Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра экономики и управления

М.А. Кречетова

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания по выполнению семестровой самостоятельной работы

для обучающихся по направлению подготовки
38.03.01 Экономика (все профили)

Очное обучение

Новокузнецк
2019

УДК 519.6.8
ББК 22.18(я73)
К 82

Кречетова М.А.

К83 Методы оптимальных решений [Текст]: метод. указ по выполнению семестровой самостоятельной работы по дисциплине для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 Экономика (все профили) очной формы обучения/ М.А. Кречетова; Новокузнец. ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2019. – 38 с.

Приводятся методические указания по выполнению семестровой работы по дисциплине «Методы оптимальных решений»: задания; требования к их выполнению; критерии оценивания заданий, решение типовых примеров по темам. Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов очной формы обучения, обучающихся по направлению 38.03.01 Экономика (все профили).

Рекомендовано
на заседании кафедры экономики и управления
«30» августа 2019 года.

Заведующий кафедрой
О. Н. Соина-Кутищева

Утверждено
методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
« 12 » сентября 2019 года.

Председатель методкомиссии ФИМЭ
____________________ Бойченко Г.Н.

Текст представлен в авторской редакции

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения дисциплины «Методы оптимальных решений» является подготовка специалистов, владеющих современной методологией поиска оптимальных решений в условиях ограниченных ресурсов при решении различных экономических задач, возникающих в рыночной экономике.

Учебная дисциплина "Методы оптимальных решений" является базовой для направлений 38.01.03 Экономика, формирующей навыки владения методологией поиска оптимальных решений для экономистов любого профиля. В современной экономике знание этой методологии является непременным условием принятия обоснованных управленческих решений. Оно позволяет определять наиболее оптимальные пути выбора управленческих решений при заданных условиях.

Цель настоящих методических указаний – дать студентам возможность углубить и закрепить полученные на лекциях и практических занятиях знания и навыки, а также научить их применять эти знания на практике при решении различных задач семестровой раборты самостоятельно.

Предлагаемые методические указания адресованы студентам очного отделения ВУЗов, обучающихся по направлениям 38.01.03 Экономика.

Методические указания содержат задания по основным темам курса, методические указания по их решению и примеры решения некоторых задач, требования к выполнению заданий семестровой работы.

1. Задания на семестровую работу

Задание 1. Графический метод решения задач линейного программирования.

1. Составить математическую модель по условию задачи.
2. Решить задачу геометрическим способом.
3. Сделать выводы.

Вариант 1. Фабрика выпускает продукцию двух видов: П1 и П2. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства этой продукции используются два исходных продукта – А, В. Расходы сырья А, В на 1 тыс. изделий П1 и П2 и их запасы приведены в таблице.

Исходный продукт	**Расход исходных продуктов на 1 тыс. изделий (т)**		**Максимально возможный запас (т)**
	П1	**П2**	
А	8	13	104
В	26	16	208
Цена, тыс. руб.	6	2	

Изучение рынка сбыта показало, что спрос на изделие П1 не более 6 тыс. шт. в сутки. Какое количество изделий (в тыс. шт.) каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Вариант 2. В торговом зале необходимо выставить для продажи товары T1 и T2. Рабочее время продавцов не превышает 340 часов, а площадь торгового зала, которую можно занять, не превышает 120 м^2. Каждая реализованная единица товара приносит прибыль соответственно в 80 и 50 руб. Нормы затрат ресурсов на единицу проданного товара составляют:

Ресурсы	**T1**	**T2**
Рабочее время, ч	0,4	0,6
Площадь, м^2	0,2	0,1

Найти оптимальную структуру товарооборота (сколько продавать товаров T1 и T2), обеспечивающую максимальную прибыль.

Вариант 3. Прядильная фабрика для производства 2 видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон и акрил.

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на 1 т пряжи**		**Количество сырья**
	Вид 1	**Вид 2**	
Шерсть	5	2	600
Капрон	1	4	620
Акрил	4	2	500
Прибыль от реализации пряжи	90	110	

Требуется составить оптимальный план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

Вариант 4. Для изготовления изделий A и B склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на одно изделие A расходуется 2 кг, а на изделие B - 1 кг металла. Укажите план производства, при котором обеспечена наибольшая прибыль, если изделий A требуется изготовить не более 30 штук, а изделий B - не более 40 штук, причем одно изделие A стоит 5 тыс. руб., а одно изделие B – 3 тыс. руб.

Вариант 5. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка "Колокольчик" и "Буратино". Для производства 100 л. "Колокольчика" требуется 4 ч. работы оборудования, а для "Буратино" – 1 ч. Расход специального ингредиента на 100 л составляет 1 кг на «Колокольчик» и 4 кг на «Буратино». Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг. специального ингредиента и 24 ч. работы оборудования. Прибыль от продажи 1 л. "Колокольчика" составляет 4 руб., а "Буратино" – 9 руб. Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальную прибыль от продажи.

Вариант 6. Магазин продает два вида безалкогольных напитков: Кока–Колу и квас. Доход от одной банки колы составляет 7 центов, а от кваса — 5 центов. В среднем магазин продает не более 500 банок обоих напитков ежедневно. Несмотря на то, что Кока-Кола известная торговая марка, покупатели предпочитают квас, поскольку они значительно дешевле и вкуснее. Отделом продаж определено, что объемы продаж колы и кваса в натуральном исчислении должны соотноситься не менее чем 1:2. Кроме того, известно, что магазин продает не более 100 банок колы в день. Как наилучшим образом спланировать руководству магазина запасы напитков в начале дня, чтобы получить максимальный доход?

Вариант 7. Фабрика выпускает два вида каш для завтрака ″Gruncy″ и ″Ghewy″. Используемые для производства обоих продуктов ингредиенты в основном одинаковы и, как правило, не являются дефицитными. Основным ограничением, накладываемым на объём выпуска, является наличие фонда рабочего времени в каждом из трёх цехов фабрики. Управляющему производством необходимо разработать план производства в месяц. В приведённой ниже таблице указаны общий фонд рабочего времени и число человеко-часов, требуемое для производства 1 т. продукта.

Цех	Необходимый фонд рабочего времени (чел.-ч./т)		Общий фонд рабочего времени (чел.-ч. в месяц)
	″Gruncy″	″Ghewy″	
A. Производство	10	4	1000
B. Добавка приправ	3	2	360
C. Упаковка	2	5	600

Доход от производства 1т. ″Gruncy″ составляет 150 у.е., а от производства ″Ghewy″ – 75 у.е. На настоящий момент нет никаких ограничений на возможные объёмы продаж. Имеется возможность продать всю произведённую продукцию. Требуется определить объёмы производства каш ″Gruncy″ и ″Ghewy″, максимизирующие общий доход фабрики за месяц.

Вариант 8. Швейная мастерская изготовляет простые и утепленные куртки и использует три вида сырья А,Б,С (см. таблицу). Реализация утепленной куртки дает предприятию 11 тыс. руб., а простой - 7 тыс. руб.

Цех	Затраты ткани на 1 куртку, м		Запас ткани, м
	Утепленные	Простые	
А. Нейлон	2	7	560
Б. флис	3	3	300
С. Синтепон	5	1	332

Составить оптимальный объем производства курток, чтобы предприятие получило максимальный доход.

Вариант 9. Предприятие выпускает два наименования товаров - А и В, для производства которых используется сырье трех видов. Известны нормы затрат сырья (по видам) на производство единицы каждого наименования, общее количество сырья каждого вида, которым обеспечено производство, размер запланированной прибыли от реализации единицы товара каждого вида (см. соответствующую таблицу). Необходимо составить план производства изделий А и В, обеспечивающий наибольшую прибыль от их реализации.

Виды сырья	Нормы расхода сырья		Запасы
	А	В	
1	4	1	240
2	2	3	180
3	1	5	251
Прибыль	40	30	

Вариант 10. Компания Bloomington Brewery производит пиво и эль. Пиво продается по цене \$5 за декалитр, а эль — \$2. Для производства одного декалитра пива необходимо 5 кг. зерна и 2 кг. хмеля, а для производства эля — 2 кг. зерна и 1 кг хмеля. В распоряжении компании имеется 60 кг. зерна и 25 кг. хмеля. Необходимо определить, каким образом оптимально распределить производство напитков, чтобы компания получила максимальную прибыль.

Задача 2.Симплексный метод решения задач линейного программирования.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

1. Составить математическую модель задачи (сформировать систему ограничений и целевую функцию);
2. Привести систему ограничений к каноническому виду, обозначив и введя дополнительные переменные;
3. Построить симплексную таблицу и заполнить её первоначальным опорным планом;
4. Пользуясь алгоритмом симплексного метода, найти оптимальное решение задачи;
5. Сделать выводы.
6. Составить двойственную задачу, решить ее на основе теорем двойственности.

Вариант 1

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Вариант 2.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

Вариант 3.

Тип Сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	Б	В	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Цена	10	14	12	

Вариант 4.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Цена изделия	5	7	3	8	

Вариант 5.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции			Запасы
	I вид	II вид	III вид	
Труд	1	4	3	200
Сырье	1	1	2	80
Оборудование	1	1	2	140
Цена	40	60	80	

Вариант 6.

Сырье	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции			Запасы сырья
	А	Б	В	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена	9	10	16	

Вариант 7.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции			Запасы
	I вид	II вид	III вид	
Труд	3	6	4	2000
Сырье	10	15	20	2400
Оборудование	0	3	5	1500
Цена	6	10	9	

Вариант 8.

Тип оборудования	Нормы расхода сырья на одно изделие				Общий фонд раб. времени
	А	Б	В	Г	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

Вариант 9.

