

Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

ЛОГИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ

*Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль «Математика и Информатика»*

Новокузнецк

2019

УДК 510.2(072)

ББК 22.12я73

П 47

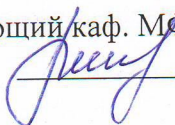
Позднякова Е.В.

П 47 Логика математических рассуждений: методические рекомендации по выполнению контрольной работы для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 31 с.

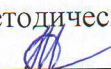
В работе изложены методические рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине «Логика математических рассуждений»: основные теоретические сведения, примеры решения задач и доказательства теорем, варианты контрольной работы и образец ее решения, методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем и образовательных онлайн-платформ.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 2 от 09.09.2019 г.

Заведующий каф. МФММ
 / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 1 от 12.09.2019 г.

Председатель методической комиссии ФИМЭ
 / Г.Н. Бойченко

УДК 510.2(072)

ББК 22.12я73

П 47

© Позднякова Елена Валерьевна
© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2019

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	6
Основные понятия (суждения, аксиомы, теоремы).....	6
Логическая структура теоремы	7
Виды теорем	8
Необходимые и достаточные условия	9
Методы доказательства теорем	9
ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕМЫ	15
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ “ЛОГИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ”	16
Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы	16
Требования к выполнению и оформлению контрольной работы.....	19
Варианты контрольной работы	20
Образец решения варианта контрольной работы	26
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	29
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ, СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПЛАТФОРМЫ	30

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении контрольной работы по дисциплине “Логика математических рассуждений”, которая относится к вариативной части учебного плана и является дисциплиной по выбору.

“Логика математических рассуждений” является интегративной дисциплиной и включает в себя элементы математической логики и методики обучения математике. Главным объектом логики математических рассуждений является понятие математического доказательства.

Целью изучения логики математических рассуждений является: развитие культуры математических рассуждений, подготовка в области теории и методики обучения математическим доказательствам в системе основного общего и среднего образования, овладение классическим математическим и логическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях, вооружение конкретными знаниями, дающими возможность преподавать данный предмет в школе и квалифицированно вести факультативные курсы по математике.

Задача дисциплины: углубление уровня научной подготовки студентов в области математической логики и методики обучения математике; ознакомление с приемами и методами доказательств в различных разделах математики.

В методические рекомендации включено:

- 1) основные теоретические сведения (основные понятия, логическая структура теоремы, виды теорем, необходимые и достаточные условия, методы и приемы доказательства теорем);
- 2) структура логико-математического анализа теоремы;

- 3) особенности оценивания контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;
- 4) варианты контрольной работы и образец ее решения;
- 5) требования к выполнению и оформлению контрольной работы;
- 6) список рекомендуемой литературы
- 7) список современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем и образовательных онлайн-платформ.

Основные теоретические сведения по дисциплине иллюстрируются соответствующими примерами, необходимыми чертежами, актуализируются в доказательствах теорем школьного курса математики.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Помощь в изучении дисциплины могут оказать рекомендуемые профессиональные базы данных, информационные справочные системы. Кроме того, на образовательной онлайн-платформе “Лекториум” представлен медиа-курс лекций “Математическая логика и культура математических рассуждений” (лектор С. Сперанский, Математическая лаборатория им. П.Л. Чебышева), который может быть полезен при самостоятельном изучении теоретических вопросов дисциплины.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основные понятия (суждения, аксиомы, теоремы)

Связь между понятиями устанавливается с помощью суждений.

Суждение - форма мышления, в которой утверждается или отрицается что-либо относительно предметов, их свойств и отношений и которая обладает свойством выражать либо истину, либо ложь. Суждение можно изобразить символически в виде формулы: $S \text{ есть } P$ ($S \text{ не есть } P$), где S и P -переменные.

Пример: *Симметричные фигуры равны*. В качестве переменной S используются симметричные фигуры, а переменной P - равенство фигур. Приведенное суждение является истинным.

Суждения, отображающие отношения, например « $5 > 3$ », имеют форму aRc , где a и c - переменные, R обозначает отношение.

Существуют различные **виды суждений** в зависимости от объема и содержания отображаемых в суждении предметов, от характера связи предметов и свойств.

- По объему отображаемых предметов суждения делятся на общие и частные:
все S есть P , некоторые S есть P .
 - а) Все квадраты суть параллелограммы.
 - б) Некоторые треугольники равнобедренные.
- По характеру связи отображаемых предметов и их свойств суждения делятся на условные, разделительные и категорические:
 - а) если S есть P , то S_1 есть P_1 (Если четырехугольник - параллелограмм, то противоположные углы его равны);
 - б) S есть P_1 или P_2 (Величины углов с соответственно параллельными сторонами равны или в сумме составляют 180°);
 - в) S есть P (Вертикальные углы равны).

