

Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Решетникова

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

*Методические указания к организации
аудиторной и внеаудиторной работы по дисциплине
для обучающихся по направлению подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные
системы обработки информации и управления»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147:519.6](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.193я73
Р47

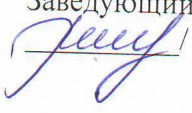
Решетникова Е.В.

Р47 Вычислительная математика: Методические указания к организации аудиторной и внеаудиторной работы по дисциплине для обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления» / Е.В. Решетникова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 96 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для решения на практических занятиях и самостоятельной работы студентов; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для наиболее рациональной организации самостоятельной работы и работы на практических занятиях студентов всех форм обучения направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 7 от 21.02.2020

Заведующий каф. МФММ
 / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики

Протокол № 7 от 12.03.2020

Председатель методической комиссии
ФИМЭ

 / Г.Н. Бойченко

УДК [378.147:519.6](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.193я73
Р47

© Решетникова Елена Васильевна
© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»,
Новокузнецкий институт (филиал), 2020

Текст представлен в авторской редакции

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
1 Численные методы решения задач математического анализа	7
1.1. Погрешность вычисления дифференцируемой функции.	7
1.1.1. Теоретические сведения.....	7
1.1.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	11
1.2. Аппроксимация функции методом наименьших квадратов.	
Интерполирование алгебраическими многочленами.....	12
1.2.1. Теоретические сведения.....	12
1.2.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	20
1.3. Интерполяционные квадратурные формулы.	22
1.3.1. Теоретические сведения.....	22
1.3.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	29
2. Численные методы алгебры	30
2.1. Численное решение нелинейных уравнений.	30
2.1.1. Теоретические сведения.....	30
2.1.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	39
2.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	39
2.2.1. Теоретические сведения.....	39
2.2.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	53
2.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.	55
2.3.1. Теоретические сведения.....	55
2.3.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	64
2.4. Методы решения алгебраических проблем собственных значений.....	65
2.4.1 Теоретические сведения.....	65
2.4.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	76
2.5. Решение систем нелинейных уравнений.	76
2.5.1. Теоретические сведения.....	76
2.5.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.....	79
2.6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.	79

2.6.1. Теоретические сведения.....	79
2.6.2. Задания для аудиторной и домашней работы.....	94
4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	96

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлению подготовки: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профиль «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и направлены на оказание помощи студентам и преподавателю при организации работы на практических занятиях и домашней работы студентов по дисциплине «Вычислительная математика».

Настоящее время характерно расширением приложений вычислительной математики, во многих областях, связанных с созданием и развитием средств вычислительной техники. С помощью ЭВМ удалось успешно решить ряд важных научно-технических задач. Достижения в этой области обусловлены сочетанием стремительного развития возможностей ЭВМ, разработкой современных программных средств и совершенствованием численных методов решения традиционных математических и прикладных задач. Требование численного решения новых задач привело к появлению большого количества новых методов. Причем эффект, достигаемый за счет совершенствования численных методов, по порядку сравним с эффектом, достигаемым за счет повышения производительности ЭВМ.

Целью изучения данной дисциплины является построение прочного фундамента математического образования для изучения специализированных курсов, читаемых на направлении

В методические рекомендации включено: краткий теоретический материал, снабженный большим количеством примеров решения практических задач, задания для аудиторной работы на практических

занятиях и для самостоятельной работы студентов, список основной и дополнительной литературы.

Таким образом, данные методические материалы позволяют, преподавателю качественно организовать работу на практических занятиях, а студенту подготовиться к практическим занятиям по соответствующим темам и успешно выполнить домашние задания. Методические указания могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

1 Численные методы решения задач математического анализа

1.1. Погрешность вычисления дифференцируемой функции.

1.1.1. Теоретические сведения

Полная погрешность результата решения задачи складывается из

1) Погрешности задачи, куда входят неточность исходных данных и погрешность математической модели. Эта погрешность называется неустранимой.

2) Погрешности метода. Эта погрешность оценивается для каждого метода по специальным формулам.

3) Вычислительной погрешности. Эта погрешность появляется при использовании приближенных результатов арифметических операций.

Пусть a – точное значение некоторой величины, а a^* – приближенное значение, тогда

$\Delta a = |a^* - a|$ - *абсолютная погрешность* приближенного значения a^* .

$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ - *относительная погрешность* приближенного значения a^* .

Так как значение a не известно, то на практике вычисляют не сами погрешности, а их предельные значения:

$\Delta_a \geq \Delta a$ - предельная абсолютная погрешность или оценка для абсолютной погрешности.

$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a^*|} \geq \delta a$ - предельная относительная погрешность или оценка для

относительной погрешности.

Пример 1. Пусть дано приближенное значение числа $\frac{14}{17} \approx 0,823$. То есть

$$a = \frac{14}{17}, \text{ а } a^* = 0,823.$$

Оценим абсолютную погрешность, вычислив число $a = \frac{14}{17}$ с большим

количеством разрядов: $0,82352 < a < 0,82353$. Тогда

$\Delta a \leq \Delta_a = |0,82353 - 0,823| = 0,00053$. Так как нужна была верхняя оценка для абсолютной погрешности, было взято значение, которое больше a .

Для оценки относительной погрешности используем полученное значение: $\delta a \leq \delta_a = \frac{\Delta_a}{|a^*|} = \frac{0,00053}{0,823} \leq 0,00065$ или в процентах: $\delta a \leq 0,065\%$.

Обратите внимание, что для оценки относительной погрешности взято число большее, чем результат частного.

Относительная погрешность показывает реальную ошибку. Поэтому чем больше относительная погрешность, тем менее точное значение мы имеем.

Значащими цифрами числа являются все цифры, начиная с первой ненулевой цифры в записи числа слева.

Значащая цифра числа называется **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы десятичного разряда соответствующего этой цифре

Значащая цифра числа называется **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы десятичного разряда соответствующего этой цифре

Правило округления: если первая слева отбрасываемая цифра больше 5, то последняя справа из оставшихся цифр числа увеличивается на единицу, если меньше 5 – то не изменяется.

Пример 2. Пусть дано приближенное значение $a \approx 0,66835$ и известна его абсолютная погрешность: $\Delta a \leq 0,00515$. Тогда верными в широком

смысле будут две шестерки и по правилу округления, отбросив все сомнительные цифры, кроме одной, получим $a \approx 0,668$.

В узком смысле верной будет только первая из шестерок, и после округления, получим $a \approx 0,67$.

Все сомнительные цифры отбрасывать нельзя, так как тогда по правилу округления могут измениться верные цифры, что недопустимо.

Рассмотрим погрешность, возникающую при выполнении арифметических операций.

1) Абсолютная погрешность суммы (разности) равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых $\Delta_{(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \dots + \Delta_{x_n}$.

2) Относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей множителей $\delta_{(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \dots + \delta_{x_n}$.

3) Относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делителя и делимого $\delta_{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$.

4) Постоянная выносится из под знака абсолютной погрешности: $\Delta_{kx} = k\Delta_x$ (частный случай суммы k одинаковых слагаемых). $\delta_{kx} = \delta_x$ (частный случай произведения, погрешность постоянной равна 0).

5) Степень выносится за знак относительной погрешности: $\delta_{x^m} = m\delta_x$ (частный случай произведения одинаковых сомножителей).

Используя эти правила можно оценить погрешность вычисления по формулам.

Пример 3. Определим с какой погрешностью будет получен результат по формуле $u(a, b, c) = ac^2 + c / \sqrt{b}$, если исходные данные заданы приближенно и имеют только верные в узком смысле цифры: $a \approx 13,48$,

$b \approx 121,51$, $c \approx 3,415$. Для начала вычислим абсолютные погрешности данных, пользуясь определением верной цифры в узком смысле: $\Delta a \leq 0,005$, $\Delta b \leq 0,005$, $\Delta c \leq 0,0005$. Далее оценим относительные погрешности:

$$\delta a \leq \frac{\Delta a}{|a^*|} = \frac{0,005}{13,48} \leq 0,00037, \quad \delta b \leq \frac{\Delta b}{|b^*|} = \frac{0,005}{121,51} \leq 0,000041,$$

$$\delta c \leq \frac{\Delta c}{|c^*|} = \frac{0,0005}{3,415} \leq 0,000146.$$

Абсолютную погрешность суммы определим как сумму:
 $\Delta u(a, b, c) = \Delta(ac^2) + \Delta(c / \sqrt{b}).$

Однако для произведения и частного лучше сначала рассчитать относительные погрешности:

$$\delta(ac^2) \leq \delta a + 2\delta c = 0,00037 + 2 \cdot 0,000146 = 0,000662,$$

$$\delta(c / \sqrt{b}) = \delta c + \frac{1}{2}\delta b = 0,000146 + \frac{1}{2} \cdot 0,000041 = 0,0001665.$$

Далее рассчитываем абсолютные погрешности слагаемых:

$$\Delta(ac^2) \leq (ac^2) \cdot \delta(ac^2) = 13,48 \cdot 3,415^2 \cdot 0,000662 \leq 0,104345,$$

$$\Delta(c/\sqrt{b}) = (c/\sqrt{b}) \cdot \delta(c/\sqrt{b}) = \frac{3,415}{\sqrt{121,51}} \cdot 0,0001665 \leq 0,0005.$$

Итак, абсолютная погрешность вычисления по формуле $u(a, b, c) = ac^2 + c / \sqrt{b}$ равна:

$$\Delta_{u(a,b,c)} = \Delta(ac^2) + \Delta(c/\sqrt{b}) \leq 0,104345 + 0,0005 = 0,104845.$$

Относительная:

$$\delta_{u(a,b,c)} = \frac{\Delta_{u(a,b,c)}}{|u(a,b,c)|} \leq \frac{0,104845}{13,48 \cdot 3,415^2 + 3,415 / \sqrt{121,51}} \leq 0,000663.$$

1.1.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Определить, какое равенство точнее

1.1. $\frac{14}{17} \approx 0,823$, $\sqrt{53} \approx 7,28$

1.3. $\frac{27}{31} \approx 0,872$, $\sqrt{42} \approx 6,48$

1.2. $\frac{7}{3} \approx 2,33$, $\sqrt{58} \approx 7,61$

1.4. $\frac{23}{9} \approx 2,56$, $\sqrt{87} \approx 9,33$

2. Округлите сомнительные цифры числа, оставив верные знаки (в узком смысле, в широком смысле)