Сырье	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции			Запасы Сырья, кг.
	А	Б	В	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Цена	3	2	5	

Вариант 10.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Цена изделия	7,5	3	6	12	

Задание 3. Транспортная задача

В ***m*** заводах имеется однородный запас продукции в количествах $a_1, a_2, ..., a_m$. Этот груз нужно перевести ***n*** потребителям, заказы которых равны $b_1, b_2, ..., b_n$. Стоимость перевозки единицы груза из i – го завода j – ому потребителю равна c_{ij} (таблица 3). Требуется составить план перевозки груза с заводов потребителям, при котором суммарные расходы на перевозку будут ***минимальными***.

Таблица 3

		Заказы потребителей, ед.			
Запасы продукции, ед.		***B₁***	***B₂***	***B₃***	***B₄***
		b_1	b_2	b_3	b_4
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
A_3	a_3	c_{32}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

Исходные данные по вариантам заданий указаны в таблице 4.

Таблица 4

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a_1	700	600	300	200	500	800	200	250	600	900
a_2	300	400	500	500	600	300	500	450	350	300
a_3	600	700	1000	300	800	500	500	300	750	600
b_1	350	400	500	350	500	450	150	200	300	400
b_2	350	300	550	150	400	250	400	300	500	550
b_3	250	800	400	150	650	350	300	150	450	350
b_4	650	200	450	250	350	550	550	350	450	500
c_{11}	7	4	4	2	5	3	5	9	7	3
c_{12}	8	40	5	4	2	8	4	3	5	6
c_{13}	7	6	7	3	3	5	2	4	9	4
c_{14}	9	8	9	7	4	4	8	6	3	9

c_{21}	8	5	7	6	7	9	3	3	8	2
c_{22}	5	7	4	8	8	3	2	2	4	5
c_{23}	3	3	9	4	6	7	5	5	3	8
c_{24}	8	9	7	2	5	6	9	3	12	4
c_{31}	7	4	8	9	6	4	6	4	8	3
c_{32}	4	8	2	5	9	8	2	7	4	7
c_{33}	3	6	3	3	7	7	5	9	6	4
c_{34}	7	2	8	8	2	5	7	6	7	9

План решения задачи:

1. Выбрать из таблицы 4 исходные данные своего варианта.
2. Начертить матрицу транспортной задачи, проверить ее на закрытость. Если задача открытая, то привести ее к закрытой, добавив в матрицу задачи фиктивного поставщика, или покупателя.
3. Записать в матрицу транспортной задачи первый базовый опорный план, пользуясь одним из известных вам способов построения опорного плана (способ северо-западного угла, наименьшей стоимости, двойного предпочтения).
4. Проверить построенный опорный план на вырожденность. Если опорный план вырожденный, принять меры для преодоления вырожденности опорного плана.
5. Рассчитать значение целевой функции для базового опорного плана.
6. По правилам метода потенциалов рассчитать потенциалы строк и столбцов.
7. Используя найденные потенциалы, проверить построенный опорный план на оптимальность.
8. Если решение оптимальное перейти к пункту 12.
9. Если решение неоптимальное, его нужно улучшить. Для этого надо найти клетку матрицы транспортной задачи, подлежащую улучшению, построить для неё замкнутый цикл, определить объём ресурсов для перемещения по вершинам этого цикла.
10. Выполнить перемещение ресурсов по вершинам цикла, не нарушая баланса по строкам и столбцам матрицы тарифов.
11. Перейти к пункту 5-7.
12. Выписать оптимальное решение и сделать выводы.

Задание 4. Теория игр

Задача 4.1 Решить игру 2*2 (по своему варианту):

- В чистых стратегиях (при наличии седловой точки),
- В смешанных стратегиях (при отсутствии седловой точки) аналитическим методом.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ 7. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. 9. $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix}$. 10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}$.

Задача 4.2 Решить игру m*n (по своему варианту):

- В чистых стратегиях, найдя нижнюю и верхнюю цену игры (при наличии седловой точки);
- Проверить можно ли упростить платежную матрицу за счет доминирующих строк и столбцов;
- При отсутствии седловой точки решить игру в смешанных стратегиях графически (при условии упрощения матрицы), или путем линейного сведения игры к ЗЛП (симплекс-методу) при невозможности упростить платежную матрицу

1. $A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 3\\ 6 & 7 & 4\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 4\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 9 & 11 & 10\end{pmatrix}$ 4. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 0 & 5 & 4\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 7\end{pmatrix}$ 6. $A=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 8 & 5 & 9\\ 7 & 7 & 8\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 7 & 6\end{pmatrix}$ 8. $A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 3\\ 6 & 7 & 4\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}4 & 9 & 5 & 3\\ 9 & 8 & 4 & 9\\ 7 & 4 & 2 & 6\\ 8 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$ 10. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 5 & 3\\ 4 & 1 & 3 & 4\\ & & & \end{pmatrix}$

4.3 Найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей графическим методом.

При этом **с 1-го по 5-й вариант** выполнения работ принять платежную матрицу вида

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}$$

с **6-го по 10-й вариант** — вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

Таблица 5. Значения коэффициентов платежных матриц

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a_{11}	3	4	2	5	4	4	3	4	3	-2
a_{12}	4	3	5	4	3	7	2	1	4	3
a_{13}	5	2	3	3	6	-	-	-	-	-
a_{14}	2	3	4	7	4	-	-	-	-	-
a_{21}	7	5	3	4	5	9	4	2	2	4
a_{22}	6	2	2	2	6	3	-1	3	3	2
a_{23}	4	6	5	5	4	-	-	-	-	-
a_{24}	8	1	3	4	7	-	-	-	-	-
a_{31}	-	-	-	-	-	5	5	**-1**	5	3
a_{32}	-	-	-	-	-	9	3	2	3	5
a_{41}	-	-	-	-	-	6	2	3	4	2
a_{42}	-	-	-	-	-	9	4	5	**2**	4

Задача 4.4 Игры с природой в условиях неопределенности.

Фирма планирует реализацию своей продукции на рынках, учитывая возможные варианты покупательского спроса Пj, $j=\overline{1,4}$ (низкий, средний, высокий, очень высокий). На предприятии разработано три стратегии сбыта товаров A_1, A_2, A_3. Объем товарооборота (тыс. руб.), зависящий от стратегии и покупательского спроса, представлен в таблице.

A_j	$П_j$			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	30 +N	10	20	25 + N/2
A_2	50	70 - N	10 + N/2	25
A_3	25 – N/2	35	40	60 - N

где N= последняя цифра номера студента в списке.

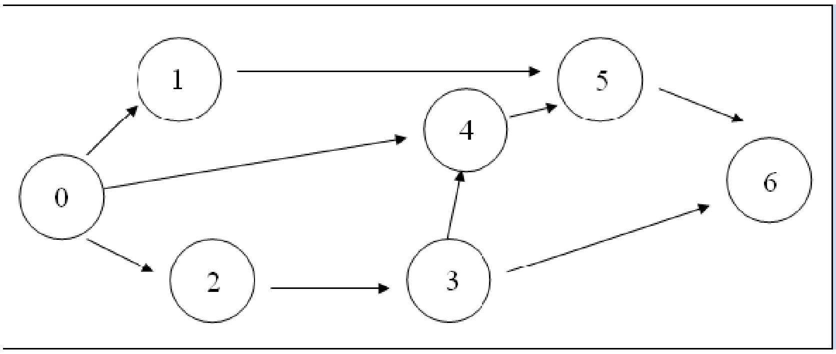
Известны вероятности возможных состояний покупательского спроса, которые соответственно равны q_1=0,3, q_2=0,2, q_3=0,4, q_4=0,1.
Определить стратегию сбыта, максимизирующую средний товарооборот фирмы. При этом использовать критерии Максимакса, Вальда, Гурвица, Сэвиджа, Байеса. Сделать выводы.

Задание 5. Сетевые графики

Задача 1. Пусть необходимо выполнить **комплекс взаимосвязанных работ** проекта. Используя данные вариантов задания, постройте ***сетевой график, найдите критический путь, посчитайте критическое время выполнения комплекса работ и другие временные характеристики сетевого графика.*** Исходные данные представлены по вариантам. Сделайте выводы.

Порядок работ и значения коэффициентов условия задачи

Варианты 1-2



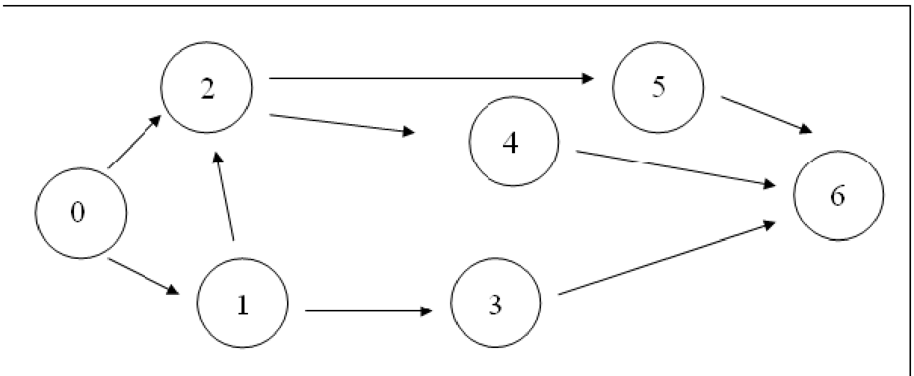
Вариант 1

Дуги	(0;1)	(0;2)	(0;4)	(1;5)	(2;3)	(3;4)	(3;6)	(4;5)	(5;6)
t_{ij}	6	10	16	12	4	2	10	2	2

Вариант 2

Дуги	(0;1)	(0;2)	(0;4)	(1;5)	(2;3)	(3;4)	(3;6)	(4;5)	(5;6)
t_{ij}	7	3	6	10	1	2	16	11	5

