой круговой цилиндр

На поверхности цилиндра произвольно выберем точку M.

MN=*u*; ∠AON=*v*.

$$\begin{cases} x = R\cos v \\ y = R\sin v \\ z = u \end{cases}$$

$\vec{r} = (R\cos v; R\sin v; u)$ – уравнение цилиндра

u-линия – образующая

v – линия – направляющая (окружность)

Криволинейная сеть является ортогональной.

2. Пусть дана сфера радиуса R. Введем систему координат так, чтобы ось oz прошла через полюсы сферы (рис. 14)

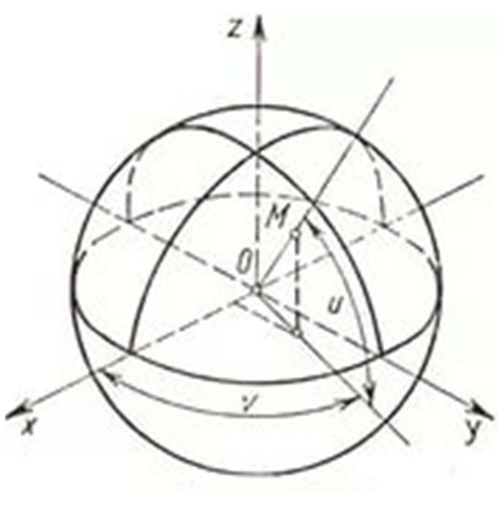

Рисунок 14. Сфера

ΔOMM_0 — прямоугольный, OM - гипотенуза.

v - угол между плоскостью POM_x и плоскостью MOM_0 ; $u=\angle MOM_0$

$v \in [0;2\pi]$; $u \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

$x=OM_x$; $y=M_xM_0$; $z=MM_0$

$$\begin{cases} x = R\cos u \cdot \cos v \\ y = R\cos u \cdot \sin v \\ z = R\sin u \end{cases}$$

$\vec{r} = (R\cos u \cdot \cos v; R\cos u \cdot \sin v; R\sin u)$ — уравнение сферы.

Замечание: Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то это уравнение следует считать частным случаем параметрического. Действительно, принимая за параметры абсциссу и ординату точки поверхности, можем написать ее параметрическое уравнение в следующем виде $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$.

Задача о нахождении касательной прямой к поверхности

Будем рассматривать такие поверхности в параметрическом уравнении, у которых функция $\vec{r}(u, v)$ имеет частные производные, по крайней мере, первых двух порядков.

Прямая касается поверхности, если она касается некоторой кривой, принадлежащей поверхности.

Допустим, что поверхность задана параметрическим уравнением $r = \vec{r}(u, v)$, а принадлежащая ей кривая параметризована с помощью параметра t. В таком случае каждому значению этого параметра соответствует некоторая точка кривой, а ее положению на поверхности соответствуют определенные значения криволинейных координат u и v.

Таким образом, криволинейные координаты точек кривой, расположенные на поверхности, являются функциями параметра t.

Систему соотношений $u = u(t)$; $v = v(t)$ называют *внутренними уравнениями кривой на поверхности.*

Внутренние уравнения вполне характеризуют кривую, если задано параметрическое уравнение поверхности.

$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ (5.1) - параметрическое уравнение данной линии.

Получим касательный вектор кривой $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$. (А значит, и направляющий вектор прямой, касающейся поверхности).

Дифференцируем радиус-вектор $\vec{r}$ по параметру t.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)$$

Правая часть этого выражения представляет собою линейную комбинацию двух векторов: $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \overrightarrow{r_u}$; $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \overrightarrow{r_v}$

Векторы $\overrightarrow{r_u}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{r_v}}$ называют *координатными векторами*, соответствующими той точке, криволинейные координаты которой подставляются при их вычислении.

Координатные векторы есть векторы касательных к координатным линиям.

Вывод: направляющий вектор всякой прямой, касающейся поверхности в данной точке, является линейной комбинацией координатных векторов, соответствующих этой точке, а его направление определяется отношением *du* и *dv,* т.е. дифференциалов криволинейных координат, соответствующих направлению кривой, которой касается данная прямая.

Касательная плоскость поверхности

Так как все касательные векторы, соответствующие данной точке поверхности, выражаются линейно через координатные, то все они компланарны, следовательно, все

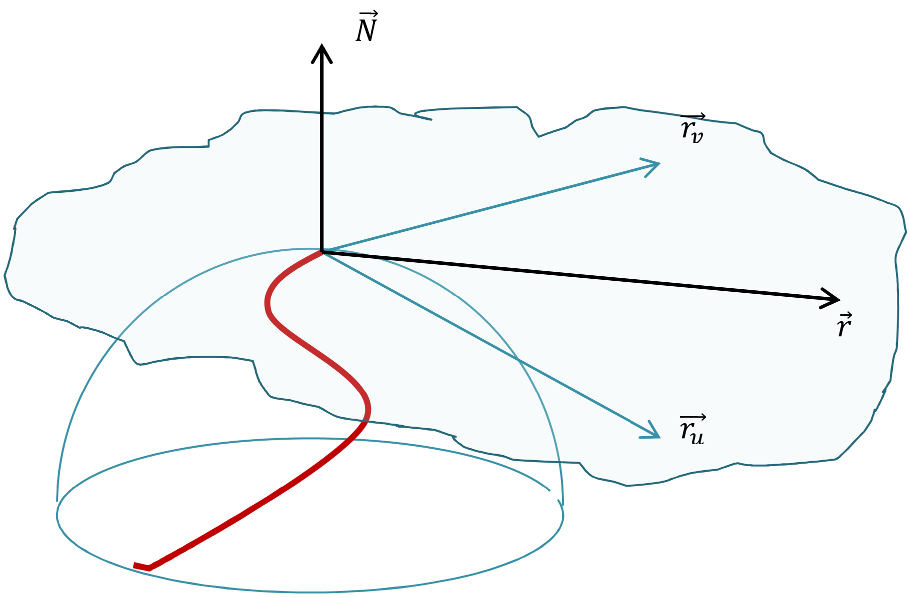

Рисунок 15. Касательная плоскость и нормальный вектор поверхности

прямые, касающиеся поверхности в данной точке, располагаются в одной плоскости — *касательной плоскости поверхности*.