2.1. $a \approx 23,3748$, $\delta a \leq 0,27\%$

2.2. $a \approx 3,87683$, $\delta a \leq 0,33\%$

2.3. $a \approx 13,5726$, $\Delta a \leq 0,0072$

2.4. $a \approx 15,8372$, $\Delta a \leq 0,0026$

2.5. $a \approx 0,088748$, $\delta a \leq 0,56\%$

2.6. $a \approx 23,7564$, $\delta a \leq 0,44\%$

2.7. $a \approx 4,57633$, $\Delta a \leq 0,00042$

3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры (в узком смысле, в широком смысле)

3.1. $a \approx 43,813$

3.2. $a \approx 0,645$

3.3. $a \approx 26,3$

3.4. $a \approx 4,8556$

3.5. $a \approx 3,643$

3.6. $a \approx 72,385$

3.7. $a \approx 3,75$

4. Вычислить. Определить абсолютную и относительную погрешности результата. Округлить результат по правилу округления, оставив все верные цифры и одну сомнительную.

$$4.1 \quad X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}},$$

$$m \approx 28,3, n \approx 7,45, k \approx 0,678, \Delta m \leq 0,02, \Delta n \leq 0,01, \Delta k \leq 0,003$$

$$4.2. \quad N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}, m \approx 5,72, n \approx 3,0567, \Delta m \leq 0,02, \Delta n \leq 0,0001$$

5. Вычислить. Определить абсолютную и относительную погрешности результата, если в исходных данных все цифры верные в узком смысле. Округлить результат по правилу округления, оставив все верные цифры и одну сомнительную.

$$5.1. \quad V = \pi \cdot h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), h \approx 11,8, R \approx 23,67$$

$$5.2. \quad P = a^2 \cdot c + \frac{bd^3}{c^2}, a \approx 7,415, b \approx 1,3495, c \approx 8,1920, d \approx 17,485$$

$$5.3. \quad \gamma = \frac{\alpha \cdot b - \beta \cdot a}{b^2} - \frac{\beta \cdot (ab - \beta a)}{b^2 (b + \beta)},$$

$$\alpha \approx 5,27, \beta \approx 0,0562, a \approx 158,35, b \approx 61,21$$

1.2. Аппроксимация функции методом наименьших квадратов.

Интерполирование алгебраическими многочленами.

1.2.1. Теоретические сведения

1) Аппроксимация функций методом наименьших квадратов

Аппроксимация функции - это замена одной функции на другую.

Пусть имеются опытные данные - некоторые измерения, занесенные в таблицу.

x	x ₁	x ₂	x ₃	...	x _n
y	y ₁	y ₂	y ₃	...	y _n

Предположим, что между параметром x и параметром y имеется некая функциональная связь $y = \varphi(x)$. Требуется дать аналитическое описание такой связи, то есть подобрать функцию $f(x)$, которая **аппроксимировала** бы на отрезке $[x_1, x_n]$, заданную таблично функцию $y = \varphi(x)$.

Используется если исходный материал заведомо приближенный, в силу неточности измерительных приборов, случайных ошибок и пр., то точного совпадения исходных данных и значений функции $\varphi(x)$ не требуется, достаточно чтобы она хорошо отражала «в среднем» зависимость между параметрами x и y .

Алгоритм метода наименьших квадратов.

1) В декартовой системе координат изображают исходные данные в виде точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ – облако наблюдений.

2) Проводят кривую $y = f(x)$, наилучшим образом, отражающую характер расположения точек. Кривую выбирают из известного семейства функций (линейная, квадратичная, логарифмическая, показательная и т.п. функции).

3) Неизвестные параметры выбранной формулы находят минимизируя величину:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \dots + (y_n - f(x_n))^2.$$

4) Погрешность аппроксимации определяется по формуле:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \dots + (y_n - f(x_n))^2.$$

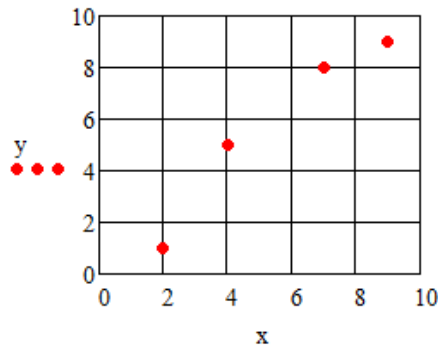
Пример 1. Дана таблица исходных данных:

x	2	4	7	9
y	1	5	8	9

Пусть требуется аппроксимировать исходные данные линейной функцией $f(x) = ax + b$.

Рассмотрим шаги алгоритма.

1) Построим облако наблюдений:



2) Будем искать *линейную аппроксимацию*: $f(x) = ax + b$.

3) Составим величину: $S(a, b) = \sum_{i=1}^4 (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$. Для минимизации

приравняем производные по неизвестным параметрам a и b к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = 0. \end{cases} \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^4 [y_i - (ax_i + b)]x_i = 0, \\ -2 \sum_{i=1}^4 [y_i - (ax_i + b)] = 0. \end{cases} \begin{cases} a \sum_{i=1}^4 x_i^2 + b \sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 y_i x_i, \\ a \sum_{i=1}^4 x_i + 4b = \sum_{i=1}^4 y_i. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 x_i^2 & \sum_{i=1}^4 x_i \\ \sum_{i=1}^4 x_i & 4 \end{vmatrix} = 4 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right)^2 = 4(2^2 + 4^2 + 7^2 + 9^2) - (2 + 4 + 7 + 9)^2 =$$

$$= 600 - 484 = 116$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 y_i x_i & \sum_{i=1}^4 x_i \\ \sum_{i=1}^4 y_i & 4 \end{vmatrix} = 4 \sum_{i=1}^4 y_i x_i - \sum_{i=1}^4 x_i \cdot \sum_{i=1}^4 y_i = 4(2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 + 9 \cdot 9) -$$

$$-(2 + 4 + 7 + 9) \cdot (1 + 5 + 8 + 9) = 636 - 506 = 130$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 x_i^2 & \sum_{i=1}^4 y_i x_i \\ \sum_{i=1}^4 x_i & \sum_{i=1}^4 y_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^4 y_i - \sum_{i=1}^4 x_i \cdot \sum_{i=1}^4 y_i x_i = (2^2 + 4^2 + 7^2 + 9^2)(1 + 5 + 8 + 9) - (2 + 4 + 7 + 9)(1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 9) = 150 \cdot 23 - 22 \cdot 159 = 3450 - 3498 = -48$$

Итак, решение системы: $a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{130}{116} \approx 1,1$, $b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-48}{116} \approx -0,4$.

Аппроксимирующая функция имеет формулу: $f(x) = 1,1x - 0,4$.

Наложим график построенной функции на опытные данные:

Погрешность аппроксимации вычисляем по формуле:
 $\Delta S = (1 - f(2))^2 + (5 - f(4))^2 + (8 - f(7))^2 + (9 - f(9))^2 = (1 - (1,1 \cdot 2 - 0,4))^2 + (5 - (1,1 \cdot 4 - 0,4))^2 + (8 - (1,1 \cdot 7 - 0,4))^2 + (9 - (1,1 \cdot 9 - 0,4))^2 = 0,64 + 1 + 0,49 + 0,25 = 2,38$

Степенную аппроксимацию вида $f(x) = ax^m$ можно свести к линейной, для этого преобразуем формулу, прологарифмировав обе части уравнения: $\ln f(x) = \ln a + m \ln x$. После замены переменных и параметров: $u = \ln x$, $v(u) = \ln f(x)$, $\ln a = B$, $m = A$, получим линейную задачу: $v(u) = Au + B$. Параметры A и B будем искать, решая систему уравнений, составленную для линейной аппроксимации.

Пример 2. Дана таблица исходных данных:

x	2	4	7	9
y	1	5	8	9

Преобразуем данные для поиска степенной аппроксимации: $f(x) = ax^m$.

$u = \ln x$	$\ln 2 \approx 0,7$	$\ln 4 \approx 1,4$	$\ln 7 \approx 2$	$\ln 9 \approx 2,2$
$v(u) = \ln f(x)$	$\ln 1 = 0$	$\ln 5 \approx 1,6$	$\ln 8 \approx 2,1$	$\ln 9 \approx 2,2$

Решаем задачу линейной аппроксимации $v(u) = Au + B$ для параметров u и v . Отыскав значения коэффициентов A , B , находим коэффициенты степенной аппроксимации $f(x) = ax^m$ по формулам: $a = e^B$, $m = A$.

Показательную аппроксимацию вида $f(x) = ae^{mx}$, также можно свести к линейной, прологарифмировав обе части уравнения: $\ln f(x) = \ln a + mx$. После замены переменных и параметров: $v(u) = \ln f(x)$, $\ln a = B$, $m = A$, получим линейную задачу: $v(u) = Ax + B$.

При рассмотренных выше преобразованиях необходимо вместо исходной таблицы данных рассматривать их натуральные логарифмы. Если среди данных встречаются значения меньшие или равные нулю, то вычислить такие логарифмы невозможно. В этом случае предварительно производят сдвиг системы координат, путем замены:

$$X = x - x_{\min} + 1, Y = y - y_{\min} + 1$$

Пример 3. Дана таблица исходных данных:

x	-4	-2	7	9
y	-1	5	-8	9

Например для построения степенной аппроксимации: $f(x) = ax^m$, необходимо преобразовать данные в натуральные логарифмы. Произведем сдвиг исходных данных: на 5 единиц увеличим значения параметра x и на 9 единиц увеличим значения параметра y . Геометрически это обозначает сдвиг облака наблюдений вверх и вправо. Новые данные для аппроксимации не содержат отрицательных чисел и нуля:

X	1	3	12	14
Y	8	14	1	18

После построения аппроксимирующей функции $f(X) = aX^m$, вернемся к исходной системе координат, произведя обратный сдвиг:
 $f(x) = a(x-5)^m + 9$.

2) Интерполирование алгебраическими многочленами.

Пусть дана таблица значений некоторой функции:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Требуется построить функцию $\varphi(x)$, такую чтобы для каждого табличного значения выполнялось: $f(x_i) = \varphi(x_i)$.

2.1). Полином Лагранжа

Решение будем искать в виде интерполяционного полинома Лагранжа:

$$L_n(x) = Y_0(x) \cdot y_0 + Y_1(x) \cdot y_1 + \dots + Y_n(x) \cdot y_n,$$

$$\text{где } Y_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Пример 1. Для функции, заданной таблично построим интерполяционный полином Лагранжа для вычисления значения функции в точке $x=2,5$.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2

Для определения предпочтительной степени полинома построим таблицу конечных разностей:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2
Δy	1	0,4	0,3	0,3	0,2	
Δy^2	-0,6	-0,1	0	-0,1		

Δy^3	0,5	0,1	-0,1			
--------------	-----	-----	------	--	--	--

Как видно из построенной таблицы конечных разностей, в столбце $x=2$ модуль конечной разности третьего порядка больше модуля конечной разности второго порядка. Следовательно, предпочтительной степенью полинома будем считать $n=2$. Полином будем строить по точкам: $x_1=1$, $x_2=2$ и $x_3=3$, так как $x_2 < 2,5 < x_3$.