Варианты 3-4



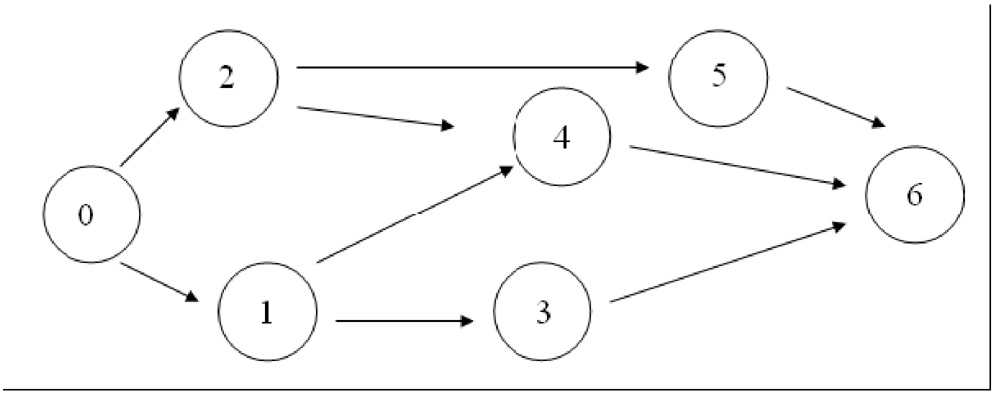
Вариант 3

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;2)	(1;3)	(2;4)	(2;5)	(3;6)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	4	10	3	6	4	7	6	5	2

Вариант 4

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;2)	(1;3)	(2;4)	(2;5)	(3;6)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	8	10	7	5	3	6	10	5	2

Варианты 5-7



Вариант 5

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;3)	(1;4)	(2;4)	(2;5)	(3;6)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	7	8	5	4	7	8	9	10	9

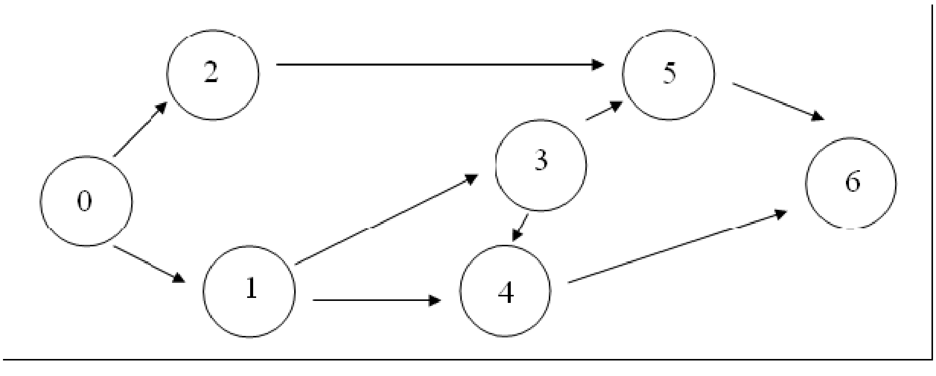
Вариант 6

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;3)	(1;4)	(2;4)	(2;5)	(3;6)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	5	6	6	7	4	6	6	5	3

Вариант 7

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;3)	(1;4)	(2;4)	(2;5)	(3;6)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	2	3	2	3	8	1	7	5	4

Варианты 8-10



Вариант 8

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;4)	(1;3)	(2;5)	(3;4)	(3;5)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	5	11	4	10	6	6	4	16	10

Вариант 9

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;4)	(1;3)	(2;5)	(3;4)	(3;5)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	3	8	2	10	8	8	5	7	10

Вариант 10

Дуги	(0;1)	(0;2)	(1;4)	(1;3)	(2;5)	(3;4)	(3;5)	(4;6)	(5;6)
t_{ij}	11	8	6	11	10	5	1	11	10

Задача 2. Имеется проект разработки изделия с определенным комплексом взаимосвязанных работ. Составить сетевой график выполнения проекта и рассчитать критический путь и наименьший путь.

Таблица 6 Содержание работ

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолжительность, дн.
Исходные данные на изделие	a_1		t_1
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_2
Выпуск документации	a_3	a_1	t_3
Изготовление деталей	a_4	a_3	t_4
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_5
Сборка изделия	a_6	a_4,a_5	t_6
Выпуск документации на испытание	a_7	a_3	t_7
Испытание и приемка изделия	a_8	a_6,a_7	t_8

Таблица 7. Значения продолжительности работ по вариантам задачи

№ варианта	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
Значения										
t_1	30	33	36	35	25	20	15	30	25	20
t_2	7	9	8	6	8	11	10	5	9	7
t_3	15	17	18	14	16	20	12	13	20	19
t_4	35	33	32	34	31	35	30	37	39	38
t_5	25	24	21	20	22	23	26	25	18	21
t_6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
t_7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
t_8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20

Задания 6 по СМО

Задача. Для каждой из следующих ситуаций определить к какому классу относится объект СМО. *При определении класса СМО используйте следующие сокращения и размерности:*

ОО – одноканальная с отказами;
МО – многоканальная с отказами;
ООО – одноканальная с ограниченной очередью;
ОНО - одноканальная с неограниченной очередью;
МОО – многоканальная с ограниченной очередью;
МНО - многоканальная с неограниченной очередью.

Обозначьте исходные данные по условию задачи:

- число каналов n;
- число мест ожидания m (для СМО с ограниченной очередью);
- интенсивность потока заявок λ;
- среднее время обслуживания одной заявки t (часах, мин., долях часа);
- интенсивность потока обслуживания $\mu = 60(24)(1)/t$, *(60 - если время задано в минутах; 24 - если время задано в целых часах; 1- если время обслуживания задано в долях часа);*
- интенсивность загрузки системы $\rho = \lambda / \mu$;

Рассчитайте показатели эффективности СМО. Сделайте выводы.

1. В типографию с тремя множительными аппаратами поступают заказы от соседних предприятий на размножение рабочей документации. Если все аппараты заняты, то вновь поступающий заказ не принимается. Среднее время работы с одним заказом составляет 2 часа. Интенсивность потока заявок λ=0,75 в час. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы типографии.

2. На автозаправочной станции установлены 3 колонки для заправки машин бензином. Около станции находится площадка на 3 автомобиля для ожидания заправки. В среднем на станцию прибывает одна машина в 4 минуты. Среднее время обслуживания одной машины 3 мин. Определить характеристики работы автозаправочной станции.

3. На строительную площадку в среднем через 40 мин прибывают автомашины со строительным материалом. Среднее время разгрузки одной автомашины составляет 1,8 часа. В разгрузке принимают участие две бригады грузчиков. На территории строительной площадки могут находиться в очереди на разгрузку не более 5 автомашин. Определить показатели эффективности работы строительной площадки.

4. На автомойку, имеющую три рабочих места, в среднем в час приезжают 12 автомашин. Если в очереди уже находится 6 автомашин, вновь приезжающие клиенты не встают в очередь, а покидают автомойку. Среднее время мойки автомашины 20 мин. Средняя стоимость мойки 250 руб. Определить показатели эффективности работы автомойки и среднюю величину потери выручки в течение рабочего дня (с 9 до 19 часов), т.е. от необслуженных за это время машин.

5. В мастерской по ремонту обуви в понедельник работает только один мастер, который выполняет заказ в среднем за 25 мин. Клиенты заходят в мастерскую в среднем каждые 35 мин и, если мастер занят, то уходят. Определить характеристики работы обувной мастерской и отношение «заработанные деньги/не заработанные деньги», если средняя стоимость ремонта составляет 200 руб.

6. Сберкасса принимает оплату за ЖКХ с жителей микрорайона и имеет для этого в штате три контролера-кассира. Поток жителей идет с интенсивностью 50 чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания одного человека контролером-кассиром составляет 3 мин. Предполагается, что в помещении сберкассы не может находиться более 8 человек, включая и тех, что обслуживаются. Поэтому вновь прибывший клиент уходит, если очередь заполнена. Определить характеристики работы сберкассы, каким образом можно улучшить работу?

7. В справочную ж/д вокзалов поступают телефонные запросы по движению поездов с интенсивностью 80 заявок в час. Оператор справочной обрабатывает запрос в течение 0,7 мин. Если оператор занят, клиенту выдается сообщение «Ждите ответа», запрос становится в очередь, длина которой не превышает 4 запросов. Дайте оценку работы справочной. Как можно реорганизовать работу справочной?

8. В грузовой речной порт поступает в среднем 5 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 ч. Краны работают круглосуточно. Ожидающие обслуживания сухогрузы стоят на рейде и ждут разгрузки. Определить показатели эффективности данной СМО.

9. На автозаправочной станции установлены 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем одна машина в 3 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 2 мин. Определить характеристики СМО.

10. В парикмахерской работают четыре мастера, каждый из которых выполняет заказ в среднем за 20 мин. Клиенты заходят в парикмахерскую в среднем каждые 25 мин и, если мастера заняты, то уходят. Определить характеристики работы данной парикмахерской и отношение «заработанные деньги/ не заработанные деньги», если средняя стоимость стрижки 250 руб.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

2.1 Методические указания по выбору варианта работы

Контрольная работа представлена в десяти вариантах, номер варианта определяется по ***последней цифре*** в списке студентов в группе. Приступая к выполнению заданий семестровой работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями, изучить литературу.

2.2 Требования по выполнению заданий семестровой работы

1. Каждое задание должно быть выполнено и представлено в срок, установленный преподавателем.