Касательная плоскость поверхности содержит векторы $\overrightarrow{r_u}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{r_v}}$ и ее нормальный вектор им перпендикулярен. Поэтому этот вектор может быть положен равным $\boldsymbol{N} = [r_u\, r_v]$

Пусть $\vec{r}$ - радиус-вектор текущей точки, $\overrightarrow{r_0}$ - радиус-вектор точки касания.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{r_u}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r_v}}\,\vec{\boldsymbol{r}}\text{-}\overrightarrow{\boldsymbol{r_0}}) = \boldsymbol{0}$ (5.2) **–** уравнение касательной плоскости

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку соприкосновения, называется *нормалью*, а ее вектор $\boldsymbol{N} = [r_u\, r_v]$ (5.3) – *нормальным вектором поверхности* (рис. 15).

Задача 16: Дана поверхность $\vec{r} = \left(u^2 + v^2;\; u^2 - v^2; uv\right)$. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности для точки u=v=1.

Решение:

$\mathrm{M_0}(2; 0; 1)$ $r_u = (2u; 2v; v) = (2; 2; 1)$

$r_v = (2v; -2v; u) = (2; -2; 1)$

$\boldsymbol{N} = [r_u\, r_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{k} = (4;0;-8)$

$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 0 \\ z = 1 - 8t \end{cases}$ - уравнение нормали

4(x-2)-8(z-1)=0

x-2z=0 – уравнение касательной плоскости.

Замечание: Пусть поверхность задана в виде F(x, y, z)=0, а кривая $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$**.**

Тогда вектор нормали касательной плоскости $\vec{N} = \left(F'_x,\; F'_y, F'_z\right)$. (5.4)

Длина дуги

Вычислим длину дуги линии, расположенной на поверхности.

$u = u(t)$; $v = v(t)$ $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

$$dS^2 = d\vec{r}^2$$

$$d\vec{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv$$

$$dS^2 = \overrightarrow{r_u}^2 du^2 + 2\overrightarrow{r_u} \cdot \overrightarrow{r_v}dudv + \overrightarrow{r_v}^2 dv^2$$

$\overrightarrow{r_u}^2 = E; \quad \overrightarrow{r_u} \cdot \overrightarrow{r_v} = F; \quad \overrightarrow{r_v}^2 = G$

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$S = \int_{t_1}^{t_2} dS$- длина дуги, ограниченная точками кривой, соответствующими значениями параметра t_1 и t_2.

$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$ (5.4)

Зная внутреннее уравнение кривой, мы должны выразить *u* и *v* через *t* в выражениях *E, F, G,* найти производные $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, подставить все это в подынтегральную функцию и задача сведется к вычислению интеграла, вида $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$

Форма $\phi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ (5.5) называется *первой основной квадратичной формой поверхности* или линейным элементом поверхности.

Основная квадратичная форма положительна и не может обратиться в нуль при значении переменных *du* и *dv,* не равных нулю одновременно. Квадратичные формы, обладающие этим свойством, называются *положительно-определенными*.

Задача 17: Найти первую квадратичную форму геликоида общего вида: *x=ucosv; y=usinv; z=f(u)+av* (0≤*u*≤∞; -∞≤v≤∞) (рис.16)

Решение:

$E = (\vec{r}_u\overrightarrow{r_u})$; $F = (\vec{r}_u\overrightarrow{r_v})$; $G = (\vec{r}_v\overrightarrow{r_v})$

$$d\vec{r} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$\vec{r}_u$=(*cosv; sinv ; f′(u)*)

$\vec{r}_v$=(*-usinv; ucosv ; a*)

$E=1+(f'(u))^2$; $F = af'(u)$; $G=u^2 + a^2$

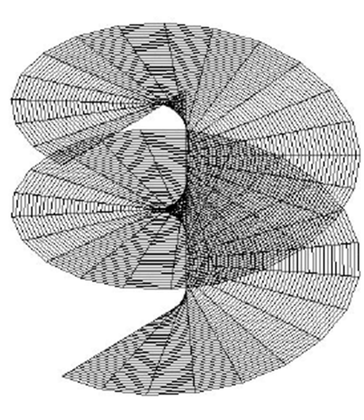

Рисунок 16. Геликоид: два витка

$\Phi_1 = (1+(f'(u))^2)\, du^2 + 2af'(u)\, dudv + (u^2 + +a^2)dv^2$

Задача 18: *Найти длину дуги кривой* $u = \frac{1}{2}av^2$ *(a≠0), заключенной между точками A(u=0, v=0) и B(u=2a, v=2) поверхности* $x = \frac{u}{2}(\sqrt{3}cosv + sinv)$*;* $y = \frac{u}{2}(\sqrt{3}sinv - cosv)$*; z=av (0≤u≤∞; 0≤v≤2π).*

Решение:

$\vec{r}_u = (\frac{1}{2}(\sqrt{3}cosv + sinv);\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}sinv - cosv);\ 0);\ E=1$

$\vec{r}_v = (\frac{u}{2}(-\sqrt{3}sinv + cosv);\ \frac{u}{2}(\sqrt{3}cosv + sinv);\ a);$

$G=u^2 + a^2 \qquad F=\vec{r}_u\vec{r}_v = 0$

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$dS^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$; $du=avdv$;

$dS^2 = a^2v^2dv^2 + (\frac{1}{4}a^2v^4 + a^2)dv^2 = a^2(\frac{1}{4}v^4 + v^2 + 1)dv^2 =$

$= a^2(\frac{1}{2}v^2 + 1)^2dv^2$

$S = \int_0^2 a\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)dv = a(v + \frac{1}{6}v^3)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}a$