- По качеству отображаемых предметов суждения делятся на утвердительные и отрицательные: а) все S суть P (Все квадраты-прямоугольники); б) никакое S не есть P (Никакие треугольники не являются квадратами).

Процесс получения нового суждения – вывода из одного или нескольких суждений называется *умозаключением*. Важнейшими видами сложных суждений являются аксиомы и теоремы.

Аксиома - исходное положение какой-либо теории, принимаемое в рамках данной теории истинным без требования доказательства и используемое в основе доказательства других ее положений.

Пример аксиомы: *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой и точки, не принадлежащие ей.*

К системе аксиом, на которой строится та или иная математическая теория, предъявляются требования непротиворечивости, независимости, полноты.

Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее нельзя одновременно вывести два взаимоисключающих друг друга предложения: A , $\bar{A}$.

Система аксиом называется *независимой*, если ни одна из аксиом этой системы не является следствием других аксиом этой системы.

Система аксиом называется *полной*, если в ней доказуемо обязательно одно из двух: либо утверждение A , либо $\bar{A}$.

Математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства (рассуждения), называют **теоремой**.

Логическая структура теоремы

Существует два вида формулирования теоремы: условный и категорический. Всегда можно из одного вида формулирования теоремы перейти в другой.

Пример: Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.
(категорическая форма)

Если четырехугольник – ромб, то его диагонали пересекаются под прямым углом. (условная форма)

В структуре теоремы выделяют три составляющие:

- разъяснительная часть, в которой описывается множество объектов, упомянутых в теореме;
- условие теоремы (указание на то, при каких условиях рассматривается в теореме тот или иной объект);
- заключение теоремы (указание на то, что утверждается в этом объекте утверждается)

Виды теорем

Любая теорема состоит из двух основных частей: условия S и заключения P . Запишем теорему в виде $S \Rightarrow P$, тогда суждение $P \Rightarrow S$ называют теоремой, обратной теореме $S \Rightarrow P$. Заменяя в теореме $S \Rightarrow P$ условие и заключение их отрицаниями, получим теорему $\bar{S} \Rightarrow \bar{P}$, которую называют противоположной. Теорему $\bar{P} \Rightarrow \bar{S}$ называют обратной противоположной.

Пример:

Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (прямая теорема).

Если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны (обратная теорема).

Если внутренние накрест лежащие углы не равны, то прямые не параллельны (противоположная теорема).

Если прямые не параллельны, то внутренние накрест лежащие углы не равны (теорема, обратная противоположной).

Теоремы $S \Rightarrow P$ и $\bar{P} \Rightarrow \bar{S}$, а также $P \Rightarrow S$ и $\bar{S} \Rightarrow \bar{P}$ равносильны друг другу, т.е. если истинна одна, то истинна и другая.

Необходимые и достаточные условия

Пусть имеем теорему: $S \Rightarrow P$. Если из S следует P , то P называют необходимым условием для S , т.е. необходимое условие для S - это его следствие.

Если из S следует P , то S называют достаточным условием для P .

Используя введенную терминологию, теорему: “Если окружность вписана в треугольник, то ее центр лежит в точке пересечения биссектрис этого треугольника” можно сформулировать так:

1. “Для того, чтобы окружность была вписана в треугольник, необходимо, чтобы ее центр лежал в точке пересечения биссектрис этого треугольника”.

2. “Для того, чтобы центр окружности лежал в точке пересечения биссектрис треугольника, достаточно, чтобы эта окружность была вписана в этот треугольник”.

Если кроме прямой теоремы будет верна и обратная $P \Rightarrow S$, то условие S будет необходимым и достаточным для P , а условие P – необходимым и достаточным для S .

Необходимое и достаточное условие часто называют признаком. Признаки формулируются в виде эквиваленций с помощью связок “тогда и только тогда”, “если и только если”. Например, признак делимости на 4: “Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда на 4 делится число, образованное двумя последними цифрами его десятичной записи”.

Методы доказательства теорем

Рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утверждения называется *доказательством*.

Метод доказательства – способ связи аргументов при переходе от условия к заключению суждения.

Методы доказательства, используемые в школьном курсе математики, можно выделить по двум основаниям:

- по пути обоснования тезиса (прямое и косвенное);
- по математическому аппарату, используемому в доказательстве.