2. Задачи нужно решать в том порядке, в каком они даны в задании.
3. Решение задач следует сопровождать необходимыми формулами, развернутыми расчетами и пояснениями.
4. В конце решения каждой задачи необходимо четко сформулировать выводы. Без вывода задача считается нерешенной.
5. Страницы каждого задания должны быть пронумерованы, и иметь достаточно широкие поля для замечаний и исправлений (дополнений), вносимых студентом после проверки.
6. Выполненная работа сдается на проверку преподавателю. Удовлетворительно выполненная работа оценивается на определенное количество баллов (таблица 8). Минимальное количество баллов за все работы 25, максимальное 40. Правильное выполнение каждой задачи с подробными выводами оценивается максимальным количеством баллов, решение с недочетами меньшим количеством баллов. Если работа выполнена неудовлетворительно, то она возвращается студенту для доработки.

Таблица 8 . Критерии оценивания

Критерии оценивания	Баллов за 1 задачу	
	Мин.	Макс.
Задача 1	3	5
Задача 2	5	8
Задачи 3	5	8
Задача 4	5	8
Задача 5	4	6
Задача 6	3	5
Итого	**25**	**40**

2.3 Решение типовых заданий по темам

2.3.1 Графический метод решения

Пример 1. На заводе имеются запасы трех видов сырья: S_1, S_2 и S_3, из которого можно наладить производство двух видов товаров: T_1 и T_2. Запасы сырья, норма его расхода на производство единицы товаров, а также прибыль от реализации единицы каждого товара приведены в таблице 7 (цифры условные).

Таблица 7.

Сырье / Товары	S_1	S_2	S_3	Прибыль, долл.
T_1	3	1	1	25
T_2	3	2	4	34
Запасы	126	48	72	

Необходимо составить такой план производства товаров, при котором прибыль от их реализации будет максимальной.

Решение:

План производства зададим переменными x_1 и x_2, где x_i – количество единиц товара T_i, которое следует произвести $(i=1,2)$. Неизвестные x_1 и x_2 должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2\le 126 \\ x_1+2x_2\le 48 \\ x_1+4x_2\le 72 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1+x_2\le 42 \\ x_1+2x_2\le 48, \\ x_1+4x_2\le 72 \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

Поясним смысл первого неравенства системы (13). В левой части записано количество сырья S_1, которое расходуется на выпуск x_1 единиц товара T_1 и x_2 единиц товара T_2. Это количество не должно превышать запас имеющегося запаса сырья S_1, т. е. 126 единиц. Аналогичный смысл имеют второе и третье неравенства системы (1).

Прибыль, предприятия от реализации плана (x_1, x_2) производства товаров, очевидно, составит (целевая функция):

$$Z=25x_1+34x_2.$$

В интересах предприятия максимизировать эту прибыль. Следовательно, чтобы составить план производства товаров, при котором прибыль от их реализации будет максимальной нужно решить стандартную ЗЛП: $F=25x_1+34x_2\to\max$ при условиях (1):

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 42 \\ x_1+2x_2\le 48 \\ x_1+4x_2\le 72 \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

Условия неотрицательности переменных $x_1\ge 0$ и $x_2\ge 0$ показывают, что пространство допустимых решений будет лежать в первом квадранте. Каждому из ограничений на плоскости Ox_1x_2 соответствует полуплоскость. Пересечение этих полуплоскостей образует пространство допустимых решений — многоугольник решений.

Построим многоугольник решений. С этой целью запишем уравнения границ полуплоскостей в виде

$$\begin{cases} x_1+x_2=42 \\ x_1+2x_2=48 \\ x_1+4x_2=72 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{42}+\dfrac{x_2}{42}=1 \quad (L_1) \\ \dfrac{x_1}{48}+\dfrac{x_2}{24}=1 \quad (L_2) \\ \dfrac{x_1}{72}+\dfrac{x_2}{18}=1 \quad (L_3) \end{cases}$$

«Пробная» точка $O(0;0)$ удовлетворяет всем неравенствам и потому многоугольник решений $OA_1A_2A_3A_4$ расположен в нижних полуплоскостях, порожденных прямыми L_1, L_2

и L_3 как показано на рис. 1. Построим вектор градиента g = (25;34), который показывает направление скорейшего возрастания целевой функции.

Построим линию уровня, z =0, проходящую перпендикулярно вектору градиента через начало координат. Будем переносить параллельно линию уровня вдоль вектора градиента до пересечения с граничными точками многоугольника решений. Последней точкой встречи линии уровня с многоугольником решений будет точка A_3 (см. рис.3) . Эта точка является оптимальной. Найдем ее координаты как пересечение прямых L_1 и L_2, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 42 & (L_1) \\ x_1 + 2x_2 = 48 & (L_2) \end{cases}$$

Координаты точки А3 равны (36; 6).

Подставив координаты точки A_3 в целевую функцию, найдем

$$Z_{\max} = 25 \cdot 36 + 34 \cdot 6 = 1104$$

Вывод: Таким образом, для получения предприятием максимальной прибыли от продажи товаров равной 1104 долл., необходимо производить оптимально 36 ед. товара Т1 и 6 единиц товара Т2.

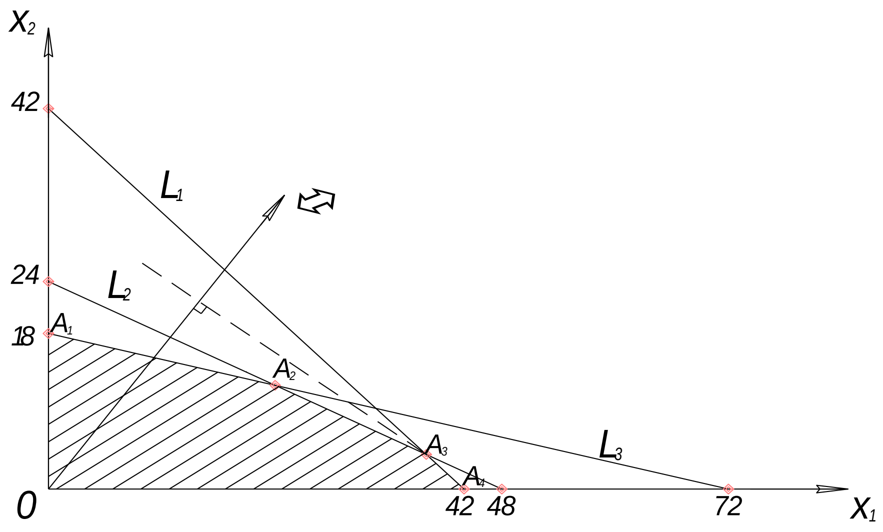


Рис. 1. Многоугольник решений.

2.3.2 Пример решения ЗЛП симплекс-методом

Задача 2. При изготовления изделия А и В предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия А, требуется 2 единицы сырья первого вида и 2 единицы – второго, а на производство одного изделия В соответственно 3 единицы первого, 1 единица второго и 3 единицы третьего. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 19 единиц, второго - 13 единиц и третьего - 15 .Производство одного изделия А дает предприятию 7 млн. руб. прибыли, а изделие В – 5 млн. руб. прибыли. Составить план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

Решение:

Сведения из задачи о количестве ресурсов, необходимых для производства единицы каждого товара, обеспеченности предприятия этими ресурсами и размерах прибыли, данной каждым из товаров представим в виде следующей таблицы 9:

Таблица 9. Распределение ресурсов

Ресурсы	Товары A	B	Запас ресурсов
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
Прибыль	7	5	

Составим план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

Обозначим через x_1 и x_2 запланированный объем производства товаров А и В. Из экономического смысла величин x_1 и x_2 следует, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Тогда, учитывая количество единиц ресурсов, затрачиваемых при производстве товаров А и В, а также запасы этих ресурсов, получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + \ x_2 \leq 13, \\ 3x_2 \leq 15. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

При этом реализация товаров А и В дает прибыль:

$$z = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

Функция z - называется целевой функцией, которая совместно с описанной выше системой ограничений представляет собой математическую модель приведенной задачи. Решим ее симплекс-методом.

В начале приведем нашу задачу к канонической форме. Для этого от системы неравенств перейдем к системе линейных уравнений, введя дополнительные переменные : x_3, x_4, x_5, экономический смысл которых заключается в том, что это остатки ресурсов при производстве товаров А и В. В итоге получим следующую задачу:

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + \ x_2 + x_4 = 13 \\ \qquad 3x_2 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Проведем решение с помощью симплексных таблиц. Первая симплексная таблица имеет вид:

Таблица 10. Первый опорный план

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_3	2	3	1	0	0	19	19/2
x_4	**2**	1	0	1	0	13	13/2
x_5	0	3	0	0	1	15	-
Z	-7	-5	0	0	0	0	

Здесь x_3, x_4, x_5 - базисные переменные (именно в этом порядке столбцы образуют единичный базис) и заполняют столбец "базис" нашей симплексной таблицы. А переменные x_1 и x_2 - свободные. Вектор x^1= (0,0,19,13,15), является начальным решением нашей исходной задачи (свободные переменные раны 0, а базисные равны правым частям системы уравнений). Значение целевой функции на этом плане - $f(x^1)$=0.

Сформулируем *правило заполнения последней строки, которая называется проверочной.* В проверочной строке записываются коэффициенты целевой функции с противоположным знаком (эти числа называются оценками опорного плана), и ее значение (в столбце b).

Решение задачи начинается с анализа проверочной строки. Наличие отрицательных оценок δ_1= -7 и δ_2= -5 означает, что этот опорный план - x^1 не является оптимальным. Выбор минимальной из отрицательных оценок, которой в нашем случае будет δ_1= -7 позволяет определить разрешающий столбец - A^1 и переменную - x_1, которую будем вводить в базис, а выбор минимальной из оценок b_i/a_{1j} , которой будет $\min\{19/2, 13/2\} = 13/2$ позволяет определить разрешающую строку A_2 и переменную x_4, которую выведем из базиса, для того чтобы получить новый опорный план. На пересечении выделенных серым цветом в таблице 1 разрешающего столбца - A^1 и разрешающей строки A_2 находится разрешающий элемент РЭ = 2. Далее для перехода к новой симлекс-таблице (новому базису) применяется способ элементарных преобразований метода, в результате чего происходит вычисление новых оценок.