Вычисляем коэффициенты полинома:

$$Y_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{2},$$

$$Y_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)} = -x^2 + 4x - 3$$

$$Y_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

Многочлен Лагранжа для решения поставленной задачи имеет вид:

$$L_2(x) = Y_1(x) \cdot y_1 + Y_2(x) \cdot y_2 + Y_3(x) \cdot y_3$$

Вычисляем значение функции в точке $x=2,5$, с помощью построенного многочлена:

$$L_2(2,5) = Y_1(2,5) \cdot 1 + Y_2(2,5) \cdot 1,4 + Y_3(2,5) \cdot 1,7 = -0,125 + 1,05 + 0,6375 = 1,5625.$$

Для найденного значения справедливо неравенство: $y_2 < L_2(2,5) < y_3$, что соответствует монотонности многочлена.

Оценим погрешность вычисления по построенной формуле. Формула для оценки погрешности полинома Лагранжа второй степени на отрезке $[x_1, x_3]$:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|, \quad M_3 = \max_{x \in [x_1, x_3]} |f'''(x)|.$$

$$\max_{x \in [x_1, x_3]} |f'''(x)| \leq \max_{x \in [x_1, x_3]} \frac{|\Delta^3 y_i|}{h^3} = \frac{0,5}{1^3} = 0,5.$$

Соответственно: $|R_2(2,5)| \leq \frac{0,5}{3!} \cdot |(2,5-1)(2,5-2)(2,5-3)| = 0,04$.

2.2). Полином Ньютона

Для построения первого интерполяционного полинома Ньютона за

базовый узел возьмем x_2 : $P_2(x_2 + th) = y_2 + \Delta y_2 t + \frac{\Delta^2 y_2}{2!} t(t-1)$,

$$\text{где } t = \frac{x - x_2}{h} = \frac{2,5 - 2}{1} = 0,5.$$

Вычисляем значение функции:

$$f(2,5) \approx P_2(2 + 0,5 \cdot 1) = 1,4 + 0,3 \cdot 0,5 + \frac{0}{2!} \cdot 0,5 \cdot (0,5 - 1) = 1,55.$$

Для построения графика многочлена необходимо вернуться к переменной x :

$$P_2(x) = 1,4 + \frac{0,3}{1! \cdot 1} (x - 2) + \frac{0}{2! \cdot 1^2} (x - 2)(x - 3) = 1,4 + 0,3(x - 2).$$

Определим погрешность полученного значения:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M_3}{4(3+1)} \cdot h^3 = \frac{0,5}{16} \leq 0,04.$$

Для построения второго интерполяционного полинома Ньютона за

базовый узел возьмем x_3 : $P_2(x_3 + th) = y_3 + \Delta y_2 \cdot t + \frac{\Delta^2 y_1}{2!} t(t+1)$, где

$$t = \frac{x - x_3}{h} = \frac{2,5 - 3}{1} = -0,5.$$

Вычисляем значение функции:

$$f(2,5) \approx P_2(3 - 0,5 \cdot 1) = 1,7 - 0,3 \cdot 0,5 + \frac{-0,1}{2!} \cdot (-0,5) \cdot (-0,5 + 1) = 1,5625.$$

Для построения графика многочлена необходимо вернуться к переменной x :

$$P_2(x) = 1,7 + \frac{0,3}{1! \cdot 1}(x-3) + \frac{-0,1}{2! \cdot 1^2}(x-3)(x-2) = -0,05x^2 + 0,55x + 0,5.$$

1.2.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1) Построить линейную, квадратичную, степенную и показательную аппроксимации данной функции методом наименьших квадратов. Изобразить графики полученных функций. Определить погрешность каждой аппроксимации, и выяснить, какая из построенных функций аппроксимирует исходную функцию точнее.

6.1.

x	-4	1	3	4	5
y	-4	-3	-2	1	8

6.2.

x	-1	0	1	2	3
y	-3,3	-1	0	1	0,3

1. Найти приближенное значение функции при заданных значениях аргумента с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа второй и третьей степеней. Изобразить исходные данные и графики построенных многочленов в единой системе координат. Оценить погрешность проделанных вычислений.

x	y
0,43	1,63597
0,48	1,73234
0,55	1,87686
0,62	2,03345
0,70	2,22846
0,75	2,35973

$$x_1=0,702, x_2=0,512, x_3=0,645, x_4=0,736, x_5=0,608$$

2. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента, предварительно определив предпочтительную степень интерполяционного многочлена. Изобразить исходные данные и графики построенных многочленов в единой системе координат. Оценить погрешность проделанных вычислений.

x	y
1,415	0,888551
1,420	0,889599
1,425	0,890637
1,430	0,891667
1,435	0,892687
1,440	0,893698
1,445	0,894700
1,450	0,895693
1,455	0,896677
1,460	0,897653
1,465	0,898619

$$x_1= 1,4161, x_2= 1,4625, x_3= 1,4135, x_4= 1,470, x_5= 1,437.$$

1.3. Интерполяционные квадратурные формулы.

1.3.1. Теоретические сведения

Для вычисления определенного интеграла вида $I = \int_a^b f(x)dx$

воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла:

$I = \int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, изображенной на

рисунке 1.

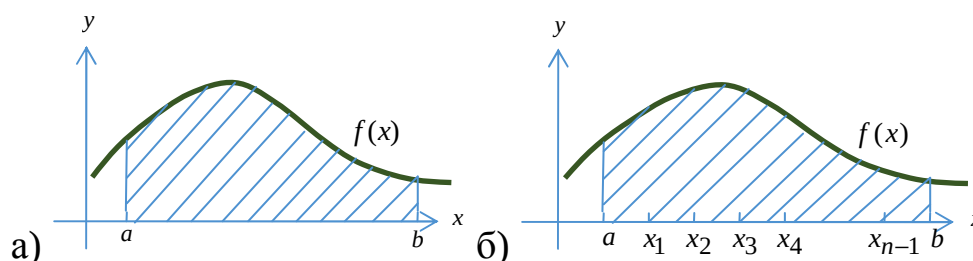


Рисунок 1 – а) геометрический смысл определенного интеграла

б) разбиение отрезка интегрирования на части

Идея: заменим вычисление площади криволинейной трапеции с рисунка 1а вычислением площади по известным формулам

Для воплощения данной идеи разобьем интервал на n отрезков длиной

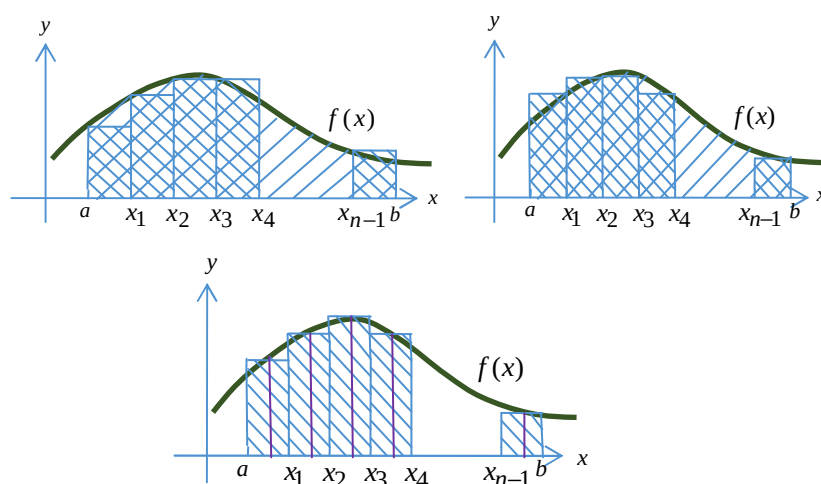
$h = \frac{b-a}{n}$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (рисунок 1б).

1) *Формулы прямоугольников.*

Идея: строим на каждом из получившихся отрезков прямоугольники и площадь криволинейной трапеции вычисляем суммируя площади построенных прямоугольников.

1.1.) *Формула левых прямоугольников.*

Высота построенных прямоугольников равна значению функции на левом крае отрезка (рисунок 3а).



а)

б)

в)

Рисунок 3 – а) геометрический смысл формулы левых прямоугольников;

б) геометрический смысл формулы правых прямоугольников;

в) геометрический смысл формулы средних прямоугольников.

Площадь криволинейной трапеции приближенно вычисляем, складывая

площади построенных прямоугольников: $I \approx I_1 = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$.

1.2) Формула правых прямоугольников.

Высота построенных прямоугольников равна значению функции на правом крае отрезка (рисунок 3б).

Площадь криволинейной трапеции приближенно вычисляем, складывая

площади построенных прямоугольников: $I \approx I_2 = h \sum_{i=1}^n f(x_i)$

Замечание. Заметим, что, если по одной из формул 1.1, 1.2 площадь криволинейной трапеции вычисляется с недостатком, то по другой с избытком. В связи с чем для более точного результата можно взять среднее арифметическое двух результатов: $I \approx \frac{I_1 + I_2}{2}$.

1.3) Формула средних прямоугольников.

Высота построенных прямоугольников равна значению функции на правом крае отрезка (рисунок 3в).

Высота построенных прямоугольников равна значению функции в середине отрезка (рисунок 3б).

Площадь криволинейной трапеции приближенно вычисляем, складывая площади построенных прямоугольников: $I \approx I_3 = h \sum_{i=1}^n f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$.

Погрешность вычисления по формулам 1.1-1.3: $r(h) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$.