Угол между двумя линиями

Если две кривые пересекаются, то углом между ними называют угол между их касательными в точке пересечения (рис.17). Предположим, что кривые лежат на одной поверхности и пересекаются в некоторой точке. Касательные векторы этих кривых будем различать, употребляя различные обозначения для

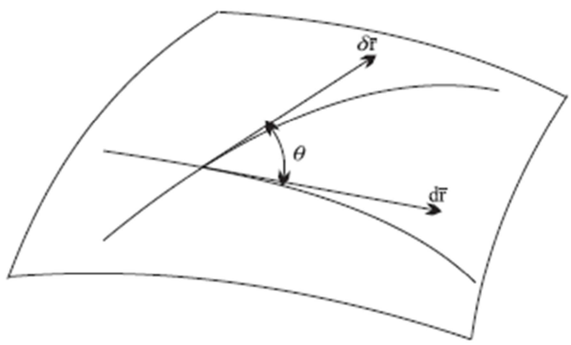

Рисунок 17. Угол между двумя линиями

дифференциалов криволинейных координат, соответствующих изменениям последних вдоль рассматриваемых линий.

$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$

$$cos\theta = \frac{d\vec{r}\delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|}$$

$$|d\vec{r}| = ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

$$|\delta\vec{r}| = \delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}$$

$d\vec{r}\delta\vec{r}=(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v)=\vec{r}_u\vec{r}_u du\delta u +$
$\vec{r}_u\vec{r}_v du\delta v+\vec{r}_v\vec{r}_v dv\delta v+\vec{r}_u\vec{r}_v dv\delta u=Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v$

$$cos\theta = \frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}} \quad (5.6)$$

Вывод:

1) На данной поверхности угол двух кривых зависит только от отношения дифференциалов криволинейных координат, взятых вдоль кривых в точках их пересечения.

2) Для определения угла, так же как и в случае вычисления дуги, не нужно знать параметрического уравнения поверхности, а достаточно считать известным выражение ее линейного элемента

Получим выражение координатного угла. Тогда *du=0; dv≠0;* $\delta u \neq 0$; $\delta v = 0$.

$$cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (5.7)$$

В частности, для того, чтобы координатные линии пересекались под прямым углом, т.е. чтобы они образовывали *ортогональную сеть*, необходимо и достаточно, чтобы $F = 0$, а линейный элемент имел вид $dS^2 = Edu^2 + Gdv^2$.

Задача 19: Дана первая квадратичная форма поверхности: $dS^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$**.** Определить, под каким углом пересекаются кривые *u+v=0, u-v=0,* если *a=const.*

Решение:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

E=1; F=0; G=$u^2 + a^2$.

Найдем точку пересечения кривых:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ u - v = 0 \end{cases}$$

u=0; v=0

$cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}$

du=-dv; $\delta u = \delta v$

$$cos\theta = \frac{-dv\delta v + a^2 dv\delta v}{\sqrt{\delta v^2 + a^2\delta v^2}\sqrt{a^2 dv^2 + dv^2}} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

Площадь поверхности

Определение длины дуги кривой линии сводится к вычислению суммы длин прямолинейных отрезков с последующим переходом к пределу. Аналогичным образом и определение площади частей криволинейной поверхности сводится к измерению площадей плоских фигур. Площадь области поверхности выражается двойным интегралом:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

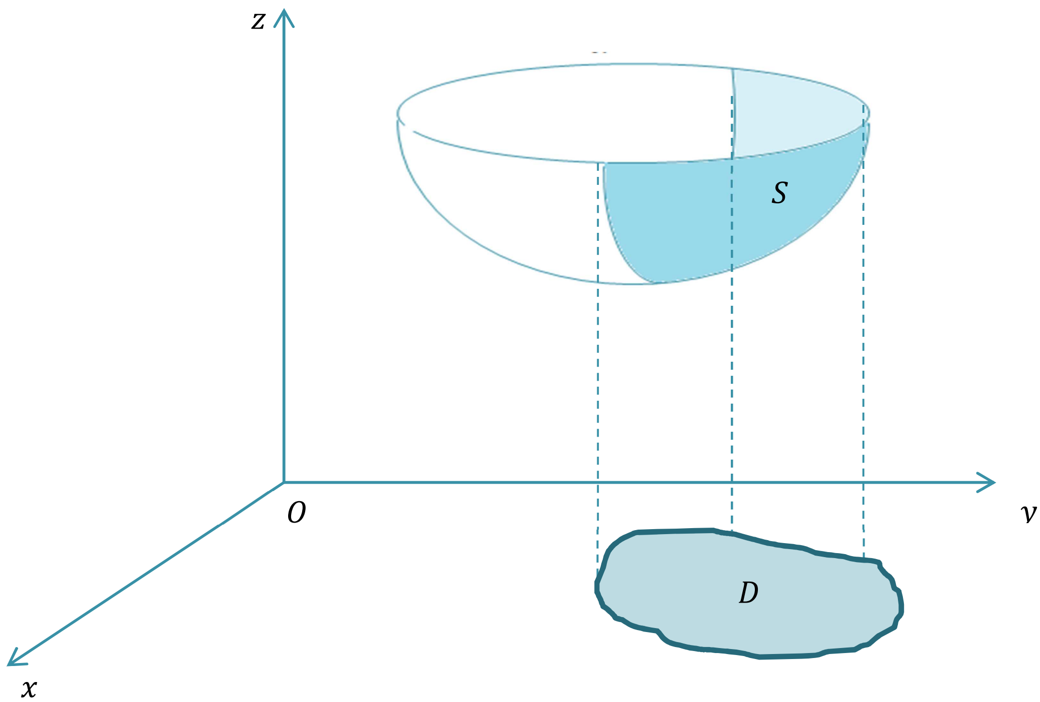

Рисунок 18. Площадь поверхности

Задача 20: Вычислить площадь поверхности тора, заданного параметрическими уравнениями $\vec{r} = \big((a + bcosv)cosu, (a + bcosv)sinu, bsinv\big)$, $0 \le u, v \le 2\pi$ (рис.19)