Разрешающая строка переносится в новую симплекс таблицу, при этом каждый ее элемент делится на разрешающий элемент, в нашем случае равный 2. В колонке «базис» в данной разрешающей строке вместо базисной переменной x_4, появляется свободная переменная x_1 из разрешающего столбца первой симплекс таблицы. Все остальные элементы первой симлекс-таблицы пересчитываются по правилу прямоугольника. Пересчет всех элементов по данному правилу позволяет получить в разрешающем столбце новой симлекс-таблицы все элементы кроме разрешающего равными 0.

<u>Правило прямоугольника</u>

НЭ = СТЭ – (А*В / РЭ), где СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

$$\begin{tikzcd} \text{СТЭ} \arrow[r, no head] \arrow[d, no head] & \text{В} \arrow[d, no head] \arrow[dl, no head] \\ \text{А} \arrow[r, no head] & \textbf{РЭ} \end{tikzcd}$$

После проведения всех расчетов получаем следующую симлекс-таблицу 11. Строка 3 в первой симлекс-таблице не пересчитывается, так как в разрешающем столбце уже есть значение 0. Она переносится в новую симлекс-таблицу в том же виде:

Таблица 11. Второй опорный план

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_3	0	**2**	1	-1	0	6	$6/2=3$
x_1	1	0,5	0	1/2	0	6,5	6,5/0,5 =13
x_5	0	3	0	0	1	15	$15/3=5$
Z	0	-3/2	0	7/2	0	91/2	

Составляем новый опорный план, по значениям свободных и базисных переменных и столбцу b. Если в данном столбце нет отрицательных значений, то он не вырожденный. Новый опорный план x^2=(6,5; 0, 6, 0, 15) невырожденный, но и неоптимальный, так в последней строке симплексной таблицы 9 имеется отрицательная оценка $\delta_2=-3/2$. Значение целевой функции на этом плане z = 91/2 = 45,5. Так как новый опорный план не оптимален, то необходимо получить новый опорный план, пересчитав эту симлекс-таблицу. Выбираем опять разрешающий столбец и разрешающую строку. Разрешающим будет столбец, где есть отрицательная оценка в проверочной строке, А разрешающая строка определяется минимальным соотношением b_i/a_{ij} .

Из анализа таблицы 9 следует, что новой базисной переменной нужно сделать x_2. А сравнивая отношения b_1/a_{12}=3, $b_2/a_{22}=13$ и b_3/a_{32}=5, заключаем, что из базиса нужно вывести переменную x_3. Разрешающий элемент в данной таблице РЭ= 2. Переносим разрешающую строку в новую симлекс-таблицу, разделив все элементы на РЭ. Остальные пересчитываем по правилу прямоугольника. Очередная симлекс-таблица после пересчета будет иметь вид:

Таблица 12. Третий опорный план

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	3	
x_1	1	0	-1/4	3/4	0	5	
x_5	0	0	-3/2	3/2	1	6	
Z	0	0	3/4	11/4	0	50	

Третий опорный план x^3=(5,3,0,0,6) – является оптимальным, так как отрицательных оценок в нижней проверочной строке таблицы больше нет. Так как нулевых оценок в столбцах свободных переменных (на данном опорном плане это - x_3 и x_4) нет, то найденное оптимальное решение единственное. Оптимальное значение целевой функции $f^{opt} = f(x^3) = 50$.

Вывод: Следовательно оптимальным планом, дающим максимальную прибыль в 50 единиц является производство 5 единиц товара А и 3 единиц товара В, при этом останется не использованным запас третьего ресурса в размере 6 ед.

2.3.3 Пример решения транспортной задачи

Задача 3. В трех хранилищах A_1, A_2, A_3 имеется соответственно 70, 90, и 50 т топлива. Требуется спланировать перевозку топлива четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, спрос которых равен соответственно 50, 70, 40 и 40 т так, чтобы затраты на транспортировку были минимальными. Стоимость перевозки 1т (в усл. ден. ед.) указана в таблице 13.

Таблица 13.

Хранилища	**Потребители**				**Запас топлива, т**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	6	70
A_2	4	3	5	1	90
A_3	2	4	1	5	50
Потребность в топливе, т	50	80	40	40	210

Решение. Прежде, чем решать транспортную задачу необходимо проверить ***условие баланса*** $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 210$. Поскольку запасы топлива в хранилищах равны спросу потребителей, имеем задачу закрытого типа.

Первым этапом решения является нахождение начального опорного плана методом «минимального элемента». Груз распределяется, начиная с загрузки клетки с минимальным значением тарифа. При этом в клетку записывается максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен.

Итак, в распределительной таблице записан исходный опорный план (таблица 14):

Таблица 14.

Хранилища	Потребители				Запас топлива, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 *40*	4 *30*	3	6	70
A_2	4	3 *50*	5	1 *40*	90

A3	2 *10*	4	1 *40*	5	50
Потребность в топливе, т	50	80	40	40	210

$$\text{или } x^0 = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 40 & 0 \end{bmatrix}.$$

Начальный опорный план, найденный методом «минимального элемента» имеет количество занятых клеток ровно m+n-1=6, поэтому является невырожденным.

Минимальные транспортные издержки для этого плана:

$$F(x^0) = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = 570 \text{ (усл.ед.)}$$

Вторым этапом решения является проверка на оптимальность допустимого плана методом потенциалов: каждому поставщику поставим в соответствие потенциал $u_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, а каждому потребителю потенциал $v_j \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Для каждой занятой клетки будет соответствовать уравнение: $u_i + v_j = c_{ij}$,

где $u_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ - потенциалы поставщиков;

$v_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ - потенциалы потребителей.

Потенциалы строк и столбцов для начального опорного плана, найденного методом «минимального элемента» найдем из решения системы:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5; \\ u_1 + v_2 = 4; \\ u_2 + v_2 = 3; \\ u_2 + v_4 = 1; \\ u_3 + v_1 = 2; \\ u_3 + v_3 = 1. \end{cases}$$

Система линейно-зависимая, для нахождения одного из решений придадим одному из потенциалов числовое значение (лучше 0), например $u_1 = 0$, тогда

$v_1 = 5,\ v_2 = 4,\ u_2 = -1,\ v_4 = 2,\ u_3 = -3,\ v_3 = 4.$

Для исследования плана на оптимальность для каждой свободной клетки считаем оценки:

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j);$$

$$s_{13} = 3 - (0 + 4) = -1;$$
$$s_{14} = 6 - (0 + 2) = 4;$$
$$s_{21} = 4 - (-1 + 5) = 0;$$
$$s_{23} = 5 - (-1 + 4) = 2;$$
$$s_{32} = 4 - (-3 + 4) = 3;$$
$$s_{34} = 5 - (-3 + 2) = 6.$$

Так как оценка $s_{13} < 0$, то найденный план не оптимален. Его можно улучшить с помощью цикла пересчета. Составим цикл пересчета относительно клетки (A_1B_3) (таблица 15).

$$\begin{array}{ccc} A_1B_1(-) & \rightarrow & A_1B_3(+) \\ \uparrow & & \downarrow \\ A_3B_1(+) & \leftarrow & A_3B_3(-) \end{array}$$

Таблица 15.

Хранилища	Потребители				Запас топлива, т	
	B1	B2	B3	B4		
A1	5 *40 -*	4 *20*	3 +	6	70	$u_1 = 0$
A2	4	3 *50*	5	1 *40*	90	$u_2 = -1$
A3	2 *10 +*	4	1 *40 -*	5	50	$u_3 = -3$
Потребность в топливе, т	50	70	40	40	210	
	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$		

Из клеток, помеченных «-» выбираем наименьшее количество груза (40) и будем его прибавлять к клеткам, помеченным «+» и вычитать из клеток, помеченных « - », получим следующий план перевозок (таблица 16).

Таблица 16.

Хранилища	Потребители				Запас топлива, т	
	B1	B2	B3	B4		
A1	5 *0*	4 *20*	3 *40*	6	70	$u_1 = 0$
A2	4	3 *50*	5	1 *40*	90	$u_2 = -1$
A3	2 *50*	4	1	5	50	$u_3 = -3$
Потребность в топливе, т	50	70	40	40	210	
	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$		

Полученный опорный план является вырожденным, т.к. число заполненных клеток равно 5<m+n-1=6. Для преодоления вырожденности плана, поставим ноль в любую пустую клетку, например в клетку (A_1B_1). Проверим его на оптимальность, для этого найдем потенциалы строк и столбцов из решения системы:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5 \\ u_1 + v_2 = 4 \\ u_1 + v_3 = 3 \\ u_2 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_4 = 1 \\ u_3 + v_1 = 2. \end{cases}$$

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_1 = 5,\ v_2 = 4,\ v_3 = 3,\ v_5 = 0,\ u_2 = -1,\ v_4 = 2,\ u_3 = -3.$

Определим оценки свободных клеток:

$s_{14} = 6 - (0 + 2) = 4;$

$s_{21} = 4 - (-1 + 5) = 0;$ $s_{32} = 4 - (-3 + 4) = 3;$ $s_{34} = 5 - (-3 + 2) = 6.$

$s_{23} = 5 - (-1 + 3) = 3;$ $s_{33} = 1 - (-3 + 3) = 1;$

Так как все оценки неотрицательны, то найденный опорный план является оптимальным.