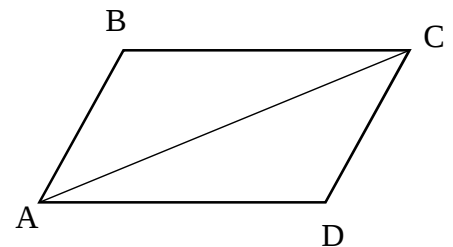
К *прямым приемам доказательства* относят приемы:

- ✓ преобразования условия суждения (синтетический);
- ✓ преобразования заключения суждения: а) отыскание достаточных оснований справедливости заключения (восходящий анализ); б) отыскание необходимых признаков справедливости суждения с последующей проверкой обратимости рассуждений (нисходящий анализ);
- ✓ последовательного преобразования то условия, то заключения суждения.

Рассмотрим пример.

Теорема: Если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то этот четырехугольник является параллелограммом.

Дано: $ABCD$ -четырехугольник, $AB=CD$, $BC=AD$.



Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство (*синтетический метод*):

- 1) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. В этих треугольниках сторона AC - общая, $AB=CD$, $AD=BC$. По третьему признаку равенства треугольников имеем $\triangle ABC=\triangle ACD$.
- 2) Так как $\triangle ABC=\triangle ACD$, то в этих треугольниках против равных сторон лежат равные углы: из равенства $AB=CD$ следует, что $\angle 3=\angle 4$; из равенства $BC=AD$ следует, что $\angle 1=\angle 2$.
- 3) $\angle 1$ и $\angle 3$ накрест лежащие углы при прямых AB , CD и секущей AC , и они равны, а значит, прямые AB и CD параллельны.
- 4) $\angle 1$ и $\angle 4$ накрест лежащие углы при прямых BC , AD и секущей AC , и они равны, а значит, прямые BC и AD параллельны.
- 5) Имеем четырехугольник $ABCD$, у которого противоположные стороны попарно параллельны и по определению делаем вывод, что четырехугольник $ABCD$ -параллелограмм.

Доказательство (аналитический метод):

- 1) Нам нужно доказать, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, то есть мы должны показать, что он, при заданных условиях, удовлетворяет всем требованиям определения параллелограмма: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.
- 2) Чтобы доказать параллельность прямых AB и CD , достаточно доказать равенство накрест лежащих углов 3 и 4 при прямых AB , CD и секущей AC .
- 3) Чтобы доказать равенство пар углов $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 1 = \angle 2$, достаточно доказать равенство треугольников, содержащих эти углы, то есть надо доказать, что $\triangle ABC = \triangle ACD$.
- 4) Чтобы доказать равенство треугольников ABC и ADC , достаточно показать, что они удовлетворяют условиям одного из признаков равенства треугольников (в данном случае имеем третий признак равенства треугольников: AC -общая сторона, $AB = CD$, $BC = AD$).

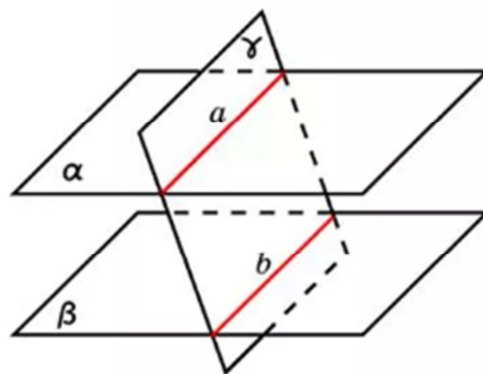
К косвенным приемам доказательства относят:

- ✓ метод “от противного” (истинность доказываемого тезиса устанавливается посредством опровержения противоречащего ему суждения);
- ✓ разделительный метод, или метод деления условий (тезис рассматривается как один из возможных вариантов предложений, когда все предложения отвергаются, кроме одного), иначе этот метод называют методом исключений;
- ✓ метод контрапозиции (вместо теоремы $A \Rightarrow B$ доказывают равносильную ей теорему $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$)

Рассмотрим примеры.

Теорема: Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

Доказательство (метод исключений):



Обозначим прямые пересечения через a и b , а параллельные плоскости - α, β , тогда могут представить следующие случаи: а) a и b - скрещивающиеся прямые; б) a и b пересекаются; в) a и b параллельны. Случай а) отвергается сразу, так как прямые a и b принадлежат одной плоскости. Если бы имел место случай б), то плоскости пересекались бы, а нам известно, что они параллельны. Остается принять случай в), т.е. $a \parallel b$.