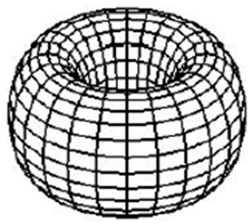

Рисунок 19. Тор

Решение:

Вычислим частные производные радиус-вектора и коэффициенты первой квадратичной формы:

$$\overrightarrow{r_u} = (-(a + bcosv)sinu; (a + bcosv)cosu, 0)$$

$$\overrightarrow{r_v} = (-bsinvcosnu; -bsinvsinu, bcosv)$$

E=$(a + bcosv)^2$ F=0 G=b^2

Тогда площадь поверхности тора равна:

S=$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} b(a + bcosv)dv \right\} du = 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + bcosv)dv = 2\pi b(av + bsinv) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab$

1.6. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности

Пусть поверхность Ф задана векторно-параметрически: Ф: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Пусть на этой поверхности задана кривая γ внутренними уравнениями:

γ: $\begin{cases} u = u(S) \\ v = v(S) \end{cases}$, S – естественный параметр

Пусть $M_0(u_0, v_0) \in \gamma$, $M_0 \in Ф$. Проведем в этой точке касательную плоскость π к поверхности и вектор нормали $\vec{n}$. От кривой γ в точке M_0 проведем вектор кривизны $k\vec{\vartheta}$. Спроектируем вектор $k\vec{\vartheta}$ на единичный вектор $\vec{n}$.

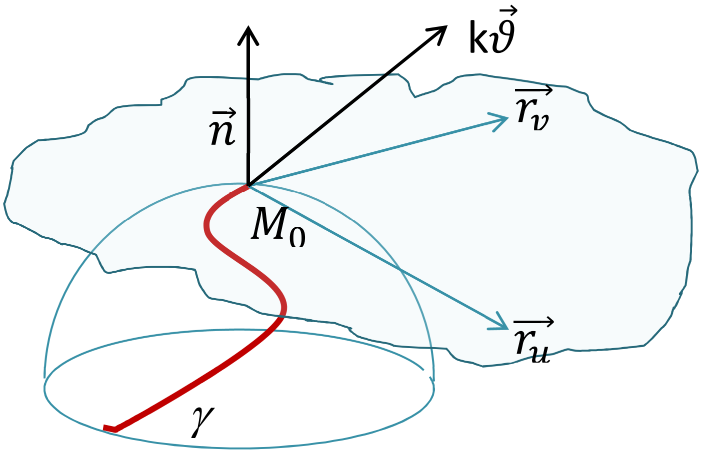

Рисунок 20. Нормальная кривизна кривой на поверхности

Алгебраическая проекция вектора $k\vec{\vartheta}$ (вектора кривизны) на единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности называется нормальной кривизной кривой γ на поверхности (рис.20). Обозначается k_n.

k_n=$\text{Пр}_{\vec{n}} k\vec{\vartheta}$

Из свойств проекции следует: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\text{Пр}_{\vec{n}} k\vec{\vartheta} = \frac{\overrightarrow{k\vartheta} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \overrightarrow{k\vartheta} \cdot \vec{n}$

$k\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ (формула Френе)

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$

$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = (\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds})' \frac{du}{ds} + (\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds})' \frac{dv}{ds} = (\vec{r}_{uu} \frac{du}{ds} + \vec{r}_{uv} \frac{dv}{ds}) \frac{du}{ds} +$

$+(\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds} + \vec{r}_{vv} \frac{dv}{ds}) \frac{dv}{ds} + \overrightarrow{r_u} \frac{d^2u}{ds^2} + \overrightarrow{r_v} \frac{d^2v}{ds^2} =$

$= \overrightarrow{r_{uu}} (\frac{du}{ds})^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \overrightarrow{r_u} \frac{d^2u}{ds^2} + \overrightarrow{r_v} \frac{d^2v}{ds^2}$

Умножим полученное равенство скалярно на $\vec{n}$ и учтем, что $\vec{n}\perp\vec{r}_u$, $\vec{n}\perp\vec{r}_v$, значит $\vec{n}\cdot\vec{r}_u = \vec{n}\cdot\vec{r}_v$=0

k_n=$\frac{(\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu})du^2+2(\vec{n}\vec{r}_{uv})dudv+(\vec{n}\cdot\vec{r}_{vv})dv^2}{ds^2}$ (6.1)

Введем обозначения: $\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}$=L; $\vec{n}\vec{r}_{uv}$=M; $\vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}$=N (6.2)

k_n=$\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$ (6.3)

Дифференциальная квадратичная форма $\Phi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ (6.4) называется *второй квадратичной формой поверхности*.

Замечание: в отличие от первой квадратичной формы поверхности, вторая квадратичная форма может быть меньше или равна 0.

Найдем L, M и N другим способом.

Так как $\vec{n}\cdot\vec{r}_u = \vec{n}\cdot\vec{r}_v$=0, то продифференцируем оба эти равенства последовательно по u и по v.

$\vec{n}_u\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0$, L=-$\vec{n}_u\vec{r}_u$

$\vec{n}_v\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0$, M=-$\vec{n}_v\vec{r}_u$

$\vec{n}_v\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{vv} = 0$, N=-$\vec{n}_v\vec{r}_v$

$\vec{n}_u\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0$, M=-$\vec{n}_u\vec{r}_v$

Главные направления поверхности. Главные кривизны поверхности

Итак, в каждой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

d$S^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

$\Phi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$

Составим матрицу второй квадратичной формы: $B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

Составим λ-матрицу пары квадратичных форм:

$$\overline{B} = B - \lambda G = \begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{pmatrix}$$

Определим собственные векторы пары квадратичных форм: $(B - \lambda G)\cdot$U=0

Эти векторы будем называть *направлениями кривизн*, а соответствующие им собственные значения $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = k_2$ - *главными кривизнами поверхности в точке*.

$$(EG-F^2)k^2-(EN-2MF+LG)k+(LN-M^2)=0$$

Решая это уравнение, находим главные кривизны.