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 40 & 10 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Минимальные транспортные издержки для этого плана:

$$F(x^*) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 3 \cdot 50 + 40 + 2 \cdot 50 = 490 \text{ (усл. ед.).}$$

Итак, по оптимальному плану, необходимо:

- из хранилища A_1 потребителю В2 доставить 20т, потребителю B_3 – 40 т топлива;
- из хранилища A_2 потребителю B_2 доставить 50 т топлива, а потребителю B_4 - 40 т топлива;
- из хранилища A_3 доставить 50 т топлива потребителю B_1.

При этом затраты на транспортировку будут минимальными и составят 490 усл. ден. ед.

2.3.4 Пример графического решения задачи на теорию игр

Задача 4. Решить графически игру, заданную платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: Матрица игры имеет размер 2х3, поэтому решение игры будем искать для игрока А. Отложим отрезок единичной длины A_1A_2**,** каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию первого игрока – (p_1, p_2). В частности, точке A_1 соответствует стратегия A_1, точке A_2 – стратегия A_2.

В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыши игрока А при соответствующих стратегиях и строить прямые, соответствующие стратегиям игрока В (рис 2.).

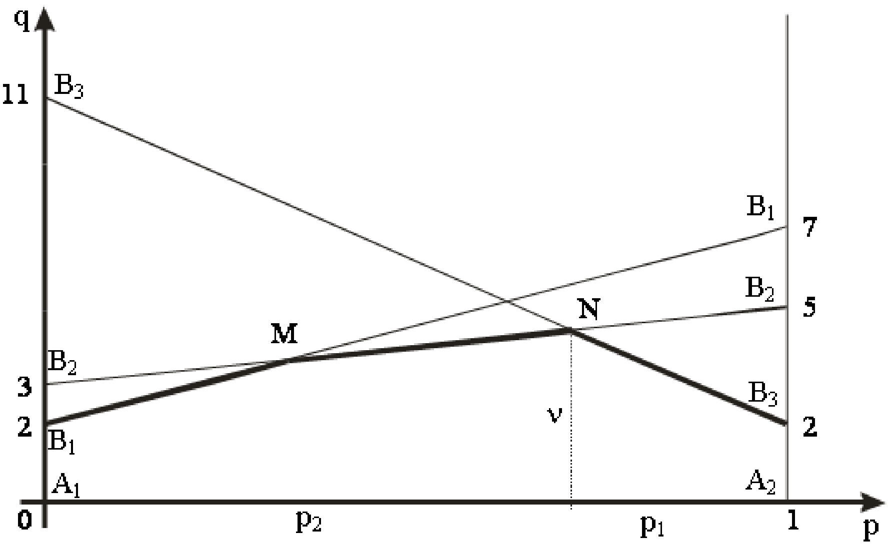


Рисунок 2.

В соответствии с принципом минимакса ломаная B_1NMB_3 – нижняя граница выигрыша, получаемого игроком A. Точка N, в которой выигрыш максимален, определяет цену игры и ее решение. Для нахождения оптимальной стратегии игрока A достаточно составить уравнения прямых и найти точку пересечения прямых B_2B_2 и B_3B_3.

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Прямая B_2B_2 проходит через точки (0,3) и (1,5), следовательно, ее уравнение $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{5-3}$ или $-2x+y=3$. Прямая B_3B_3 проходит через точки (0,11) и (1,2), следовательно, ее уравнение $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-11}{2-11}$ или $9x+y=11$. Для нахождения точки пересечения прямых B_2B_2 и B_3B_3 решим систему:

$$\begin{cases} -2x+y=3 \\ 9x+y=11 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получаем $-11x=-8 \Rightarrow x=8/11$, $y=3+2x=49/11$. Точка $N(8/11,49/11)$, следовательно, $p_2=8/11$, $p_1=1-8/11=3/11$, $\nu=49/11$.

Таким образом, $\bar{p}^*=(\frac{3}{11},\frac{8}{11})$, при цене игры $\nu=\frac{49}{11}$.

Из рисунка видно, что стратегия B_1 не входит в оптимальную смешанную стратегию, поэтому $q_3=0$, и мы можем найти оптимальную смешанную стратегию, удалив из платежной матрицы первый столбец. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, при этом столбцы ее соответствуют активным стратегиям B_2, B_3.

Так как $\bar{q}^*$– оптимальная, то она должна гарантировать средний выигрыш игроку B, равный цене игры, при любом поведении игрока A:
для стратегии A_1: $3q_2+11q_3=\nu$
для стратегии A_2: $5q_2+2q_3=\nu$.

С учетом того, что сумма вероятностей смешанной стратегии равна 1, цена игры $\nu=\frac{49}{11}$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3q_2+11q_3=\frac{49}{11} \\ 5q_2+2q_3=\frac{49}{11} \\ q_2+q_3=1 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $-2q_2 + 9q_3 = 0$

$$\begin{cases} -2q_2 + 9q_3 = 0 \\ q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\begin{cases} q_2 = \dfrac{9}{11} \\ q_3 = \dfrac{2}{11} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия для игрока B $\bar{q}^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$.

Ответ: $\bar{p}^* = (\frac{3}{11}, \frac{8}{11})$, $\bar{q}^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \nu = \frac{49}{11}$

Пример 5. Решить графически игру, заданную платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение: Матрица игры имеет размер 4х2, поэтому решение игры будем искать для игрока B. Аналогично примеру 5 отложим отрезок единичной длины B_1B_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию второго игрока – (q_1, q_2). В частности, точке B_1 соответствует стратегия B_1, точке B_2 – стратегия B_2.

В точках B_1 и B_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыши игрока A при соответствующих стратегиях и строить прямые, соответствующие стратегиям игрока A (рис. 3).

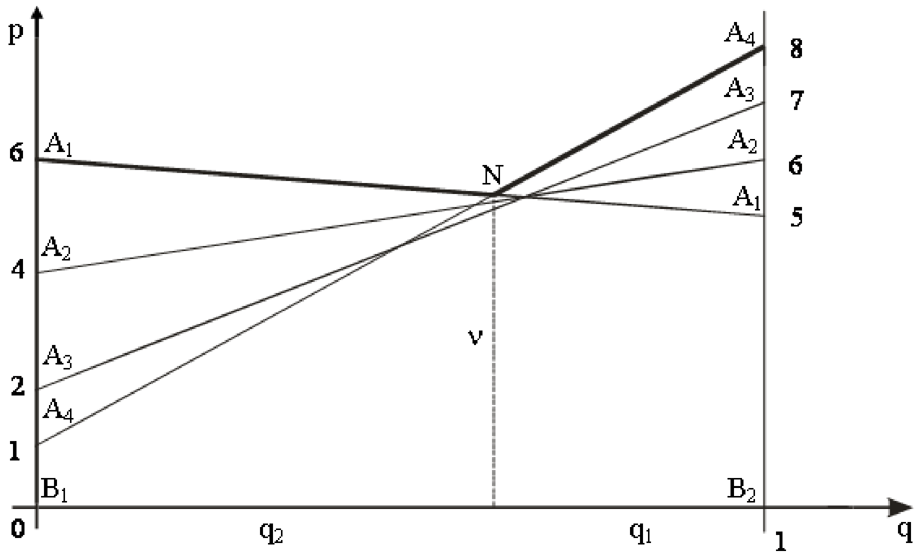


Рисунок 3.

В соответствии с принципом минимакса ломаная A_1NA_4 – верхняя граница выигрыша, получаемого игроком A. Точка N, в которой выигрыш минимален, определяет цену игры и ее решение. Для нахождения оптимальной стратегии игрока B достаточно составить уравнения прямых и найти точку пересечения прямых A_1A_1 и A_4A_4.

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Прямая A_1A_1 проходит через точки (0,6) и (1,5), следовательно, ее уравнение $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-6}{5-6}$ или x+y=6. Прямая A_4A_4 проходит через точки (0,1) и (1,8), следовательно, ее уравнение $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{8-1}$ или -7x+y=1. Для нахождения точки пересечения прямых A_1A_1 и A_4A_4 решим систему:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ -7x + y = 1 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получаем 8x=5 $\Rightarrow$ x=5/8, y=6-x=43/8. Точка N(5/8,43/8), следовательно, q_2=5/8, q_1=1-5/8=3/8, ν=43/8.

Таким образом, $\bar{q}^* = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, при цене игры $\nu = \frac{43}{8}$.

Из рисунка видно, что стратегии A_2 и A_3 не входят в оптимальную смешанную стратегию, поэтому p_2=0 и p_3=0, и мы можем найти оптимальную смешанную стратегию, удалив из платежной матрицы вторую и третью строку. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, при этом строки ее соответствуют активным стратегиям A_1, A_4.

Так как $\bar{p}^*$– оптимальная, то она должна гарантировать средний выигрыш игроку А, равный цене игры, при любом поведении игрока В:
для стратегии B_1: $6p_1 + p_4 = \nu$
для стратегии B_2: $5p_1 + 8p_4 = \nu$.

С учетом того, что сумма вероятностей смешанной стратегии равна 1, цена игры $\nu = \frac{43}{8}$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6p_1 + p_4 = \dfrac{43}{8} \\ 5p_1 + 8p_4 = \dfrac{43}{8} \\ p_1 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $p_1 - 7p_4 = 0$

$$\begin{cases} p_1 - 7p_4 = 0 \\ p_1 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{7}{8} \\ p_4 = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия для игрока А $\bar{p}^* = \left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\bar{p}^* = \left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)$, $\bar{q}^* = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, $\nu = \frac{43}{8}$

2.3.5 Пример решения задачи на сетевые графики

Основные понятия сетевой модели: *событие, работа, путь.*

Работа характеризует любое действие, требующее затрат времени или ресурсов. Работами считаются и процессы, не требующие затрат времени и ресурсов, а устанавливающие зависимости выполнения работ. Такие работы называются *фиктивными.* Работа обозначается парой чисел *(i,j)* где *i* – номер события, являющимся начальным для данной работы, *j* – номер события, являющимся конечным для данной работы, в которое она входит. Работы на графах обозначаются дугами (стрелками), фиктивные работы обозначаются пунктирными стрелками.