Теорема: Если x^2 – четное число, то x – четное число.

Доказательство (метод контрапозиции)

Предположим, что x – нечетное число, т.е. $x=2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$.

Тогда $x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ – нечетное число. Таким образом, справедлива теорема $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, а значит, справедлива и исходная теорема $A \Rightarrow B$.

Задача. Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся трое одноклассников. Докажите, что среди всех них найдутся 15 одноклассников.

Доказательство (метод “от противного”)

Разделим ребят на группы одноклассников. Предположим, что в каждой группе не более 14 ребят. Тогда в четырёх самых больших по количеству группах не более $4 \cdot 14 = 56$ ребят.

Если в каждой из этих групп не менее двух человек, то можно взять по два школьника из этих четырёх групп и добавить двух школьников из оставшихся (их не менее $60 - 56 = 4$). Среди этих 10 школьников нет трёх одноклассников, что противоречит условию.

Если хотя бы в одной из этих четырёх групп меньше двух человек, то имеется не менее $60 - 3 \cdot 14 = 18$ школьников, которые учатся в разных классах. Это также противоречит условию.

К методам доказательства, выделенным по второму основанию, когда способ связи аргументов согласуется с определенной математической теорией, относят:

✓ *Метод геометрических преобразований.* Он состоит из выполнения последовательных шагов: выбирается геометрическое преобразование, обладающее свойством, которое позволяет обосновать наличие указанного

отношения между объектами евклидовой геометрии; выполняется преобразование, при котором один объект переходит в другой; обосновывается наличие указанного отношения между объектами с помощью свойств выбранного геометрического преобразования.

✓ *Алгебраические методы* (уравнений, неравенств, тождественных преобразований).

✓ *Векторный метод*, использующий аппарат векторной алгебры.

Успех в применении векторного метода во многом обусловлен владением специальным словарем, служащим для перевода с геометрического языка на язык векторный и обратно. Этот словарь можно представить следующей таблицей:

Язык геометрии	Язык векторов
$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}, k \neq 0$
$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
Точка С принадлежит прямой АВ	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, либо $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$, либо $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, либо $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$, где О – произвольная точка, $p+q=1$
М – середина отрезка АВ	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$, либо $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, где О – произвольная точка
М ₁ – середина отрезка А ₁ В ₁ , М ₂ – середина отрезка А ₂ В ₂	$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$
М – центроид треугольника ABC	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где О – произвольная точка, либо $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
Точка С делит отрезок АВ в отношении АС:СВ=м:п	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$, либо $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, где О – произвольная точка
О, А, В, С – точки одной плоскости	$x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где x, y, z – действительные числа и $x+y+z=1$
ABCD - параллелограмм	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$, где М – произвольная точка, О – точка пересечения

	диагоналей параллелограмма ABCD	
AB ⊥ α, CD и MK – пересекающиеся прямые плоскости α	$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ $\vec{AB} \cdot \vec{MK} = 0$	и

✓ *Координатный метод* – способ определения положения точки на прямой, на плоскости или в пространстве с помощью чисел (например, в декартовой системе координат). Используя координатный метод, алгебраические уравнения можно истолковать в виде геометрических образов (графиков или фигур) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических выражений (уравнений, неравенств или их систем).

Приведем словарь для перевода с геометрического языка на язык координат на плоскости в виде следующей таблицы:

Язык геометрии	Язык координат
Длина отрезка AB	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$
Площадь треугольника ABC	$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$, где $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2); C(x_3; y_3)$
Точка M(x; y) делит отрезок AB в отношении λ, т.е. $\frac{AM}{MB} = \lambda$	$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, где $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$
Точка M(x; y) - середина отрезка AB	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, где $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$
Прямая AB	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$, $x_1 \neq x_2; y_1 \neq y_2$
Прямая пересекает ось Oх под углом $\alpha \neq 90^\circ$	$y = kx + b$, где k – угловой коэффициент прямой, b – ордината точки пересечения прямой осью Oy ($k \neq 0$)
Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны	$k_1 = k_2; b_1 \neq b_2$
Прямые	$k_2 = -\frac{1}{k_1}, k_1 \neq 0$

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны	
Прямая параллельна оси Ох	$y=b$, где b – ордината точки пересечения прямой с осью Оу ($b \neq 0$)
Прямая параллельна оси Оу	$x=a$, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ох ($a \neq 0$)
Расстояние от точки $M_0 (x_0; y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$	$d = \left \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right $
Окружность с центром в начале координат и радиусом R	$x^2 + y^2 = R^2$
Окружность с центром в точке M и радиусом R	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $M(a; b)$

ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕМЫ

Логико-математический анализ теоремы включает следующие этапы:

1. Анализ формулировки теоремы:

- а). Определение формы суждения (категорическая, условная, раздельная).
- б). Раскрытие основных частей теоремы (разъяснительная часть, условие теоремы, заключение теоремы).
- в). Формулировка обратного утверждения.
- г). Формулировка теоремы – обобщения (если это возможно).