Полная и средняя кривизны поверхности

Полной кривизной поверхности К называется произведение ее главных кривизн: К=$k_1 \cdot k_2$

Средней кривизной поверхности Н называется среднее арифметическое ее главных кривизн: $\mathrm{H}=\frac{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2}{2}$

$$(EG-F^2)k^2-(EN-2MF+LG)k+(LN-M^2)=0$$

Тогда по теореме Виета

К=$k_1 \cdot k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2}{2}=\frac{EN-2MF+LG}{2(EG-F^2)}$

Если К постоянна во всех точках поверхности, то поверхность называют *поверхностью постоянной гауссовой кривизны*.

Если средняя кривизна Н=0 во всех точках поверхности, то *поверхность называют минимальной.*

Замечания

1) К>0. Точки, в которых К>0, называются эллиптическими. Вблизи эллиптических точек поверхность имеет вид эллипсоида. Поверхность, состоящая из одних эллиптических точек, является выпуклой.
2) К<0. В этих точках поверхность имеет форму седла (гиперболоида). Такие точки называются гиперболическими.
3) К=0. Такие точки называются параболическими. Вблизи этих точек поверхность имеет форму цилиндра.

Теорема 1. Сфера есть поверхность постоянной положительной кривизны.

Доказательство:

Для сферы: $ds^2=R^2du^2+R^2cos^2udv^2$

$\Phi_2 = Rdu^2 + Rcos^2udv^2$

L=R, M=0, N= $Rcos^2u$

E=R^2, G=R^2cos^2u

K=$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$=$\frac{R^2cos^2u}{R^4cos^2u} = \frac{1}{R^2} > 0$

Теорема 2. Плоскость есть минимальная поверхность и поверхность постоянной нулевой кривизны.

Доказательство:

Пусть плоскость задана в виде: $\vec{r} = \left(x, y,\ ax + by + c\right)$

$\overrightarrow{r_x} = (1,\ 0,\ a), \overrightarrow{r_y} = (0,\ 1,\ b)$,

$\overrightarrow{r_{xx}} = \overrightarrow{r_{yy}} = \overrightarrow{r_{xy}} =\ 0$, значит, L=M=N=0

K=$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

H= $\frac{EN-2MF+LG}{2(EG-F^2)}$

K=0, H=0

Задача 21: Вычислить $\Phi_{2,}$ главные кривизны, среднюю и гауссову кривизны геликоида: $\vec{r} = (tcos\varphi,\ tsin\varphi,\ a\varphi)$

Решение:

$\overrightarrow{r_t} = (\cos\varphi,\ sin\varphi,\ 0), \overrightarrow{r_\varphi} = (-\mathrm{t}sin\varphi,\ tcos\varphi,\ a)$

$E = (\vec{r}_t\vec{r}_t)$ F=$\vec{r}_t\vec{r}_\varphi$ $G = \vec{r}_\varphi\vec{r}_\varphi$

E=1, F=0, G=$t^2 + a^2$

$dS^2 = dt^2 + (a^2 + t^2)d\varphi^2$

Вычислим вектор нормали к поверхности:

$\vec{N} = \vec{r}_t \times \vec{r}_\varphi = \left\{asin\varphi,\ \ -acos\varphi,\ t\right\}, \left|\vec{N}\right| = \sqrt{a^2 + t^2}$

$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\left\{asin\varphi,\ \ -acos\varphi,\ t\right\}$

$\overrightarrow{r_{tt}} = (0,\ 0,\ 0), \overrightarrow{r_{\varphi\varphi}} = (-\mathrm{t}cos\varphi,\ -tsin\varphi,\ 0), \overrightarrow{r_{t\varphi}} = (-sin\varphi,\ cos\varphi,\ 0)$

$L = (\vec{n}\vec{r}_{tt})$=0

M=$\vec{n}\vec{r}_{t\varphi}= \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}(-asin^2\varphi - acos^2\varphi) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}$

N=$\vec{n}\overrightarrow{r_{\varphi\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}(-tasin\varphi cos\varphi + atsin\varphi cos\varphi) = 0$

$\Phi_2 = Ldt^2 + 2Mdtd\varphi + Nd\varphi^2, \Phi_2 = -\frac{2a}{\sqrt{a^2+t^2}}$

(EG-$F^2)k^2 - (EN - 2MF + LG)k + (LN - M^2) = 0$

$(t^2 + a^2)k^2 - \frac{a^2}{a^2+t^2} = 0$

$k^2 = \frac{a^2}{(a^2+t^2)^2}$

$k_1 = \frac{a}{a^2+t^2}$, $k_2 = -\frac{a}{a^2+t^2}$ - главные кривизны

К=$k_1 \cdot k_2 = -\frac{a^2}{(a^2+t^2)^2}$ - полная (гауссова) кривизна

H=$\frac{k_1+k_2}{2} = 0$ – средняя кривизна

2. ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания домашней контрольной работы

Домашняя контрольная работа является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Дифференциальная геометрия”, а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Домашняя контрольная работа по дифференциальной геометрии направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по дифференциальной геометрии;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится четыре задачи.

Перед тем как приступить к домашней контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с решением типовых задач, представленных в конспекте лекций по дифференциальной геометрии.

В первом задании требуется вычислить длину дуги кривой, заданной в произвольной параметризации. Для успешного выполнения задания студенту необходимо проработать материал пунктов 1.1 и 1.2 и изучить примеры решение задач 3 и 4, представленных в разделе “Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей”.

Во втором задании необходимо найти кривизну и кручение кривой. Полезным при выполнении этого задания будет материал пункта 1.4 и пример решения задачи 13.