Пример 1. Вычислим приближенно интеграл $\int_1^5 \sqrt{x} dx$ по формулам

левых и правых прямоугольников. Рассчитаем значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $x \in [1, 5]$ с шагом $h = 1$.

x	1	2	3	4	5
$f(x) = \sqrt{x}$	1	1,4	1,7	2	2,2

Вычисляем значение интеграла по формулам 1.1.-1.2:

$$I_1 = h \sum_{i=1}^4 f(x_{i-1}) = 1 \cdot (1 + 1,4 + 1,7 + 2) = 6,1.$$

$$I_2 = h \sum_{i=1}^4 f(x_i) = 1 \cdot (1,4 + 1,7 + 2 + 2,2) = 7,3.$$

В качестве более точного приближения возьмем среднее арифметическое:

$$\int_1^5 \sqrt{x} dx \approx \frac{6,1 + 7,3}{2} = 6,7.$$

Определим погрешность полученного результата по формуле:

$$r(h) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi), \text{ где } a=1, b=5, h=1.$$

$$f''(\xi) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad \max_{x \in [1,5]} |f''(\xi)| = \frac{1}{4\sqrt{1^3}} = \frac{1}{4}.$$

$$r(h) = \frac{5-1}{24} h^2 f''(\xi) \leq \frac{4}{24} \cdot \frac{1}{4} \leq 0,042.$$

Итак, получили $\int_1^5 \sqrt{x} dx = 6,7 \pm 0,042.$

2) Формулы трапеций.

Идея: строим на каждом из получившихся отрезков трапеции и площадь криволинейной трапеции вычисляем суммируя площади построенных трапеций (рисунок 4).

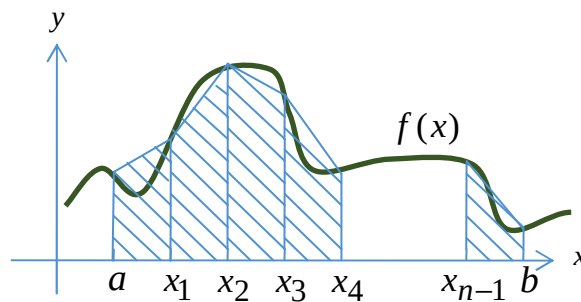


Рисунок 4 – Геометрический смысл формулы трапеций

Площадь криволинейной трапеции приближенно вычисляем, складывая площади построенных трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Погрешность вычисления по формуле трапеций:

$$|r^T| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

Пример 2. Вычислим приближенно интеграл $\int_1^5 \sqrt{x} dx$ по формуле

трапеций. Используя значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $x \in [1,5]$

(таблица из примера 1), вычисляем значение интеграла по формуле трапеций:

$$\int_1^5 \sqrt{x} dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) = 1 \cdot \left(\frac{1 + 2,2}{2} + 1,4 + 1,7 + 2 \right) = 6,7.$$

Определим погрешность полученного результата по формуле:

$$|r^T| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|, \text{ где } a=1, b=5, h=1.$$

$$f''(\xi) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad \max_{x \in [1,5]} |f''(\xi)| = \frac{1}{4}.$$

$$|r^T| \leq \frac{1^2 \cdot (5-1)}{12} \cdot \frac{1}{4} < 0,084.$$

$$\text{Итак, получили } \int_1^5 \sqrt{x} dx = 6,7 \pm 0,084.$$

3) Формулы парабол (Симпсона).

Идея: строим на каждой паре получившихся отрезков параболы и площадь криволинейной трапеции вычисляем суммируя площади криволинейных трапеций под параболой (рисунок 5).

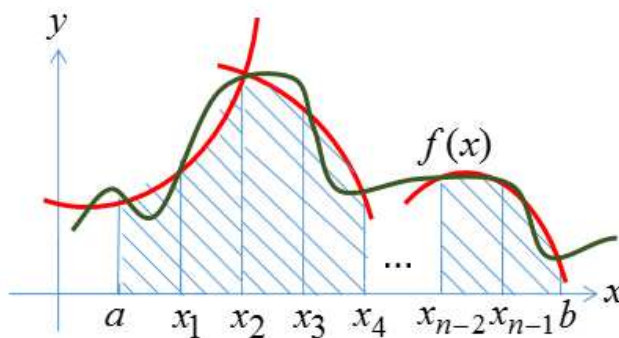


Рисунок 5 – Геометрический смысл формулы Симпсона

Площадь криволинейной трапеции приближенно вычисляем, складывая площади построенных криволинейных трапеций под параболой:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})).$$

Погрешность вычисления по формуле Симпсона:

$$|r^C| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{IV}(\xi)|.$$

Пример 3. Вычислим приближенно интеграл $\int_1^5 \sqrt{x} dx$ по формуле

Симпсона. Используя значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $x \in [1, 5]$ (таблица из примера 1), вычисляем значение интеграла по формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} \int_1^5 \sqrt{x} dx &\approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})) = \\ &= \frac{1}{3} (1 + 2, 2 + 4(1, 4 + 2) + 2 \cdot 1, 7) \approx 6, 74. \end{aligned}$$

Определим погрешность полученного результата по формуле:

$$|r^C| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{IV}(\xi)|, \text{ где } a=1, b=5, h=1.$$

$$f^{IV}(\xi) = -\frac{15}{16\sqrt{x^7}}, \quad \max_{x \in [1,5]} |f^{IV}(\xi)| = \frac{15}{16\sqrt{1^7}} = \frac{15}{16}.$$

$$|r^T| \leq \frac{1^4 \cdot (5-1)}{180} \cdot \frac{15}{16} \leq 0,0053.$$

$$\text{Итак, получили } \int_1^5 \sqrt{x} dx = 6, 74 \pm 0, 0053.$$

Необходимость вычисления производной делает неудобными для практического использования формулы оценивания погрешностей. Рассмотрим практический метод оценивания погрешности решения.

Правило Рунге для практического оценивания погрешностей вычисления по квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Вычисляем интеграл I по формуле с порядком сходимости p с шагом $\frac{h}{2}$,

получаем $I \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right)$.

Вычисляем интеграл I по формуле с порядком сходимости p с шагом h ,
получаем $I \approx I^p(h)$.

Погрешность вычисления интеграла, оцениваем по формуле:

$$r \leq \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}.$$

Замечание. Порядок сходимости формул прямоугольников и трапеций $p=2$, формулы Симпсона - $p=4$.

Так как данная формула оценивает погрешность весьма приближенно, то доверять ее результату рекомендуется только при $r \leq 0,1$.

Пример 4. Вычислим приближенно интеграл $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле

трапеций и оценим погрешность, используя правило Рунге.

Рассчитаем значения функции $f(x) = e^{-x^2}$ на отрезке $x \in [0,1]$ с шагом $h = 0,25$

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x) = e^{-x^2}$	1	0,939	0,779	0,57	0,368

Вычисляем значение интеграла с шагом $h = 0,25$:

$$I \approx h \left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right) \approx 1,986.$$

Рассчитаем значения функции $f(x) = e^{-x^2}$ на отрезке $x \in [0,1]$ с шагом $\frac{h}{2} = 0,125$:

x	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$f(x) = e^{-x^2}$	1	0,985	0,939	0,869	0,779	0,677	0,57	0,465	0,368

Вычисляем значение интеграла с шагом $\frac{h}{2} = 0,125$:

$$I \approx h \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \right) \approx 0,707.$$

Оцениваем погрешность по правилу Рунге: $r \leq \frac{0,707 - 1,986}{2^2 - 1}$.

1.3.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Вычислить интеграл по формулам левых, правых и средних прямоугольников при $n=10$. Оценить погрешность полученного решения по формуле погрешности.

$$\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{1,5x^2 + 2}}{x + \sqrt{0,8x^2 + 1}} dx$$

$$\int_1^{2,2} \frac{\sqrt{0,8x^2 + 2}}{1,6 + \sqrt{1,5x + 0,6}} dx$$

2. Вычислить интеграл по формуле средних прямоугольников при $n=10$.

Использовать для оценки точности формулу Рунге.

$$\int_{0,4}^1 \frac{\cos(2x^2 + 0,5)}{0,8 + \sin(x + 1,4)} dx$$

$$\int_{0,6}^1 \frac{\sin(x + 0,7)}{1,4 + \cos(0,6x + 0,4)} dx$$

3. Вычислить интеграл по формуле трапеций при $n=10$. Оценить погрешность полученного решения по формуле погрешности.

$$\int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2 + 1}}$$

$$\int_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2 + 0,5}}$$

4. Вычислить интеграл по формуле Симпсона при $n=10$; оценить погрешность результата, используя формулу Рунге.

$$\int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1} \lg(x+3) dx$$

$$\int_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(1+x^2)}{2x-1} dx$$

2. Численные методы алгебры

2.1. Численное решение нелинейных уравнений.

2.1.1. Теоретические сведения.

1) *Решение нелинейных скалярных уравнений.*

Любое уравнение может быть представлено как $f(x) = 0$, где $f: R \rightarrow R$.

Обозначим x^* - точное решение уравнения. Требуется найти приближенное значение $\tilde{x}$, такое что $|x^* - \tilde{x}| < \varepsilon$.

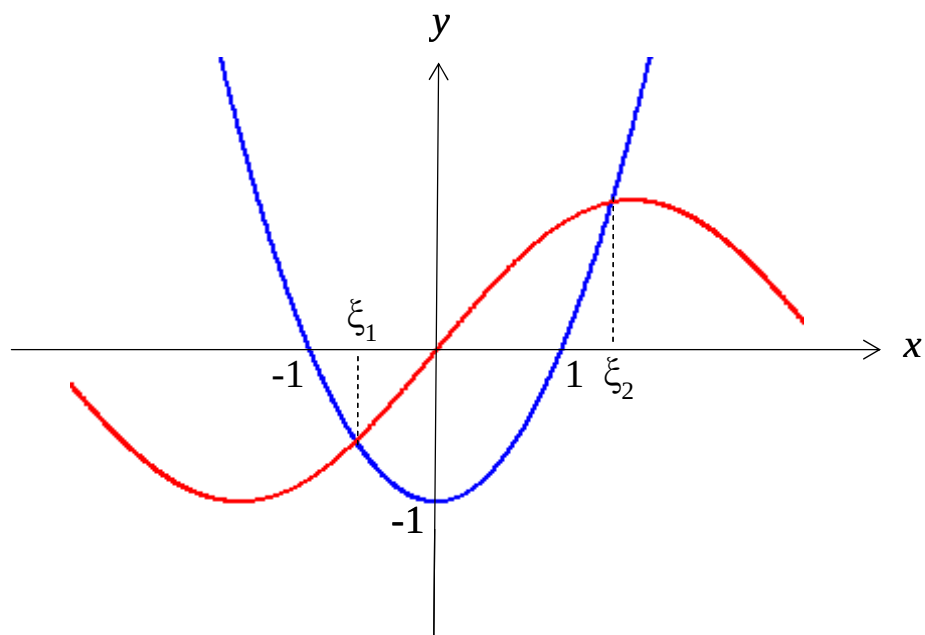
Перед применением любого метода требуется **локализовать корни** уравнения – определить интервалы, в которых находится ровно один корень уравнения.