2. Определение места теоремы в структуре школьного курса математики:

- а). Выявление понятий и отношений между ними, рассматриваемых в формулировке теоремы.
- б). Обоснование важных последующих утверждений, которые основываются на данной теореме.

3. Анализ доказательства теоремы:

- а). Выяснение метода доказательства теоремы, который используется в учебнике (синтетический, аналитический, метод доказательства от противного, метод

перебора, метод исключения, метод полной индукции, метод математической индукции)

б). Выявление аксиом и ранее изученных теорем, на которые опирается доказательство рассматриваемой теоремы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ “ЛОГИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ”

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания контрольной работы

Контрольная работа является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Логика математических рассуждений”, а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа по логике математических рассуждений направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по дисциплине;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие математической культуры, логики рассуждений;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится четыре задачи.

Перед тем как приступить к контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с примерами решения задач, представленных в первом параграфе данных методических рекомендаций.

В первом задании требуется определить необходимые и достаточные условия. Для успешного выполнения задания студенту необходимо изучить литературу [2] (основная), [2] (дополнительная).

Во втором задании необходимо провести логико-математический анализ теоремы. Полезным при выполнении этого задания будет материал параграфа 2, образец решения варианта контрольной работы данных методических рекомендаций, а также учебные пособия [1] (основная), [2] (дополнительная).

В третьем задании предлагается решить задачу на доказательство одним из заданных методов, когда способ связи аргументов согласуется с определенной математической теорией (метод координат, векторный метод, алгебраический метод, метод геометрических преобразований). Помощь в решении окажет теоретический материал и примеры решения задач, представленных в параграфе 1.

В четвертом задании требуется выполнить доказательство с помощью прямых или косвенных приемов (синтетический метод, аналитический метод, аналитико-синтетический метод, метод “от противного”, метод контрапозиции). Помощь в решении третьего и четвертого заданий окажет теоретический материал и примеры решения задач, представленных в параграфе 1.

За правильное выполнение первого задания выставляется один балл. За второе задание выставляется три балла. Третье и четвертое задания оцениваются в два балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Определение необходимых и достаточных условий	Необходимые и достаточные условия определены верно, утверждение сформулированы логически и математически грамотно	1
2	Выполнить логико-математический анализ теоремы	Все пункты анализа выполнены верно. Рассуждения математически грамотны, подробны, логически обоснованы	3
		Все пункты анализа выполнены верно. Рассуждения математически грамотны, но недостаточно подробны. Имеются пробелы в логических обоснованиях.	2
		Выполнены все пункты анализа. Однако рассуждения содержат ошибки математического или логического характера.	1
3	Решить задачу на доказательство одним из заданных методов, когда способ связи аргументов согласуется с определенной математической теорией (метод координат, векторный метод, алгебраический метод, метод геометрических преобразований)	Задача решена верно. Логически обоснованы все шаги решения, получены верные ответы	2
		Найдена основная идея решения. Однако само решение содержит ряд ошибок логического характера ИЛИ решение недостаточно обосновано	1
4	Выполнить доказательство с помощью прямых или косвенных приемов (синтетический метод, аналитический метод, аналитико-синтетический метод, метод “от противного”, метод контрапозиции)	Логично и последовательно выполнены все шаги доказательства, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный результат	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или допущена логическая ошибка	1

ИТОГО	максимум 8
-------	------------

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

***Контрольная работа по дисциплине “Логика математических
рассуждений”
студентки факультета информатики, математики и экономики
4 курса группы МИ-16 Ивановой Татьяны Александровны
Вариант 1***

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним, для наглядности – иллюстрациями.

6. Задача № 1 оценивается в 1 балл, задача № 2 оценивается в 3 балла. Задачи №№ 3 и 4 оцениваются в 2 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 8 баллов. Если набрано менее 4 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание:
Вертикальные углы равны.

б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание:
Четырехугольник является ромбом тогда, когда все его стороны равны.