Событиями называются начало или завершение одной или нескольких работ. Они не имеют протяженности во времени. Событие совершается в тот момент, когда оканчивается последняя работа, входящая в него. На графе события изображаются кружками, внутри которых записывается номер события.

Путь – цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальную и конечную его вершины. *Полный путь L* – путь, начало которого совпадает с начальным событием, а конец – с завершающим. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную продолжительность, называют *критическим – Ткр.*

Характеристики событий

1. *Ранний срок* свершения события $T_p(0) = 0$, $T_p(j) = max\{T_p(i) + t(ij)\}$ срок, необходимый для выполнения всех работ, предшествующих данному событию. Он устанавливается путем выбора максимального значения из продолжительности всех путей, ведущих от исходного к данному событию,

2. *Поздний срок* свершения события $T_n(N) = T_{кр}$, $t_n(i) = T_{кр} - \max \sum_i^j t(ij)$ характеризует

самый поздний срок, который определяется как разность между длительностью критического пути и продолжительностью максимального пути, следующего за данным событием. Этот показатель определяется «обратным ходом» по графу модели, начиная с завершающего события сети.

3.Полный резерв $R_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t_{ij}$ – максимальный запас времени, на который можно отсрочить начало или увеличить длительность работы без увеличения длительности критического пути. Работы на критическом пути не имеют полного резерва времени.

4. Для оценки трудности своевременного выполнения работ служит *коэффициент напряженности работ*:

$$K_н(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{(T_{kp} - t'_{kp})}$$

$t'_{кр}$ – продолжительность отрезка пути, проходящего через данную работу (i,j), совпадающего с критическим путем. Чем ближе $K_н(i,j)$ к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок.

Пример 6. Дан перечень работ и время выполнения каждой работы. Составить сетевой график и определить, сколько всего времени понадобится на выполнение всех работ - критический путь и резервы времени.

Решение: Составляется сетевой график (рисунок 4). Работы отражаются стрелками, события кружками, при этом продолжительность работы отражается рядом со стрелкой.

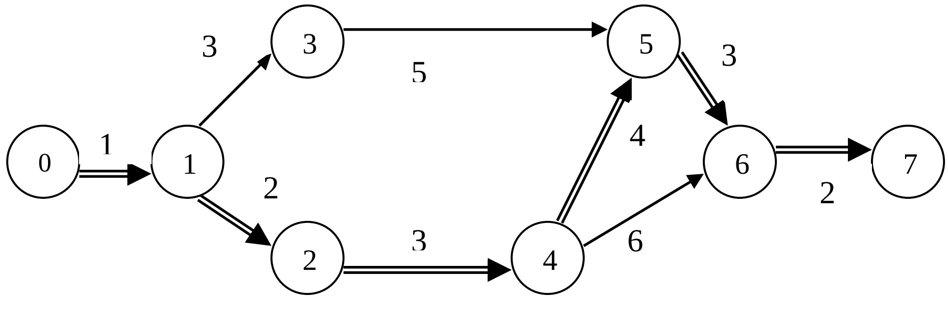


Рисунок 4 . Сетевой график.

Рассчитаем длину всех путей выполнения проекта.
1 путь: L1 = 1+3+5+3+2 = 14 дней.
2 путь: L2 = 1+2+3+6+2 = 14 дней.
3 путь: L3 = 1+2+3+4+3+2 = 15 дней.
Таким образом. критическим (наиболее длинным по продолжительности) является третий путь-15 дней. Рассчитаем временные характеристики сетевого графика (таблица 15):

Таблица 15. Временные характеристики сетевого графика.

Работа	*Продолжительность работы*	Ранний срок совершения события		Поздний срок совершения события		Полный резерв времени
(ij)	t_{ij}	*Тр(i)*	*Тр(j)*	*Тп(i)*	*Тп(j)*	R_n *(i.j)*
(0,1)	1	0	1	0	1	0
(1,2)	2	1	3	1	3	0
(1,3)	3	1	4	1	5	1
(2,4)	3	3	6	3	6	0
(3,5)	5	4	9	5	10	1
(4,5)	4	6	10	6	10	0
(4,6)	6	6	12	7	13	1
(5,6)	3	10	13	10	13	0
(6,7)	2	13	15	13	15	0

Определим коэффициент напряженности работ, имеющих резерв времени.
К (1,3) = 1- 1 / (15 – 6) = 0,89
К (3,5) = 1- 1 / (15 – 6) = 0,89
К (4,6) = 1- 1 / (15 – 8) = 0,86

Выводы: Таким образом, критический путь на выполнение проекта составляет 15 дней. Следовательно можно перераспределить ресурсы с этих работ. Имеются резервы времени в работах (1-3), (3-5), (4-6) по 1 дню. Коэффициенты напряженности работ высокие (> 0,8). Следовательно перераспределять ресурсы с этих работ на другие нецелесообразно и критический срок выполнения проекта невозможно уменьшить.

2.3.6 Примеры решения задач на СМО

При поиске оптимальных решений часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а системы – систем массового обслуживания (СМО).

Главная особенность процессов массового обслуживания – случайность. При этом имеются две взаимодействующие стороны – обслуживаемая и обслуживающая.

Примерами процессов этого типа являются:
1) обслуживание покупателей в сфере розничной торговли;
2) транспортное обслуживание;
3) медицинское обслуживание населения;

4) ремонт аппаратуры, машин, механизмов, находящихся в эксплуатации;
5) обработка документов в системе управления;
6) туристическое обслуживание.

Неотъемлемой частью системы массового обслуживания является узел обслуживания, через который осуществляется взаимодействие входного и выходного потоков заявок. В случае транспортного обслуживания каналом может считаться отдельная единица транспортного средства.

Вид СМО зависит как от числа каналов n, так и от допустимой длины очереди m. По указанным признакам различается ряд типов СМО, перечисленных в табл. 16.

Таблица 16. Типы систем массового обслуживания

№ п/п	Параметры СМО		Тип СМО
	n	m	
1	1	0	Одноканальная, без очереди
2	$n > 1$	0	Многоканальная, без очереди
3	1	$1 < m < \infty$	Одноканальная, с ограниченной очередью
4	$n > 1$	$1 < m < \infty$	Многоканальная, с ограниченной очередью
5	1	$m = \infty$	Одноканальная, с неограниченной очередью
6	$n > 1$	$m = \infty$	Многоканальная, с неограниченной очередью

По числу обслуживающих каналов различают одноканальные и многоканальные СМО.

Находящиеся в СМО заявки могут либо ожидать обслуживания, либо находиться под обслуживанием. Часть заявок, ожидающих обслуживания, образует очередь.

В зависимости от целочисленного значения m используются следующие названия в классификации типов СМО:

1) $m = 0$ – без очереди;
2) $m > 0$ – с очередью.

Если число мест в очереди m является конечным, то в СМО могут происходить отказы в предоставлении обслуживания некоторым заявкам. В связи с этим СМО указанного типа называются системами с отказами. Отклоняются от обслуживания те заявки, в момент прихода которых все места в очереди случайно оказались занятыми, или, если $m = 0$, все каналы оказались занятыми. Считается, что заявка, получившая отказ в обслуживании, навсегда теряется для СМО. Если m не ограничено, что иногда условно записывают как $m = \infty$, то соответствующая СМО называется системой с ожиданием. В СМО данного типа пришедшая заявка при отсутствии возможности немедленного обслуживания ожидает обслуживания, какой бы длинной ни были очередь и продолжительность времени ожидания.

Некоторые обозначения, применяемые в теории массового обслуживания, для формул:

n – число каналов в СМО;

λ – интенсивность входящего потока заявок $П_{вх}$;

v – интенсивность выходящего потока заявок $П_{вых}$;

μ – интенсивность потока обслуживания $П_{об}$;

ρ – показатель нагрузки системы (трафик);

m – максимальное число мест в очереди, ограничивающее длину очереди заявок;

$p_к$ – вероятность k-го состояния системы;

p_o – вероятность простаивания всей системы, т. е. вероятность того, что все каналы свободны;

$p_{отк}$ – вероятность отказа заявке в принятии ее в систему;

$p_{об}$ – вероятность того, что заявка будет обслужена;

A – абсолютная пропускная способность системы;

Q – относительная пропускная способность системы;

$\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди;

$\overline{N}_{об}$ – среднее число заявок под обслуживанием;

$\overline{N}_{сист}$ – среднее число заявок в системе;

$\overline{T}_{оч}$ – среднее время ожидания заявки в очереди;

$\overline{T}_{об}$ – среднее время обслуживания заявки, относящееся только к обслуженным заявкам;

$\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания заявки в системе;

$\overline{T}_{ож}$ – среднее время, ограничивающее ожидание заявки в очереди;

$\overline{K}$ – среднее число занятых каналов.

Абсолютная пропускная способность СМО А – среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Относительная пропускная способность СМО Q – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок.

Задача 1. Интенсивность потока пассажиров в кассах железнодорожного вокзала составляет $\lambda = 1,35$ чел. в мин. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного пассажира $t_{об} = 2$ мин.

1. Определить минимальное количество кассиров $n = n_{min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{min}$
2. Определить оптимальное число кассиров, чтобы число обслуживаемых покупателей в системе не превышало 5 человек.