1) Графический метод локализации корней.

Рассматриваем левую часть уравнения $f(x)=0$ как функцию $y=f(x)$. Изображаем схематически ее график и определяем интервалы в которые попали точки пересечения графика функции с осью Ox .

Если график функции $y=f(x)$ достаточно сложно построить можно уравнение $f(x)=0$ преобразовать к виду $f_1(x)=f_2(x)$ и рассмотреть две функции: $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$.

Пример 1. Локализуем графически корни уравнения $x^2-1-\sin x=0$. Преобразуем уравнение к виду: $x^2-1=\sin x$. Построим схематично графики двух функций: $f_1(x)=x^2-1$ и $f_2(x)=\sin x$. Интервалы, в которые попали точки пересечения этих графиков и будут интервалами локализации корней уравнения. Как видно на рисунке 1 точки пересечения попали в интервалы $\xi_1 \in [-1,0]$ и $\xi_2 \in [1,\pi]$.



2) Аналитический метод локализации корней, основан на следующем утверждении:

Для непрерывной строго монотонной функции условие $f(a) \cdot f(b) < 0$ является необходимым и достаточным для того чтобы уравнение $f(x)=0$ имело единственный корень на отрезке $[a, b]$.

Согласно утверждению для локализации корней необходимо определить интервалы монотонности функции и знак функции на их концах.

Пример 2. Локализуем корни уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 5x + 2$. Для определения интервалов монотонности рассчитаем производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 5 \text{ и приравняем к } 0:$$

$$x^2 = \frac{5}{3},$$

$$x_1 \approx 1,291, \quad x_2 \approx -1,291.$$

Изучим значение функции на концах интервалов монотонности:

x	$-\infty$	$-1,291$	$1,291$	$+\infty$
$f(x)$	-	+	-	+

Из таблицы видно, что уравнение имеет три решения:

$$x_1^* \in (-\infty; -1,291), \quad x_2^* \in (-1,291; 1,291), \quad x_3^* \in (1,291; +\infty).$$

Рассмотрим методы уточнения локализованных корней.

1. Метод половинного деления.

Дано уравнение $f(x) = 0$, решение которого принадлежит интервалу $x^* \in (a, b)$.

1 шаг) Выбираем пробную точку $c = \frac{a+b}{2}$, которая делит интервал на две части. Определяем в какой из частей остался корень уравнения, пользуясь условиями:

$$\text{если } f(a) \cdot f(c) < 0, \text{ то } x^* \in (a, c),$$

$$\text{если } f(c) \cdot f(b) < 0, \text{ то } x^* \in (c, b),$$

$$\text{если } f(c) = 0, \text{ то } x^* = c.$$

Повторяем 1 шаг для выбранного интервала.

Априорная оценка погрешности: $|x^* - x_k| < \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$.

Апостериорная оценка погрешности: $|b_k - a_k| < 2\varepsilon$.

Пример 3. Применим метод половинного деления для уточнения корня $x_2^* \in (-1,1)$ уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$.

$$1 \text{ шаг) } a = -1, b = 1 \quad c = \frac{-1+1}{2} = 0,$$

$$f(-1) > 0, f(1) < 0, f(0) = 2 > 0 \Rightarrow x^* \in (0;1)$$

$$2 \text{ шаг) } a = 0, b = 1 \quad c = \frac{0+1}{2} = 0,5,$$

$$f(0) > 0, f(1) < 0, f(0,5) < 0 \Rightarrow x^* \in (0;0,5)$$

$$3 \text{ шаг) } a = 0, b = 0,5 \quad c = \frac{0+0,5}{2} = 0,25,$$

$$f(0) > 0, f(0,5) < 0, f(0,25) > 0 \Rightarrow x^* \in (0,25;0,5).$$

Пусть $\tilde{x} = \frac{0,25+0,5}{2} = 0,375$. Вычисли погрешность решения:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} = \frac{0,5-0,25}{2} = 0,125.$$

2. Метод хорд.

Дано уравнение $f(x) = 0$, решение которого принадлежит интервалу $x^* \in (a,b)$. Причем на интервале $x^* \in (a,b)$ функция $f''(x)$ имеет постоянный знак.

Определяем какой из концов интервала будем приближать к корню:

если $f''(x)f(a) < 0$ - двигается левый конец интервала – $a = c$.

если $f''(x)f(b) < 0$ - двигается правый конец интервала – $b = c$.

$$1 \text{ шаг) Выбираем пробную точку по формуле } c = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)}.$$

Повторяем 1 шаг для нового интервала. Решением будет последнее значение c .

Оценка погрешности: $|c_{k-1} - c_k| < \varepsilon$.

Пример 4. Применим метод хорд для уточнения корня $x_2^* \in (-1,1)$ уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$. Вычислим вторую производную функции $f(x) = x^3 - 5x + 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 5, \quad f''(x) = 6x.$$

На интервале $(-1,1)$ вторая производная меняет знак. Следовательно, необходимо его уменьшить. Рассмотрим новый интервал $(0,1)$ - на этом интервале $f''(x) > 0$, причем $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, следовательно, $x_2^* \in (0,1)$. Итак, $a = 0$, $b = 1$.

Определяем какой из концов интервала $(0,1)$ будем приближать к корню:

$f''(x)f(a) > 0$, $f''(x)f(b) < 0$, следовательно приближаться к корню будет правый конец интервала.

$$1 \text{ шаг) } b_1 = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)} = 1 - \frac{f(1)(0-1)}{f(0)-f(1)} = 1 - \frac{-(-2)}{2-(-2)} = 0,5$$

$$2 \text{ шаг) } b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)(a-b_1)}{f(a)-f(b_1)} = 1 - \frac{f(1)(0-0,5)}{f(0)-f(0,5)} = 0,421$$

За решение примем $\tilde{x} = b_2 = 0,421$. Погрешность полученного решения: $\varepsilon_2 = |b_2 - b_1| = |0,5 - 0,421| = 0,097$.

3. Метод Ньютона (касательных).

Дано уравнение $f(x) = 0$, решение которого принадлежит интервалу $x^* \in (a,b)$. Причем на интервале $x^* \in (a,b)$ функция $f''(x)$ имеет постоянный знак.

Определяем какой из концов интервала будем приближать к корню:

если $f''(x)f(a) > 0$ - двигается левый конец интервала – $a = c$.

если $f''(x)f(b) > 0$ - двигается правый конец интервала – $b = c$.

1 шаг) Выбираем пробную точку по формуле $c_{k+1} = c_k - \frac{f(c_k)}{f'(c_k)}$.

Повторяем 1 шаг. Решением будет последнее значение c .

Оценка погрешности: $|c_{k-1} - c_k| < \varepsilon$.

Пример 5. Применим метод касательных для уточнения корня $x_2^* \in (0,1)$ уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$. $f''(x) > 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$.

Определяем какой из концов интервала $(0,1)$ будем приближать к корню:

$f''(x)f(a) > 0$, $f''(x)f(b) < 0$, следовательно приближаться к корню будет левый конец интервала. $f'(x) = 3x^2 - 5$.

$$1 \text{ шаг) } c_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{-5} = 0,4$$

$$2 \text{ шаг) } c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} = 0,4 - \frac{f(0,4)}{f'(0,4)} = 0,414$$

За решение примем $\tilde{x} = c_2 = 0,414$. Погрешность полученного решения:
 $\varepsilon_2 = |c_2 - c_1| = |0,4 - 0,414| = 0,014$.

4. Комбинированный метод.

Заключается в одновременном приближении к корню с двух сторон – с одной по методу хорд, с другой – по методу касательных.

Выбираем формулы для пересчета концов интервала следующим образом:

$$\text{если } f''(x)f(b) > 0, \quad f''(x)f(a) < 0, \quad \text{то } a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)},$$

$$b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}$$

$$\text{если } f''(x)f(b) < 0, \quad f''(x)f(a) > 0, \quad \text{то } b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)},$$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$$

Пример 6. Применим комбинированный метод для уточнения корня $x_2^* \in (0,1)$ уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$. $f''(x) > 0$, $a = 0$, $f(0) > 0$, $b = 1$, $f(1) < 0$. $f'(x) = 3x^2 - 5$

Так как $f''(x)f(b) < 0$, а $f''(x)f(a) > 0$, то пересчет интервала будем выполнять по формулам: $b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$, $a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$.

$$1 \text{ шаг) } a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{-5} = 0,4,$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} = 1 - \frac{f(1)(1 - 0)}{f(1) - f(0)} = 1 - \frac{-2}{-2 - 0} = 0,5$$

$$2 \text{ шаг) } a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 0,4 - \frac{f(0,4)}{f'(0,4)} = 0,414,$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 0,5 - \frac{f(0,5)(0,5 - 0,4)}{f(0,5) - f(0,4)} = 0,415.$$

$$3 \text{ шаг) } a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = 0,414 - \frac{f(0,414)}{f'(0,414)} = 0,414,$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = 0,415 - \frac{f(0,415)(0,415 - 0,414)}{f(0,415) - f(0,414)} = 0,414.$$

5. Метод простых итераций.

Дано уравнение $f(x)=0$, решение которого принадлежит интервалу $x^* \in (a,b)$. Преобразуем данное уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Полученная формула и будет итерационной: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда, если выполняются условия:

- 1) $\varphi(x) \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b]$,
- 2) $\exists q: |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in (a,b)$

то последовательность $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$, при этом справедливы оценки погрешности:

$$\text{Априорная: } |x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

$$\text{Апостериорная: } |x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}|.$$

Пример 7. Применим метод простых итераций для уточнения корня $x_2^* \in (0,1)$ уравнения $x^3 - 5x + 2 = 0$. Выразим переменную x из уравнения используя первое слагаемое: $x = \sqrt[3]{5x-2} = \varphi_1(x)$. Проверим условия теоремы:

$$1) \min_{x \in [0,1]} \varphi_1(x) = \varphi_1(0) = \sqrt[3]{-2} \approx -1,26, \quad \max_{x \in [0,1]} \varphi_1(x) = \varphi_1(1) = \sqrt[3]{5-2} \approx 1,44.$$

Значения функции $\varphi_1(x)$ не содержатся в интервале $(0,1)$. Следовательно, требуется искать другую функцию.