2. Выполните логико-математический анализ теоремы о сумме внутренних углов треугольника: *Сумма углов треугольника равна 180^0 .*

3. Решите задачу на доказательство методом геометрических преобразований:
Доказать, что площадь треугольника, стороны которого есть медианы данного треугольника ABC, составляет $\frac{3}{4}$ площади этого треугольника. (метод симметрии)

4. Докажите данное утверждение методом “от противного”: *Ни один треугольник не может иметь два прямых угла..*

Вариант 2

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание: *В равных треугольниках соответственные углы равны.*
б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *Сумма двух углов прямоугольного треугольника равна 90° .*
2. Выполните логико-математический анализ теоремы о биссектрисе угла треугольника: *Биссектриса при вершине треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*
3. Решите задачу на доказательство методом геометрических преобразований: *На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Прямые, проведенные через точки D и C перпендикулярно к AE , пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и H . Доказать, что $KH = HB$. (метод поворота)*
4. Докажите данное утверждение синтетическим методом: *Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров.*

Вариант 3

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание: *Четырехугольник является ромбом тогда, когда его диагонали перпендикулярны.*
б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *График функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси OY тогда, когда функция $y = f(x)$ четная.*
2. Выполните логико-математический анализ теоремы Фалеса: *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*
3. Решите задачу на доказательство векторным методом: *Докажите, что медианы треугольника, пересекаясь, делятся в отношении 2:1.*
4. Докажите данное утверждение аналитико-синтетическим методом: *В прямоугольном треугольнике, медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.*

Вариант 4

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание:
Четырехугольник является квадратом тогда, когда его диагонали перпендикулярны.
б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *График функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси начала координат тогда, когда функция $y = f(x)$ нечетная.*
2. Выполните логико-математический анализ теоремы о величине внешнего угла треугольника: *Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов треугольника, с ним не смежных.*
3. Решите задачу на доказательство координатным методом: *Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Построен отрезок CC_1 ($C_1 \in AB$), перпендикулярный медиане AA_1 . Докажите, что $BC_1 : C_1A = 1 : 2$.*
4. Докажите данное утверждение аналитико-синтетическим методом: *Если в треугольнике проведены две биссектрисы и их отрезки от точки пересечения до вершин равны, то этот треугольник равнобедренный.*

Вариант 5

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание:
Четырехугольник является прямоугольником тогда, когда его диагонали равны.
б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх тогда, когда $a > 0$.*
2. Выполните логико-математический анализ теоремы о свойствах равнобедренного треугольника: *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

3. Решите задачу на доказательство векторным методом: Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Построен отрезок CC_1 ($C_1 \in AB$), перпендикулярный медиане AA_1 . Докажите, что $BC_1 : C_1A = 1 : 2$.

4. Докажите данное утверждение аналитико-синтетическим методом: Если окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и CB соответственно в точках K и D , то CD и AK - высоты треугольника ABC .

Вариант 6

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание: *Четырехугольник является параллелограммом тогда, когда две его стороны параллельны.*

б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вниз тогда, когда $a < 0$.*

2. Выполните логико-математический анализ теоремы о свойствах равнобедренного треугольника: *В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.*

3. Решите задачу на доказательство методом геометрических преобразований: Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Построен отрезок CC_1 ($C_1 \in AB$), перпендикулярный медиане AA_1 . Докажите, что $BC_1 : C_1A = 1 : 2$. (метод поворота)

4. Докажите данное утверждение методом “от противного”: *Если две различные прямые пересекаются, то их пересечение содержит одну и только одну точку.*

Вариант 7

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание: *Четырехугольник является параллелограммом тогда, когда две его противоположные стороны равны.*

б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание:
Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня, когда дискриминант $D>0$.

2. Выполните логико-математический анализ теоремы о свойствах равнобедренного треугольника: *В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.*

3. Решите задачу на доказательство методом координат: *Доказать, что прямая, проходящая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны.*

4. Докажите данное утверждение методом контрапозиции: *Если дробь $\frac{a-b}{a+b}$ несократима, то и дробь $\frac{a}{b}$ несократима.*

Вариант 8

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание:
Четырехугольник является квадратом тогда, когда все его углы прямые.

б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание:
Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней, когда дискриминант $D<0$.