В третьем задании предлагается составить уравнение одной из граней сопровождающего трехгранника кривой и уравнение касательной, главной нормали или бинормали. Помощь в решении окажет теоретический материал и примеры решения типовых задач, представленных в пункте 1.3.

В четвертом задании требуется вычислить смешанное произведение векторной функции от двух аргументов и ее частных производных в заданной точке. Для выполнения этого задания полезен материал, изложенный в 1.5.

За правильное выполнение первого и четвертого заданий выставляется по два балла. Второе и третье задание оцениваются в три балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Вычислить длину дуги кривой, заданной в произвольной параметризации	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ	1
2	Вычислить кривизну и кручение кривой	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения. Получены верные ответы	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ для кривизны кривой, при этом кручение вычислено верно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ для кручения кривой, при этом кривизна вычислена верно	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок вычислительного или логического характера.	1
3	Составить уравнение одной из граней сопровождающего трехгранника кривой и уравнение касательной,	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные ответы	3

	главной нормали или бинормали.	Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ для уравнения грани сопровождающего трехгранника кривой, при этом уравнение касательной, главной нормали или бинормали составлено верно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ для уравнения касательной, главной нормали или бинормали, при этом уравнение грани основного трехгранника составлено верно	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок вычислительного или логического характера.	1
4	Вычислить смешанное произведение векторной функции от двух аргументов и ее частных производных в заданной точке.	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ	1
ИТОГО			максимум 10

2.2. Требования к выполнению и оформлению домашней контрольной работы

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по дифференциальной геометрии
студентки факультета информатики, математики и экономики
4 курса группы МИ-16 Ивановой Татьяны Александровны
Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним, для наглядности – иллюстрациями.

6. Задачи №№ 1, 4 оцениваются в 2 балла. Задачи №№ 2 и 3 оцениваются в 3 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 10 баллов. Если набрано менее 5 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

2.3. Варианты домашней контрольной работы

Вариант 1

1. **1.** Найти длину дуги кривой x=$ln tg\frac{t}{2}+cost$, y=sint, если t∈[π/4; π/3].
2. **2.** Найти кривизну и кручение кривой x=e^t, y= e^{-t}, z=$\sqrt{2}t$ в точке $M_0(1; 1; 0)$.
3. **3.** Написать уравнения главной нормали и нормальной плоскости кривой $\vec{r}=(acost;\ asint; bt)$ в точке $t_0=0$.
4. **4.** Найти $(\overrightarrow{r_{uu}}\ \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_{vv}})$, если $\vec{r}$=$(cosucosv; sinusinv;\ cosu)$ $u_0=\frac{\pi}{4};\ \ v_0=\frac{\pi}{4}$

Вариант 2

1. **1.** Найти длину дуги кривой y=lncosx, если x∈[-π/3; π/3].
2. **2.** Найти кривизну и кручение кривой x=tsint, y= tcost, z=te^t в точке $M_0(0; 0; 0)$.
3. **3.** Написать уравнения бинормали и спрямляющей плоскости кривой $\vec{r}=\left(t;\ t^2;\frac{2}{3}t^3\right)$ в точке $t_0=1$.
4. **4.** Найти $(\overrightarrow{r_{uu}}\ \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_{vv}})$, если $\vec{r}$=$(ucosv; usinv;\ u^2)$

Вариант 3

1. **1.** Найти длину дуги кривой x=$acos^3t$, y=$asin^3t$, если t∈[0; π/4].
2. **2.** Найти кривизну и кручение кривой x=t^2-t+1, y= $\frac{1}{2}t^2+t$, z= $t^3-\sqrt{2}t+4$ в точке $t_0=0$.

3. Написать уравнения касательной и соприкасающейся плоскости кривой x=cost, y=sint, z=t в точке $t_0 = \frac{\pi}{2}$.
4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}})$, если $\vec{r}$=$(arctg\frac{u}{v}; ln\frac{u+v}{uv};\ uv)$ $u_0 = 1;\ \ v_0 = 1$.

Вариант 4

1. Найти длину дуги кривой y=lnsecx, если x∈[-π/3; π/3].
2. Найти кривизну и кручение кривой x=cost, y= sint, z=sintcost в точке M_0(0; 1; 0).
3. Написать уравнения главной нормали и нормальной плоскости кривой $\vec{r}$=$(\frac{1+t}{1-t}; \frac{1}{1-t^2};\ \frac{1}{1+t})$ $t_0 = 0$.
4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}})$, если $\vec{r}$=$(ucosv; usinv;\ 2uv)$ $u_0 = 1;\ \ v_0 = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 5

1. Найти длину дуги кривой x=t-sint, y=1-cost, z=4cos(t/2) от точки M_1 (t=0) до точки M_2 (t= π).
2. Найти кривизну и кручение кривой $3y=x^3$, 2xz=1 в точке M_0(1; 1/3; 1/2).
3. Написать уравнения касательной и спрямляющей плоскости кривой $\vec{r}$=$(\frac{t^2}{2};\ \frac{2}{3}t^3;\ \frac{t^4}{2})$ в точке $M_0(\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{2})$.
4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}})$, если $\vec{r}$=$(tgu; ctgv;\ cosusinv)$ $u_0 = v_0 = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 6

1. Найти длину дуги кривой x=4(cost+tsint), y=4(sint-tcost) от точки M_1 (t=0) до точки M_2 (t=π/3).
2. Найти кривизну и кручение кривой x=tsint, y= tcost, $z=te^t$ в точке M_0(0; 0; 0).
3. Написать уравнения касательной и соприкасающейся плоскости кривой x=cost, y=sint, z=t в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}})$, если $\vec{r}$=$(ucosv; usinv;\ 2uv)$ $u_0 = 2;\ \ v_0 = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 7

1. Найти длину дуги кривой y=lnsinx, если x∊[-π/3; π/3].