Выразим переменную x из уравнения используя второе слагаемое:

$$x = \frac{x^3 + 2}{5} = \varphi_2(x).$$

Для этой функции условия теоремы выполняются:

$$1) \max_{x \in [0,1]} \varphi_2(x) = \varphi_2(1) = 0,6, \quad \min_{x \in [0,1]} \varphi_2(x) = \varphi_2(0) = 0,4. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi_2(x) \in [a, b].$$

$$2) \varphi'_2(x) = \frac{3}{5}x^2, \quad \|\varphi'_2(x)\|_{\forall x \in (0,1)} \leq 0,6 < 1.$$

Следовательно, можно использовать итерационную формулу:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 2}{5}.$$

Начинаем итерации с любого значения $x \in [a, b]$. Пусть $x_0 = 0$:

$$x_1 = \frac{x_0^3 + 2}{5} = \frac{0 + 2}{5} = 0,4,$$

$$x_2 = \frac{x_1^3 + 2}{5} = \frac{0,4^3 + 2}{5} = 0,413,$$

$$x_3 = \frac{x_2^3 + 2}{5} = \frac{0,413^3 + 2}{5} = 0,414.$$

Оценим погрешность полученного решения:

$$\varepsilon_3 \leq \frac{0,6}{1 - 0,6} |0,414 - 0,413| = 0,0015.$$

Замечание. Иногда не удастся выразить x таким образом, чтобы получилась функция, удовлетворяющая условиям сходимости. В этом случае ее получают следующими преобразованиями данного уравнения:

$$f(x) = 0,$$

$$0 = -\lambda f(x),$$

$$x = x - \lambda f(x).$$

Функция (число) λ подбирается из условия выполнения условий теоремы для функции $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$.

2.1.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Отделить корни аналитически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до 0,01. Вычислить невязку решения.

1.1. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$

1.1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$

2. Отделить корни графически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до 0,01. Вычислить невязку решения.

2.1. $x^2 - 10 \sin x = 0,4$

2.2. $(x + 3) \cos x = 1, -2\pi \leq x \leq 2\pi$

3. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,01. Вычислить невязку решения.

3.1. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 0$

3.2. $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$

4. Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,01. Вычислить невязку решения.

4.1. $x^3 + x - 3 = 0$

4.2. $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,4 = 0$

5. Комбинированным методом хорд и касательных решить уравнение третьей степени, вычислив корни с точностью до 0,01. Вычислить невязку решения.

5.1. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

5.2. $x^3 - 3x^2 + 3,5 = 0$

6. Уточнить один из корней методом простых итераций с точностью до 0,01. Вычислить невязку решения.

6.1. $x + \cos x = 1$

6.2. $x^3 - 0,1x^2 + 0,3x - 0,6 = 0$

2.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

2.2.1. Теоретические сведения

Система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Система в векторной форме: $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \text{матрица коэффициентов системы,}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} - \text{вектор свободных членов, } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - \text{вектор неизвестных.}$$

При использовании прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений решение находится за конечное число арифметических операций.

Погрешность при применении прямых методов бывает только вычислительная. Для контроля погрешности считают невязку решения системы: $\xi = b - Ax$.

Метод Гаусса.

Прямой ход - пересчет коэффициентов по формулам:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, \dots, n,$$

$$k=1, 2, \dots, n-1.$$

Обратный ход – нахождение решения по формулам:

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = n, n-1, n-2, \dots, 1.$$

Метод Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента

заключается в том, что на каждом шаге прямого хода уравнения переставляются, так чтобы деление производилось на наибольший по модулю в данном столбце элемент.

Пример 1. Решить систему методом Гаусса
$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0, \\ 8x - 8y + 7z = -12, \\ 12x - 5y + 5z = 4. \end{cases}$$

Прямой ход. $k=1$. Выбираем наибольший по модулю коэффициент в первом столбце и меняем первое уравнение с третьим:

$$\begin{cases} 12x - 5y + 5z = 4, \\ 8x - 8y + 7z = -12, \\ 4x - 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Пересчитываем коэффициенты и свободные члены, исключая x из второго и третьего уравнений:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1, \quad i, j=2,3,$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} = -8 - \frac{8}{4} \cdot (-3) = -2,$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} = 7 - \frac{8}{12} \cdot 5 \approx 3,67,$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} = -3 - \frac{4}{12} \cdot (-5) \approx -1,33,$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} = 2 - \frac{4}{12} \cdot 5 \approx 0,33,$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 = -12 - \frac{8}{12} \cdot 4 \approx -14,66,$$

$$b_3^{(1)} = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 = 0 - \frac{4}{12} \cdot 4 \approx 1,33,$$

Коэффициенты первого столбца обнуляем. Система после первого шага:

$$\begin{cases} 12x - 5y + 5z = 4, \\ -4,66y + 3,67z = -14,66, \\ -1,33y + 0,33z = -1,33. \end{cases}$$

$k=2$. Наибольший по модулю коэффициент во втором столбце стоит во втором уравнении, следовательно его и оставляем главным элементом. Пересчитываем коэффициенты и свободный член третьего уравнения, исключая из него y :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}, \quad i, j=3,$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)} = 0,33 - \frac{-1,33}{-4,66} \cdot 3,67 \approx -0,71,$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)} = -1,33 - \frac{-1,33}{-4,66} \cdot (-14,66) \approx 2,85.$$

Коэффициент второго столбца обнуляем. Система после второго шага:

$$\begin{cases} 12x - 5y + 5z = 4, \\ -4,66y + 3,67z = -14,66, \\ -0,71z = 5,51. \end{cases}$$

Обратный ход.

$$z = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{2,85}{-0,71} \approx -4,01,$$

$$y = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} z}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-14,66 - 3,67 \cdot (-4,01)}{-4,66} \approx -0,01,$$

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y - a_{13}z}{a_{11}} = \frac{4 - (-5) \cdot (-0,01) - 5 \cdot (-4,01)}{12} \approx 2.$$

Вычисляем невязку найденного решения $\begin{pmatrix} 2 \\ -0,01 \\ -4,01 \end{pmatrix}$. Подставляем его в

систему:

$$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-0,01) + 2 \cdot (-4,01) = 0,01, \\ 8 \cdot 2 - 8 \cdot (-0,01) + 7 \cdot (-4,01) = -11,99, \\ 12 \cdot 2 - 5 \cdot (-0,01) + 5 \cdot (-4,01) = 4. \end{cases}$$

Вычитаем из вектора свободных членов получившийся вектор:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,01 \\ -11,99 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,01 \\ -0,01 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Норма невязки: } \|\xi\| = \sqrt{(-0,01)^2 + (-0,01)^2 + 0^2} \leq 0,02.$$

Для вычисления определителя используют прямой ход метода Гаусса, после чего вычисляют определитель треугольной матрицы, как произведение диагональных элементов.

Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 5 \\ 8 & -8 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

После прямого хода (см. пример 1) получаем эквивалентную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 5 \\ 8 & -8 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & -5 & 5 \\ 0 & -4,66 & 3,67 \\ 0 & 0 & -0,71 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель: $\det A \approx 12 \cdot (-4,66) \cdot (-0,71) = 39,7$.

Для нахождения обратной матрицы для матрицы A решают системы вида: $A \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$; $A \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$; ..., $A \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$

$$\text{где } \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \dots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

После чего $A^{-1} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]$.

Пример 3. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 5 \\ 8 & -8 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Необходимо решить три системы:

$$\begin{cases} 12x_{11} - 5x_{12} + 5x_{13} = 1, \\ 8x_{11} - 8x_{12} + 7x_{13} = 0, \\ 4x_{11} - 3x_{12} + 2x_{13} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_{21} - 5x_{22} + 5x_{23} = 0, \\ 8x_{21} - 8x_{22} + 7x_{23} = 1, \\ 4x_{21} - 3x_{22} + 2x_{23} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_{31} - 5x_{32} + 5x_{33} = 0, \\ 8x_{31} - 8x_{32} + 7x_{33} = 0, \\ 4x_{31} - 3x_{32} + 2x_{33} = 1. \end{cases}$$

Матрицы коэффициентов всех систем одинаковые и приводятся к треугольному виду один раз.

Прямой ход.

$k=1$. Коэффициенты уже вычисляли (пример 1):

$$a_{22}^{(1)} = -2, \quad a_{23}^{(1)} \approx 3,67, \quad a_{32}^{(1)} \approx -1,33, \quad a_{33}^{(1)} \approx 0,33,$$

Пересчитываем свободные члены:

первой системы:

$$b_2^{(1)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 = 0 - \frac{8}{12} \cdot 1 \approx -0,66, \quad b_3^{(1)} = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 = 0 - \frac{4}{12} \cdot 1 \approx -0,33,$$

второй системы:

$$b_2^{(1)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 = 1 - \frac{8}{12} \cdot 0 = 1, \quad b_3^{(1)} = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 = 0 - \frac{4}{12} \cdot 0 = 0,$$

третьей системы:

$$b_2^{(1)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 = 0 - \frac{8}{12} \cdot 0 = 0, \quad b_3^{(1)} = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 = 1 - \frac{4}{12} \cdot 0 = 1,$$

Итак, системы после первого шага прямого хода:

$$\begin{cases} 12x_{11} - 5x_{12} + 5x_{13} = 1, \\ -4,66x_{12} + 3,67x_{13} = -0,66, \\ -1,33x_{12} + 0,33x_{13} = -0,33. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_{11} - 5x_{12} + 5x_{13} = 0, \\ -4,66x_{12} + 3,67x_{13} = 1, \\ -1,33x_{12} + 0,33x_{13} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_{11} - 5x_{12} + 5x_{13} = 0, \\ -4,66x_{12} + 3,67x_{13} = 0, \\ -1,33x_{12} + 0,33x_{13} = 1. \end{cases}$$

$k=2$. Коэффициенты уже вычисляли (пример 1): $a_{33}^{(2)} \approx -0,71$.

Пересчитываем свободные члены:

$$\text{первой системы: } b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)} = -0,33 - \frac{-1,33}{-4,66} \cdot (-0,66) \approx -0,14,$$

$$\text{второй системы: } b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)} = 0 - \frac{-1,33}{-4,66} \cdot 1 \approx -0,28,$$

третьей системы: $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)} = 1 - \frac{-1,33}{-4,66} \cdot 0 = 1.$

Итак, системы после прямого хода:

$$\begin{cases} 12x_{11} - 5x_{12} + 5x_{13} = 1, \\ -4,66x_{12} + 3,67x_{13} = -0,66, \\ -0,71x_{13} = -0,14. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_{21} - 5x_{22} + 5x_{23} = 0, \\ -4,66x_{22} + 3,67x_{23} = 1, \\ -0,71x_{23} = -0,28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_{31} - 5x_{32} + 5x_{33} = 0, \\ -4,66x_{32} + 3,67x_{33} = 0, \\ -0,71x_{33} = 1. \end{cases}$$

Выполняем обратный ход для каждой системы.