2. Выполните логико-математический анализ теоремы о средней линии трапеции: *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

3. Решите задачу на доказательство векторным методом: *Если точка А пересечения диагоналей четырехугольника MNPQ и середины В,С его противоположных сторон MN и PQ лежат на одной прямой, то MNPQ – трапеция или параллелограмм..*

4. Докажите данное утверждение методом контрапозиции: *Если дробь $\frac{a+b}{a-b}$ несократима, то и дробь $\frac{a}{b}$ несократима.*

Вариант 9

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание:
Четырехугольник является квадратом тогда, когда все его стороны равны.
б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *Функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на всей области определения, если $k > 0$.*
2. Выполните логико-математический анализ теоремы о средней линии треугольника: *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.*
3. Решите задачу на доказательство координатным методом: *Доказать, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.*
4. Докажите данное утверждение синтетическим методом: *В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$. Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.*

Вариант 10

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание:
Параллелограмм является квадратом тогда, когда все его стороны равны.
б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *Функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на всей области определения, если $k < 0$.*
2. Выполните логико-математический анализ теоремы синусов: *Стороны треугольников пропорциональны синусам противолежащих углов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.*
3. Решите задачу на доказательство векторным методом: *В четырехугольнике ABCD $AD \perp BC$, $AB \perp CD$. Доказать, что диагонали четырехугольника AC и BD взаимно перпендикулярны.*

4. Докажите данное утверждение синтетическим методом:
Диагональ AC прямоугольника ABCD с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$. Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

Образец решения варианта контрольной работы

Вариант 0

1. а) Сформулируйте со словом “необходимо” следующее высказывание: *Две прямые пересекаются только тогда, когда они лежат в одной плоскости.*

б) Сформулируйте со словом “достаточно” следующее высказывание: *Фигуры равновелики тогда, когда они равны.*

Решение:

а) Для того, чтобы прямые пересекались, необходимо, чтобы они лежали в одной плоскости.

б) Для того, чтобы фигуры были равновелики, достаточно, чтобы они были равны.

2. Выполните логико-математический анализ теоремы Пифагора: *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Решение:

1. а). В теореме используется категорическая форма суждения.

б). Разъяснительная часть выделяется из условия и заключения теоремы путем установления природы объектов и их множеств, на которых рассматриваются условие и заключение. В данном случае разъяснительная часть состоит в том, что рассматривается прямоугольный треугольник – это условие теоремы. Заключение теоремы: “Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов”.

Теорема содержит одно условие и одно заключение, значит, является простой.

в). Обратное утверждение: Если в треугольнике квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник является прямоугольным. Данное утверждение – истинное.

г). Одной из теорем – обобщений для теоремы Пифагора является теорема косинусов: Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними ($a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$).

Справедлива и другая теорема – обобщение: Если на сторонах прямоугольного треугольника построить соответствующим образом подобные фигуры, то площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей фигур, построенных на катетах.

2. а). В теореме рассматриваются следующие понятия: прямоугольный треугольник, стороны прямоугольного треугольника, катет, гипотенуза.

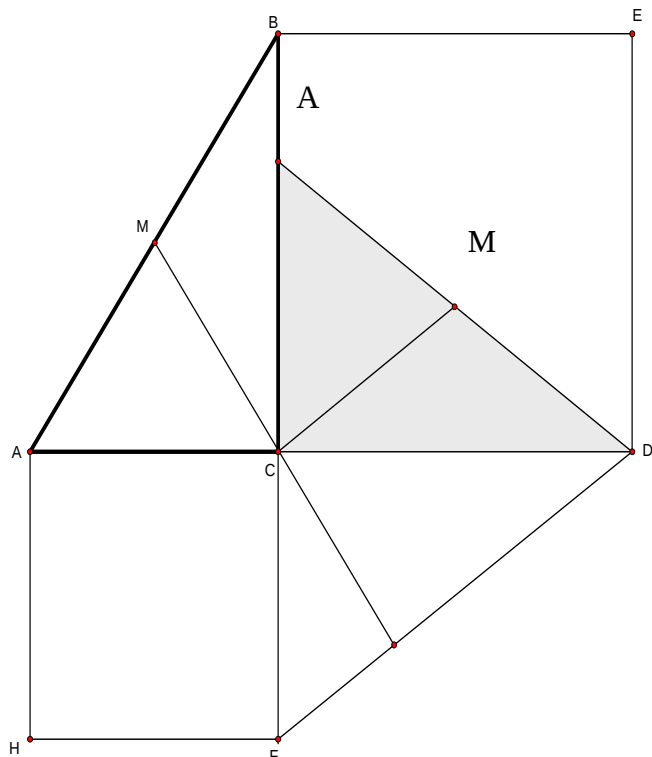
б). Данная теорема лежит в основе метрической части геометрии, в частности, на нее опирается вывод формулы расстояния между двумя точками, основное тригонометрическое тождество и т.д.