2. Найти кривизну и кручение кривой x=t^2-t+1, y= $\frac{1}{2}t^2 + t$, z= $t^3 - \sqrt{2}t + 4$ в точке t_0=1.

3. Написать уравнения главной нормали и нормальной плоскости кривой $\vec{r} = (acost;\ asint; bt)$ в точке t_0=$\frac{\pi}{2}$.

4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}})$, если $\vec{r}$=$(arctg\frac{u}{v}; ln\frac{u+v}{uv};\ uv)$ $u_0 = 2;\ \ v_0 = 2$.

Вариант 8

1. Найти длину дуги кривой x=a$\cos^3$t, y=a$\sin^3$t, если t∊[0; π/3].

2. Найти кривизну и кручение кривой x=e^t, y= e^{-t}, z=$\sqrt{3}t$ в точке M_0(1; 1; 0).

3. Написать уравнения главной нормали и нормальной плоскости кривой$\vec{r}$=$(\frac{1+t}{1-t}; \frac{1}{1-t^2};\ \frac{1}{1+t})$ $t_0 = 2$.

4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}})$, если $\vec{r}$=$(ctgu; tgv;\ cosusinv)$ $u_0 = v_0 = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 9

1. Найти длину дуги кривой x=t-sint, y=1-cost, z=4cos(t/2) от точки M_1 (t=0) до точки M_2 (t= $\frac{\pi}{2}$).

2. Найти кривизну и кручение кривой 3y=x^2, 3xz=1 в точке M_0(1; 1/3; 1/3).

3. Написать уравнения касательной и спрямляющей плоскости кривой $\vec{r}$=$(\frac{t^2}{2};\ \frac{1}{3}t^3;\ \frac{t^4}{2})$ в точке $M_0(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2})$.

4. Найти $(\overrightarrow{r_{uu}}\ \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_{vv}})$, если $\vec{r}$=$(cosucosv; sinusinv;\ sinu)$ $u_0 = \frac{\pi}{4};\ \ v_0 = \frac{\pi}{4}$

Вариант 10

1. **1.** Найти длину дуги кривой x=4(cost-tsint), y=4(sint+tcost) от точки M_1 (t=0) до точки M_2 (t=π/4).
2. **2.** Найти кривизну и кручение кривой x=sint, y= cost, z=sintcost в точке $M_0(0; 1; 0)$.
3. **3.** Написать уравнения бинормали и нормальной плоскости кривой $\vec{r}=(\frac{1+t}{1-t}; \frac{1}{1-t^2}; \frac{1}{1+t})\ t_0 = 0$.
4. **4.** Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uv}})$, если $\vec{r}=(usinv; ucosv;\ 4uv)\ u_0 = 1;\ \ v_0 = \frac{\pi}{2}$.

2.4. Образец решения варианта контрольной работы

Вариант 0

1. **1.** Найти длину дуги кривой *x=4(cost+tsint), y=4(sint-tcost)* от точки M_1 (t=0) до точки M_2 (t=π/4).

Решение:

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{dt}$$

$$\vec{r}'(t) = \big(4(-sint + sint + tcost; cost - cost + tsint)\big) = 4(tcost; tsint)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$|\vec{r}'(t)| = 4\sqrt{(tcost)^2 + (tsint)^2} = 4\sqrt{t^2(cos^2t + sin^2t} = 4t$$

$$S = 4\int_0^{\pi/4} tdt = 4\frac{t^2}{2}|_0^{\pi/4} = 2t^2|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{8}$$