Для первой системы:

$$x_{13} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{-0,14}{-0,71} \approx 0,19,$$

$$x_{12} = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_{13}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-0,66 - 3,67 \cdot 0,19}{-4,66} \approx 0,29,$$

$$x_{11} = \frac{b_1 - a_{12} x_{12} - a_{13} x_{13}}{a_{11}} = \frac{1 - (-5) \cdot 0,29 - 5 \cdot 0,19}{12} \approx 0,125.$$

Для второй системы:

$$x_{23} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{-0,28}{-0,71} \approx 0,4,$$

$$x_{22} = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_{23}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1 - 3,67 \cdot 0,4}{-4,66} \approx 0,1,$$

$$x_{21} = \frac{b_1 - a_{12}x_{22} - a_{13}x_{23}}{a_{11}} = \frac{0 - (-5) \cdot 0,1 - 5 \cdot 0,4}{12} \approx -0,125.$$

Для третьей системы:

$$x_{33} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{1}{-0,71} \approx -1,4,$$

$$x_{32} = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_{33}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{0 - 3,67 \cdot (-1,4)}{-4,66} \approx -1,1,$$

$$x_{31} = \frac{b_1 - a_{12}x_{32} - a_{13}x_{33}}{a_{11}} = \frac{0 - (-5) \cdot (-1,1) - 5 \cdot (-1,4)}{12} \approx 0,125.$$

Итак, обратная матрица: $A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0,125 & 0,29 & 0,19 \\ -0,125 & 0,1 & 0,4 \\ 0,125 & -1,1 & -1,4 \end{pmatrix}.$

Схема Халецкого.

Раскладываем матрицу $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ на произведение двух

треугольных: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix},$

используя последовательно формулы:

$$u_{1j} = a_{1j} \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad (i = 2, 3, \dots, n);$$

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j} \quad (j = 2, 3, \dots, n);$$

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12}}{u_{22}} \quad (i = 3, 4, \dots, n);$$

...

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} \cdot u_{kn}.$$

Система $Ax = B$ заменяется на $LUx = B$.

Решение системы $LUx = B$, после введения вектора вспомогательных неизвестных y , заменяем на последовательное решение двух систем:

$$\begin{cases} Ly = B, \\ Ux = y. \end{cases} \quad \text{Обе эти системы треугольные и для их решения достаточно}$$

применить обратный ход из метода Гаусса:

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \right), \quad i = n, n-1, n-2, \dots, 1.$$

LU-разложение возможно не для каждой матрицы. Одним из достаточных условий существования такого разложения является

$$\text{диагональное преобладание: } |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}|.$$

$$\text{Пример 4. Решить систему } \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0, \\ 8x - 8y + 7z = -12, \\ 12x - 5y + 5z = 4. \end{cases} \text{ методом Халецкого.}$$

Рассчитаем элементы матриц для LU-разложения:

$$u_{1j} = a_{1j} \quad (j = 1, 2, 3): \quad u_{11} = 4, \quad u_{12} = -3, \quad u_{13} = 2,$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad (i = 2, 3): \quad l_{21} = \frac{8}{4} = 2, \quad l_{31} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j} \quad (j = 2, 3): u_{22} = -8 - 2 \cdot (-3) = -2, \quad u_{23} = 7 - 2 \cdot 2 = 3,$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}} = \frac{-5 - 3 \cdot (-3)}{-2} = -2$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23} = 5 - 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 3 = 5.$$

После LU-разложения, получим систему:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -8 & 7 \\ 12 & -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Введем вспомогательные переменные c_i и рассмотрим две треугольные системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Решаем первую систему: } \begin{cases} c_1 = 0, \\ 2c_1 + c_2 = -12, \\ 3c_1 - 2c_2 + c_3 = 4. \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = -12, \\ c_3 = -20. \end{cases}$$

$$\text{Затем вторую: } \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0, \\ -2y + 3z = -12, \\ 5z = -20. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \\ z = -4. \end{cases}$$

Метод квадратных корней для симметричных систем. В случае симметричной матрицы ее можно представить как произведение: $A = U^T \cdot U$. То есть рассчитываются элементы только одной матрицы U по формулам:

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \cdot u_{kj}}{u_{ii}} \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad j > i.$$

Система $Ax = B$ заменяется на систему $U^T Ux = B$. Решение последней системы, после введения вектора вспомогательных неизвестных y , заменяем на последовательное решение двух систем: $\begin{cases} U^T y = B, \\ Ux = y. \end{cases}$ Обе эти системы треугольные и для их решения достаточно применить обратный ход из метода Гаусса:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} y_k}{u_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \right), \quad i = n, n-1, n-2, \dots, 1.$$

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3, \\ 2x + 8y + 4z = 2, \\ 3x + 4y + 11z = 1. \end{cases}$ методом квадратных

корней.

Рассчитываем коэффициенты матрицы U :

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \cdot u_{kj}}{u_{ii}}, \quad j = 2, 3, \quad j > i.$$

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1, \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = \frac{2}{1} = 2, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{8 - 4} = 2, \quad u_{23} = \frac{a_{23} - u_{12} \cdot u_{13}}{u_{22}} = \frac{4 - 2 \cdot 3}{2} = -1,$$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2} = \sqrt{11 - 9 - 1} = 1$$

Система после разложения матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Две новых системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Выполняем обратный ход для первой из полученных систем:

$$c_1 = -3,$$

$$2c_1 + 2c_2 = 2,$$

$$3c_1 - c_2 + c_3 = 1.$$

$$c_1 = -3, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 14.$$

Подставляем вектор вспомогательных неизвестных в правые части второй системы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -3, \\ 2y - z = 4, \\ z = 14. \end{cases}$$

И решаем ее: $x = -63, \quad y = 9, \quad z = 14.$

Метод прогонки решения систем с трехдиагональными матрицами коэффициентов.

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix} \quad - \quad \text{каждое}$$

уравнение системы связывает только три неизвестных.

1) *Прямая прогонка.* Вычисление прогоночных коэффициентов по формулам:

$$\delta_1 = \frac{-d_1}{c_1}, \quad \delta_i = \frac{-d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}, \quad \lambda_i = \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}}, \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

2) *Обратная прогонка.* Нахождение решения системы по формулам:

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, \quad x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n \lambda_{n-1}}{c_n + b_n \delta_{n-1}}$$

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = -10, \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 & = -26, \\ 4x_2 + 17x_3 - 4x_4 & = -16, \\ 4x_3 + 15x_4 - 8x_5 & = -2, \\ 2x_4 + 3x_5 & = 16. \end{cases}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 17 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -10 \\ -26 \\ -16 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1) *Прямая прогонка.*

$$\delta_1 = \frac{-d_1}{c_1} = \frac{-1}{2}, \delta_2 = \frac{-d_2}{c_2 + b_2 \delta_1} = \frac{-2}{9-1} = \frac{-1}{4},$$

$$\delta_3 = \frac{-d_3}{c_3 + b_3 \delta_2} = \frac{4}{17-1} = \frac{1}{4}, \delta_4 = \frac{-d_4}{c_4 + b_4 \delta_3} = \frac{8}{15+1} = \frac{1}{2}, \delta_5 = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{c_1} = \frac{-10}{2} = -5, \lambda_2 = \frac{r_2 - b_2 \lambda_1}{c_2 + b_2 \delta_1} = \frac{-26+10}{8} = -2,$$

$$\lambda_3 = \frac{r_3 - b_3 \lambda_2}{c_3 + b_3 \delta_2} = \frac{-16+8}{16} = \frac{-1}{2}, \lambda_4 = \frac{r_4 - b_4 \lambda_3}{c_4 + b_4 \delta_3} = \frac{-2+2}{16} = 0,$$

$$\lambda_5 = \frac{r_5 - b_5 \lambda_4}{c_5 + b_5 \delta_4} = \frac{16}{3+1} = 4.$$

2) Обратная прогонка.

$$x_5 = \lambda_5 = 4,$$

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i:$$

$$x_4 = \delta_4 x_5 + \lambda_4 = 2, \quad x_3 = \delta_3 x_4 + \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$x_2 = \delta_2 x_3 + \lambda_2 = -2, \quad x_1 = \delta_1 x_2 + \lambda_1 = 1 - 5 = -4.$$

2.2.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1) Решить систему методом Гаусса:

- применить стратегию постолбцового выбора главного элемента на каждом шаге,

- рассчитать невязку решения.

$$1.1. \begin{cases} 0,68x_1 + 0,05x_2 - 0,11x_3 + 0,08x_4 = 2,15, \\ 0,21x_1 - 0,13x_2 + 0,27x_3 - 0,8x_4 = 0,44, \\ -0,11x_1 - 0,84x_2 + 0,28x_3 + 0,06x_4 = -0,83, \\ -0,08x_1 + 0,15x_2 - 0,5x_3 - 0,12x_4 = 1,16. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 1,2x_1 + 1,8x_2 - 2,7x_3 - 4,1x_4 = 1,3, \\ 10x_1 - 5,1x_2 + 1,2x_3 + 5,5x_4 = 1,2, \\ 2,2x_1 - 30,1x_2 + 3,1x_3 + 5,8x_4 = 10, \\ 10x_1 + 2,4x_2 - 30,5x_3 - 2,2x_4 = 34,1. \end{cases}$$

2) Для матриц систем из задания 1)

2.1. Вычислить обратные матрицы, используя метод Гаусса:

2.2. Вычислить определитель, используя прямой ход метода Гаусса:

3) Решить систему методом Халецкого. Рассчитать невязку решения.

$$3.1. \begin{cases} 1,35x_1 - 1,72x_2 - 0,62x_3 + 0,48x_4 = 0,93, \\ 1,08x_1 + 0,64x_2 - 0,95x_3 + 1,54x_4 = 1,64, \\ 0,88x_1 - 0,72x_2 + 1,36x_3 - 0,68x_4 = -0,85, \\ 0,64x_1 + 1,48x_2 + 0,82x_3 - 1,58x_4 = -1,32. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 1,42x_1 + 2,34x_2 - 0,88x_3 + 0,53x_4 = 0,72, \\ 0,71x_1 - 1,15x_2 + 0,53x_3 - 0,67x_4 = -0,18, \\ 0,55x_1 - 0,93x_2 - 1,42x_3 + 1,32x_4 = 0,68, \\ 0,44x_1 - 0,25x_2 + 1,92x_3 - 1,08x_4 = 0,43. \end{cases}$$

4) Решить систему методом квадратных корней. Рассчитать невязку решения.