Указание

Доказано, что если $\rho < 1$, т. е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если $\rho \geq 1$, очередь растет до бесконечности. ***Очередь не будет возрастать до бесконечности при выполнении условия $\rho<n$.***

Решение. $n > 1$, $m = \infty$, т. е. имеем многоканальную систему с неограниченной очередью. По условию $\lambda = 1,35$ (1/мин). Показатель нагрузки системы равен $\rho = \lambda^* t_{об} = 1,35\cdot 2 = 2,7$.

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho < n$, т. е. при $n > \rho = 2,7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n_{min} = 3$.

Интенсивность обслуживания покупателей

$\mu = 1/ t_{об} =1/2=0,5$

3 кассира

Коэффициент (доля) занятых обслуживанием контролеров-кассиров

$\overline{K}$ = ρ/n = 2,7/3 = 0,9.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, определяется по формуле

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$p_0 = (1 + 2{,}7 + 2{,}7^2/2! + 2{,}7^3/3! + 2{,}7^4/3! \cdot (3 - 2{,}7))^{-1} = 0{,}025$, т. е. в среднем 2,5 % времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь, определяется по формуле

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0,$$

$P_{оч} = (2{,}7^4/3!(3 - 2{,}7)) \cdot 0{,}025 = 0{,}735$.

Среднее число покупателей, находящихся в очереди, определяется по формуле

$$\overline{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2},$$

$\overline{N}_{оч} = (2{,}7^4/3 \cdot 3!(1 - 2{,}7/3)^2) \cdot 0{,}025 = 7{,}35$.

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле

$$\overline{T}_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{N}_{оч},$$

$\overline{T}_{оч}$ = 7,35/1,35 = 5,44 мин.

Среднее число покупателей в узле расчета определяется по формуле

$$\overline{N}_{сист} = \overline{N}_{оч} + \rho,$$

$\overline{N}_{сист}$ = 7,35 + 2,7 = 10,05.

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета определяется по формуле

$$\overline{T}_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{N}_{сис},$$

$\overline{T}_{сис}$ = 10,05/1,35 = 7,44 мин.

Абсолютная пропускная способность узла расчета А = 1,35 (1/мин), или 81 (1/ч), т. е. 81 покупатель в час.

Вывод 1. Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех кассиров, очередь более 7 чел. (больше 5). Следовательно, число кассиров надо увеличивать.

Определим оптимальное число кассиров среднее число обслуживаемых покупателей в системе для 4 кассиров.

4 кассира

$\rho = \lambda^* t_{об} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7.$

$\overline{K} = \rho/n = 2{,}7/4 = 0{,}68.$

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, определяется по формуле

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}$$

$p_0 = (1 + 2{,}7 + 2{,}7^2/2! + 2{,}7^3/3! + 2{,}7^4/4! + 2{,}7^5/4! \cdot (4 - 2{,}7))^{-1} = 0{,}075$, или 7,5 %

Вероятность того что будет очередь (все кассиры заняты)

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0$$

$P_{оч} = (2{,}7^5/4!(4 - 2{,}7)) \cdot 0{,}075 = 0{,}345$, или 34,5%.

Среднее число покупателей, находящихся в очереди, определяется по формуле

$$\overline{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

$\overline{N}_{оч} = (2{,}7^5/4 \cdot 4!(1 - 2{,}7/4)^2) \cdot 0{,}075 = 1{,}095.$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле

$$\overline{T}_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{N}_{оч},$$

$\overline{T}_{оч} = 1{,}095/1{,}35 = 0{,}81$ мин.

Среднее число покупателей в узле расчета определяется по формуле

$$\overline{N}_{сист} = \overline{N}_{оч} + \rho$$

$\overline{N}_{сист} = 1{,}095 + 2{,}7 = 3{,}8.$

Вывод: Следовательно, оптимально должно быть 4 кассира в кассах, для того, чтобы количество покупателей, обслуживаемых в системе, не превысило 5 человек и время нахождения в кассе не превысило 5 минут.

Задача 2. На грузовой станции имеется два выгрузочных фронта (n=2). Интенсивность подхода составов под выгрузку составляет $\lambda = 0{,}4$ состава в сутки. Среднее время разгрузки одного состава ($t_{обс.}$) – 2 суток. Приходящий поезд отправляется на другую станцию, если в очереди на разгрузку стоят более трёх составов (m=3).

Оценить эффективность работы выгрузочных фронтов грузовой станции: вероятность, что выгрузочные фронты свободны, вероятность, что состав останется без разгрузки, относительную пропускную способность, абсолютную пропускную способность, среднее число поездов, ожидающих разгрузки, среднее число заявок в системе, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в системе

Решение: По условию задачи n = 2, m = 3, т. е. грузовая станция представляет собой многоканальную систему с ограниченной очередью. Интенсивность потока обслуживаний определяется по формуле:

$$\mu = 1/2 = 0{,}5.$$

Интенсивность нагрузки канала (трафик) определяется по формуле $\rho = \lambda^* t_{об} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$.

Вероятность того, что выгрузочный фронт свободен, определяется по формуле

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^m}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right)^{-1},$$

$p_0 = 0{,}431$.

Вероятность того, что состав будет отправлен на другую станцию, определяется по формуле:

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0,$$

$p_{отк} = 0{,}009$.

Относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = 1 - p_{отк},$$

$Q = 1 – 0{,}009 = 0{,}991$.

Абсолютная пропускная способность определяется по формуле

$$A = \lambda Q,$$

$A = 0{,}4 \cdot 0{,}991 = 0{,}396$, т. е. в среднем в сутки разгружается 0,4 состава.

Среднее число составов, ожидающих разгрузки, определяется по формуле

$$\bar{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left(1 - \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2},$$

Где $\bar{N}_{оч} = 0{,}21$.

Среднее время ожидания разгрузки определяется по формуле: $\bar{T}_{оч} = 0{,}21/0{,}4 = 0{,}524$.

Среднее число занятых фронтов (среднее число заявок под обслуживанием) определяется по формуле

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right), \qquad \bar{K} = 0{,}77.$$

Среднее число составов, находящихся у разгрузочного фронта определяется по формуле

$$\bar{N}_{сист} = \bar{N}_{оч} + \bar{k},$$

$\bar{N}_{сист} = 0,21 + 0,77 = 0,98.$

Среднее время пребывания состава у разгрузочного фронта определяется по формуле:

$\bar{T}_{сис} = 1,564/0,4 = 3,908.$

Вывод. Среднее время пребывания состава в ожидании разгрузки на другой станции невелико. Это говорит о нормальной работе выгрузочного узла.

3. Вопросы к зачету

1. Предмет и основные понятия дисциплины методы оптимальных решений. Основные разделы и этапы поиска оптимальных решений.
2. Общая стандартная постановка задачи линейного программирования.
3. Постановка некоторых экономико-математических моделей: линейной модели производства, задачи о диете, задачи о раскрое, транспортной задачи, задачи о загрузке и задачи о назначениях.
4. Геометрическая интерпретация целевой функции задачи линейного программирования. Алгоритм графического метода решения линейных задач.
5. Проверка чувствительности решения.
6. Особые случаи решения задачи линейного программирования графическим методом.
7. Каноническая форма записи задачи линейного программирования. Приведение задачи к канонической форме.
8. Определение опорного решения задачи линейного программирования. Основные теоремы линейного программирования.
9. Основная идея симплекс-метода. Критерий оптимальности в симплекс-методе.
10. Формулы расчета элементов оценочной строки в процедуре симплекс-метода.
11. Правила построения двойственной задачи к задаче линейного программирования, записанной в стандартной форме.
12. Основные теоремы двойственности.
13. Экономический смысл переменных, ограничений и целевой функции в задаче, двойственной к линейной модели производства.
14. Постановка транспортной задачи и ее математическая модель.
15. Алгоритмы методов получения опорного решения транспортной задачи (метод северо-западного угла и метод минимального элемента). Условие баланса транспортной задачи.
16. Правила перемещения грузов по циклу перевозок при решении методом потенциалов.
17. Критерий оптимальности решения транспортной задачи методом потенциалов и дать его экономическую интерпретацию.
18. Методы решения задачи о назначениях.
19. Основные понятия теории игр.
20. Определения: игра и ее виды, правила игры, стратегия, оптимальная стратегия, платежная матрица, цена игры, чистые и смешанные стратегии.
21. Определения минимакса и максимина. Необходимое и достаточное условие существования седлового элемента платежной матрицы.
22. Аналитический способ решения игры 2*2.
23. Игры в смешенных стратегиях.

24. Алгоритм решения игры 2*n и m*2 графическим методом.
25. Методика определения оптимального решения в условиях неопределенности (игры с природой). Критерии выбора оптимального решения.
26. Этапы сведения задачи теории игр к задаче линейного программирования.
27. Понятие и основные элементы сетевых графиков. Основные характеристики сетевых графиков и их построение.
28. Временные характеристики сетевых графиков.
29. Оптимизация сетевых графиков.
30. Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания.
31. Модели систем массового обслуживания в коммерческой деятельности. СМО с отказами.
32. Модели систем массового обслуживания в коммерческой деятельности. СМО с ожиданием (очередью).

4. Список литературы

Основная литература

1. Методы оптимальных решений: Учебник / Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 384 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=521453
2. Методы принятия управленческих решений : учеб. пособие / Н.В. Кузнецова. — М.: ИНФРА-М, 2017. — 222 с. + Доп. материалы. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=902147

Дополнительная литература

1. Методы оптимальных решений [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Эконом. фак.; авт.-сост.: В.Г. Бардаков, О.В. Мамонов. – Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2013. – 230 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=515891
2. Методы и модели принятия управленческих решений: Учебное пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 384 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=414580
3. Исследование систем управления: Учебное пособие / В.В. Мыльник, Б.П. Титаренко. - 2-е изд. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 238 с.- Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=446802
4. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. - М.: ЮНИТИ, 2006.