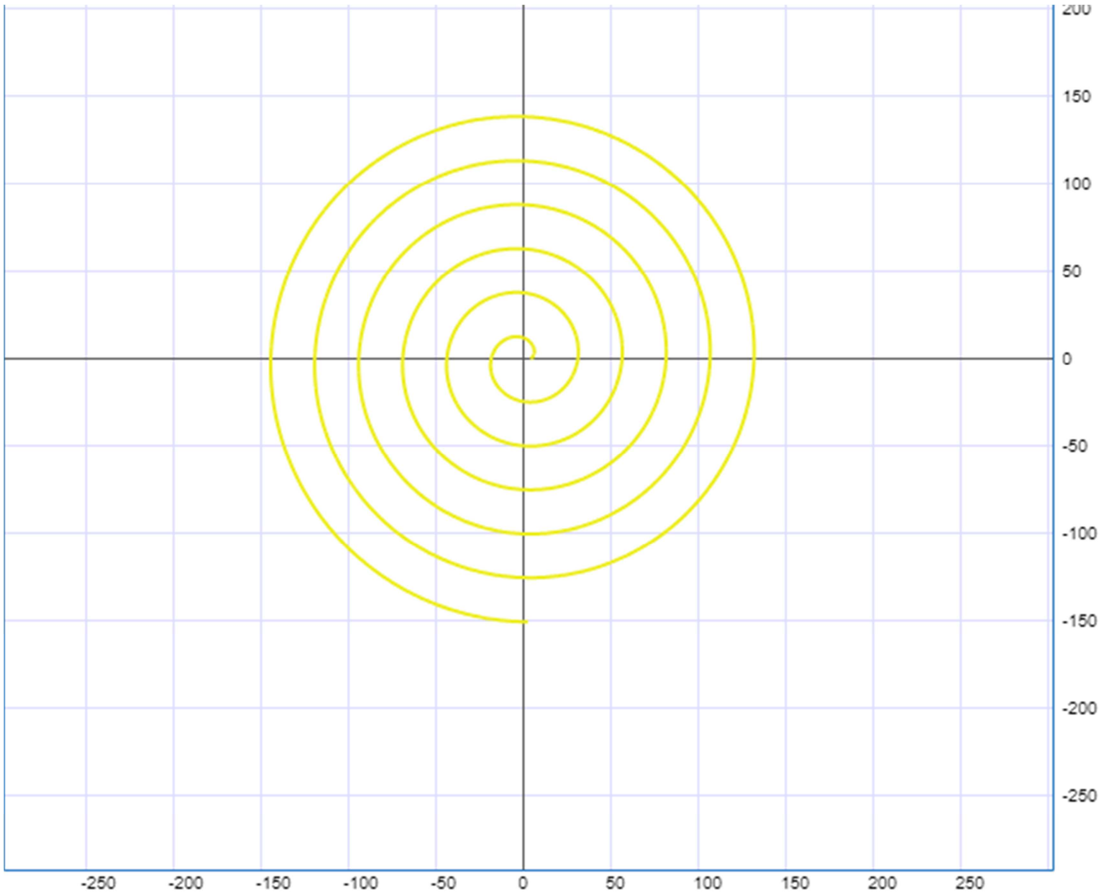

Рисунок 21. Построение графика функции в онлайн-сервисе umath.ru

2. Найти кривизну и кручение кривой x=t^2-1, y=t^2+2, z=t^3 в точке M_0(0; 3; -1).

Решение:

Найдем t_0: $\begin{cases} t^2 - 1 = 0 \\ t^2 + 2 = 3 \\ t^3 = -1 \end{cases}$

t_0=-1

$\overrightarrow{r'}(t) = (2t; 2t; 3t^2)$; $\overrightarrow{r'}(t_0) = (-2; -2; 3)$

$\overrightarrow{r''}(t) = (2; 2; 6t)$; $\overrightarrow{r''}(t_0) = (2; 2; -6)$

$\overrightarrow{r'''}(t) = (0; 0; 6)$; $\overrightarrow{r'''}(t_0) = (0; 0; 6)$

$k = \frac{\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right|}{\left|\overrightarrow{r'}\right|^3}$ – кривизна кривой

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k} = (6;\ -6; 0)$$

$$\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{r'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$k = \frac{6\sqrt{2}}{17\sqrt{17}}$$

$\varkappa = \frac{(\overrightarrow{r'}\,\overrightarrow{r''}\,\overrightarrow{r'''})}{\left|\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}\right|^2}$ – кручение кривой

$$\left(\overrightarrow{r'}\,\overrightarrow{r''}\,\overrightarrow{r'''}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\varkappa = 0$$

3. Написать уравнения бинормали и спрямляющей плоскости кривой $\vec{r} = (t^3;\ t^2 - 1; 1 - t)$ в точке t_0=1.

Решение:

Найдем точку M_0: $M_0(1; 0; 0)$

Направляющий вектор бинормали $\vec{a} = \overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''}$

$\overrightarrow{r'} = (3t^2; 2t;\ -1)$; $\overrightarrow{r'}(t_0) = (3; 2;\ -1)$

$\overrightarrow{r''} = (6t; 2;\ 0)$; $\overrightarrow{r''}(t_0) = (6; 2;\ 0)$

$$\overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{r''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} = (2;\ -6; -6) = 2(1;\ -3;\ -3)$$

Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$$

$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-3}$ – уравнение бинормали.

Пусть π_3 – спрямляющая плоскость. $\vec{\vartheta}$ – вектор нормали спрямляющей плоскости. Тогда $\pi_3 \perp \overrightarrow{(r' \times r'')} \times \overrightarrow{r'}$

$$\overrightarrow{(r' \times r'')} \times \overrightarrow{r'''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 8\vec{j} + 11\vec{k} = (9;\ -8; 11)$$

Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

π_3: *9(x-1)-8y+11z=0*

π_3: *9x-8y+11z-9=0* – уравнение спрямляющей плоскости.

4. Найти $(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}})$, если $\vec{r}=(uln\frac{u}{v}; vln\frac{v}{u};\ e^{uv})$ $u_0 = 1;\ \ v_0 = 1$

Решение:

$$\overrightarrow{r_u}=\left(ln\frac{u}{v} + u \cdot \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{v};\ \ v \cdot \frac{u}{v} \cdot \left(\frac{-v}{u^2}\right);\ \ ve^{uv}\right) = (ln\frac{u}{v} + 1;\ -\frac{v}{u};\ \ ve^{uv})$$

$$\overrightarrow{r_u}(u_0;\ v_0) = (1;\ -1;\ \ e)$$

$$\overrightarrow{r_v} =(\ u \cdot \frac{v}{u} \cdot \left(\frac{-u}{v^2}\right);\ ln\frac{v}{u} + v \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{u};\ ue^{uv})$$

$$\overrightarrow{r_v}(u_0;\ v_0) = (-1;\ 1;\ \ e)$$

$$\overrightarrow{r_{uu}} =(\ \frac{v}{u} \cdot \left(\frac{1}{v}\right);\ \frac{v}{u^2};\ v^2e^{uv})$$

$$\overrightarrow{r_{uu}}(u_0;\ v_0) = (1;\ 1;\ \ e)$$

$$(\overrightarrow{r_u}\ \overrightarrow{r_v}\overrightarrow{r_{uu}}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & e \\ -1 & 1 & e \\ 1 & 1 & e \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e(-2-2) = -4e$$

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский. — Электронные текстовые данные — Москва : Лаборатория знаний, 2017. — 334 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/94095. — Загл. с экрана.
2. Атанасян, С.Л. Геометрия 2 [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, В.Г. Ушаков. — Электронные текстовые данные — Москва : Лаборатория знаний, 2015. — 547 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/66314 . — Загл. с экрана.
3. Паньженский, В.И. Введение в дифференциальную геометрию [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Паньженский. — Электронные текстовые данные — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/67459. — Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Феденко, А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии / А.С. Феденко. – Москва : Наука, 1979. - 272 с.
2. Франгулов, С.А. Сборник задач по геометрии: учебное пособие / С.А. Франгулов, П.И. Совертков, А.А. Фадеева, Т.Г. Ходот. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 256 с.
3. Шаров, Г.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учебное пособие / Г.С. Шаров, А.М. Шелехов, М.А. Шестакова. — Электронные текстовые данные — Москва : МЦНМО, 2005. — 112 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/9440. — Загл. с экрана.