3. а). В учебнике геометрии Л.С. Атанасяна теорема доказывается синтетическим методом. При синтетическом методе доказательства теоремы цепочка силлогизмов строится так, что мысль движется от условия теоремы к заключению. К достоинствам синтетического метода следует отнести: сжатость, краткость, исчерпывающую полноту, логическую безупречность образца рассуждений. В методическом отношении синтетический метод имеет свои недостатки: для учащихся остается неясным, как можно найти такое доказательство, почему нужны те или иные дополнительные построения.

В учебнике сразу рассматривается общий случай доказательства.

б). Доказательство опирается на свойство площадей, на следствие первое о площади прямоугольного треугольника, на свойство равносильности уравнений.

3. Решить задачу на доказательство методом геометрических преобразований: В прямоугольном треугольнике ABC проведена медиана CM и на его катетах как на сторонах вне треугольника ABC построены квадраты $CBED$ и $ACFH$. Доказать, что $CM \perp DF$.



Доказательство:

Рассмотрим поворот вокруг точки C на угол 90° . $R_C^{90^\circ}: \triangle ABC \rightarrow \triangle A'CD$; $CM \rightarrow CM'$, M' - середина $A'D$. $AC = CA'$, но $AC = CF$, следовательно, C - середина $A'F$. Тогда CM' - средняя линия $\triangle A'FD$, следовательно, $CM' \parallel FD$.

Так как при повороте $R_C^{90^\circ}$ отрезок CM переходит в отрезок CM' , то $\angle MCM' = 90^\circ$, следовательно, $CM \perp CM'$, значит, $CM \perp FD$, что и требовалось доказать.

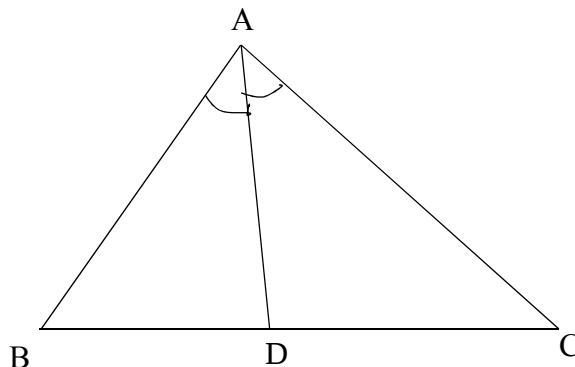
4. Докажите данное утверждение методом “от противного”: В разностороннем треугольнике биссектриса угла не перпендикулярна противоположащей стороне.

Доказательство:

Пусть дан треугольник ABC – разносторонний. Пусть AD – биссектриса треугольника, проведенная из вершины A . Предположим, что $AD \perp BC$.

Рассмотрим треугольники ABD и ACD .

$\angle BAD = \angle CAD$ (так как AD – биссектриса по условию)



$\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$ (так как $AD \perp BC$ по предположению)

Сторона AD – общая сторона треугольников ABD и ACD .

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам)

В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, $AB = AC$ и треугольник ABC – равнобедренный. Пришли к противоречию, т.к. по условию треугольник ABC – разносторонний, следовательно, наше предположение неверно и биссектриса AD не перпендикулярна BC .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Далингер В.А. Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем [Электронный ресурс] : учебное пособие для академического бакалавриата / В.А. Далингер — Электронные текстовые данные. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 338 с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/metodika-obucheniya-matematike-obuchenie-uchaschihsya-dokazatelstvu-teorem-441244#page/24> . — Загл. с экрана.
2. Игошин В.И. Математическая логика [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Игошин. — Электронные текстовые данные — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 399 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/539674> — Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Успенский, В.А. Простейшие примеры математических доказательств [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.А. Успенский. – Электронные текстовые данные. — Москва : МЦНМО, 2009. — 56 с.— Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9427> — Загл. с экрана.
2. Ястребов, А. В. Методика преподавания математики: теоремы и справочные материалы [Электронный ресурс]: учебное пособие для академического

бакалавриата / А. В. Ястребов, И. В. Сулова, Т. М. Корикова. —
Электронные текстовые данные. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. —
199 с. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/bcode/437266>.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ, СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПЛАТФОРМЫ

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - <http://www.mathnet.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - <http://www.window.edu.ru>.
3. Математическая логика и культура математических рассуждений / Лекториум - <https://www.lektorium.tv/course/28722>