$$4.1. \begin{cases} 4,25x_1 - 1,48x_2 + 0,73x_3 = 1,44, \\ -1,48x_1 + 1,73x_2 - 1,85x_3 = 2,73, \\ 0,73x_1 - 1,85x_2 + 1,93x_3 = -0,64. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} 1,65x_1 - 1,76x_2 + 0,77x_3 = 2,15, \\ -1,76x_1 + 1,04x_2 - 2,61x_3 = 0,82, \\ 0,77x_1 - 2,61x_2 - 3,18x_3 = -0,73. \end{cases}$$

5) Решить систему методом прогонки.

$$5.1. \begin{cases} 1,35x_1 - 1,72x_2 & = 0,93, \\ 1,08x_1 + 0,64x_2 - 0,95x_3 & = 1,64, \\ -0,72x_2 + 1,36x_3 - 0,68x_4 & = -0,85, \\ 0,82x_3 - 1,58x_4 + 0,11x_5 & = -1,32, \\ 0,12x_4 - 0,24x_5 & = -1,1. \end{cases}$$

$$5.2. \begin{cases} -0,55x_1 - 2,02x_2 & = -1,64, \\ 1,18x_1 - 1,62x_2 + 0,9x_3 & = 0,24, \\ -1,22x_2 + 0,16x_3 + 0,87x_4 & = 1,5, \\ 1,12x_3 + 0,08x_4 - 0,15x_5 & = -1,12, \\ 1,21x_4 - 1,4x_5 & = -1,21. \end{cases}$$

2.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

2.3.1. Теоретические сведения

Система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = m_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = m_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = m_n. \end{cases}$$

Система в векторной форме: $Ax = m$, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \text{матрица коэффициентов системы,}$$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{bmatrix} - \text{вектор свободных членов, } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - \text{вектор неизвестных.}$$

При использовании итерационных методов решения систем линейных

алгебраических уравнений решение получается в результате повторяющихся единообразных простых операций – **итераций**. Решение стремится к точному при бесконечном повторении итераций.

Метод простых итераций.

Выразив из первого уравнения x_1 , из второго - x_2 , ..., из n -го - x_n , преобразуем систему к виду для итераций:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + c_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n + c_2, \\ \dots, \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n + c_n. \end{cases}$$

Или в векторной форме:

$x = Bx + c$, где

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Зададимся начальным вектором $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Остальные приближения к решению будем рассчитывать по итерационным формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2, \\ \dots, \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k)} + c_n. \end{cases}$$

Или в векторной форме: $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Пример 1. Преобразовать систему
$$\begin{cases} 1,1x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 1,6 \\ -0,1x_1 + 1,2x_2 + 0,2x_3 = -2,3 \\ 0,2x_1 - 0,1x_2 + 1,1x_3 = 1,5 \end{cases}$$
 к виду

для итераций и сделать две итерации.

Выразим из первого уравнения x_1 , из второго - x_2 , из 3-го - x_3 :

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_1 + 0,2x_2 - 0,1x_3 + 1,6 \\ x_2 = 0,1x_1 - 0,2x_2 - 0,2x_3 - 2,3 \\ x_3 = -0,2x_1 + 0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,5 \end{cases}$$

Итерационные формулы будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,1x_1^{(k)} + 0,2x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,6 \\ x_2^{(k+1)} = 0,1x_1^{(k)} - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} - 2,3 \\ x_3^{(k+1)} = -0,2x_1^{(k)} + 0,1x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,5 \end{cases}$$

За начальный вектор возьмем $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. По итерационным формулам получаем первое приближение к решению:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,1x_1^{(0)} + 0,2x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} + 1,6 = -0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 + 1,6 = 1,6 \\ x_2^{(1)} = 0,1x_1^{(0)} - 0,2x_2^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} - 2,3 = 0,1 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 - 2,3 = -2,3 \\ x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} + 0,1x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} + 1,5 = -0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 + 1,5 = 1,5 \end{cases}$$

Итак, $x^{(1)} = (1,6, -2,3, 1,5)^T$. Подставляя в итерационные формулы $x^{(1)}$, получим второе приближение к решению:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0,1x_1^{(1)} + 0,2x_2^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} + 1,6 = -0,1 \cdot 1,6 + 0,2 \cdot (-2,3) - 0,1 \cdot 1,5 + 1,6 = 0,83 \\ x_2^{(2)} = 0,1x_1^{(1)} - 0,2x_2^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} - 2,3 = 0,1 \cdot 1,6 - 0,2 \cdot (-2,3) - 0,2 \cdot 1,5 - 2,3 = -1,98 \\ x_3^{(2)} = -0,2x_1^{(1)} + 0,1x_2^{(1)} - 0,1x_3^{(1)} + 1,5 = -0,2 \cdot 1,6 + 0,1 \cdot (-2,3) - 0,1 \cdot 1,5 + 1,5 = 0,8 \end{cases}$$

Итак, $x^{(2)} = (0,83, -1,98, 0,8)^T$. Подставляя в итерационные формулы $x^{(2)}$, получим третье приближение к решению:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0,1x_1^{(3)} + 0,2x_2^{(3)} - 0,1x_3^{(3)} + 1,6 = -0,1 \cdot 0,83 + 0,2 \cdot (-1,98) - 0,1 \cdot 0,8 + 1,6 = 1,041 \\ x_2^{(3)} = 0,1x_1^{(3)} - 0,2x_2^{(3)} - 0,2x_3^{(3)} - 2,3 = 0,1 \cdot 0,83 - 0,2 \cdot (-1,98) - 0,2 \cdot 0,8 - 2,3 = -1,981 \\ x_3^{(3)} = -0,2x_1^{(3)} + 0,1x_2^{(3)} - 0,1x_3^{(3)} + 1,5 = -0,2 \cdot 0,83 + 0,1 \cdot (-1,98) - 0,1 \cdot 0,8 + 1,5 = 1,056 \end{cases}$$

Итак, $x^{(3)} = (1.041, -1.981, 1.056)^T$.

В отличие от прямых методов для сходимости итерационных методов к решению требуется выполнение определенных условий. Например, для метода простых итераций эти условия определяются следующей теоремой.

Теорема. Пусть $\|B\| \leq q < 1$. Тогда при любом начальном векторе $x^{(0)}$ метод простых итераций сходится к единственному решению x^* и при всех $k \in N$ справедливы оценки погрешности:

$$1) \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| - \text{апостериорная,}$$

$$2) \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| - \text{априорная.}$$

Норма матрицы определяется по формуле $\|B\| = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$

(максимальная сумма в строке) или по формуле $\|B\| = \max_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$

(максимальная сумма в столбце).

Пример 2. Проверить условия теоремы о сходимости и рассчитать число итераций достаточное для достижения точности решения не меньше чем $\varepsilon = 0,001$ для итерационной формулы из примера 1:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,1x_1^{(k)} + 0,2x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,6 \\ x_2^{(k+1)} = 0,1x_1^{(k)} - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} - 2,3 \\ x_3^{(k+1)} = -0,2x_1^{(k)} + 0,1x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,5 \end{cases}$$

$$\text{Матрица } B = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,2 & -0,1 \\ 0,1 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

Рассчитаем норму:

$$\begin{aligned} \|B\| &= \max_{i \in \{1,2,3\}} \sum_{j=1}^3 |b_{ij}| = \max\{|-0,1| + |0,2| + |-0,1|, |0,1| + |-0,2| + |-0,2|, |-0,2| + |0,1| + |-0,1|\} \\ &= \max\{0,4; 0,5; 0,4\} = 0,5. \end{aligned}$$

Проверяем условия теоремы: $q = 0,5 < 1$, следовательно данные итерационные формулы сходятся к точному решению системы.

Используя формулу 1) априорной оценки погрешности из теоремы, рассчитаем число итераций, необходимых для достижения точности решения $\varepsilon = 0,001$:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{0,5^k}{1 - 0,5} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon.$$

Для вычисления числа итераций k , решаем неравенство:

$$\frac{0,5^k}{1 - 0,5} \|(1,6, -2,3, 1,5)^T - (0, 0, 0)^T\| \leq 0,001$$

$$0,5^{k-1} \cdot \sqrt{1,6^2 + (-2,3)^2 + 1,5^2} \leq 0,001$$

$$0,5^{k-1} \cdot 2,3 \leq 0,001$$

$$0,5^{k-1} \leq 0,00044$$

$$k - 1 \geq \log_{0,5} 0,00044,$$

$$k \geq 12,5.$$

Итак, для достижения точности решения не меньше чем $\varepsilon = 0,001$, достаточно выполнить 13 итераций.

Пример3. Определить погрешность решения системы, полученного в примере 1.

Воспользуемся формулой 2) из теоремы для апостериорной оценки погрешности:

$$\varepsilon = \|x^* - x^{(3)}\| \leq \frac{0,5}{1-0,5} \|x^{(3)} - x^{(2)}\|$$

$$\varepsilon \leq \frac{0,5}{1-0,5} \|(1.041, -1.981, 1.056)^T - (0.83, -1.98, 0.8)^T\|$$

$$\varepsilon \leq \frac{0,5}{1-0,5} \|(0.211, -0.001, 0.256)^T\|$$

$$\varepsilon \leq \frac{0,5}{1-0,5} \|\sqrt{0.211^2 + (-0.001)^2 + 0.256^2}\|$$

$$\varepsilon \leq 0,256.$$

Формула Якоби для приведения системы к итерационной формуле.

Для программирования метода простых итераций система хранится в матричной форме и преобразования системы к виду пригодному для итераций требуется проводить также с использованием матриц по формуле Якоби.

Для метода Якоби матрицу коэффициентов системы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

представляют в виде суммы трех матриц:

$$A = L + D + R,$$

где

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда система $Ax = b$ преобразуется к виду:

$$Lx + Dx + Rx = b,$$

выражаем вектор неизвестных:

$$x = -D^{-1}(L + R)x + D^{-1}b.$$

Последнее матричное уравнение и задает итерационную формулу:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c,$$

где

$$B = -D^{-1}(L + R), \quad c = D^{-1}b.$$

При этом обращение диагональной матрицы D производится

обращением ее диагональных элементов: $D^{-1} = \left(\frac{1}{a_{ii}} \right)_{i=1}^n$.

Пример 4. Преобразовать методом Якоби к виду для итераций систему:

$$\begin{cases} 1,1x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 1,6, \\ -0,1x_1 + 1,2x_2 + 0,2x_3 = -2,3, \\ 0,2x_1 - 0,1x_2 + 1,1x_3 = 1,5. \end{cases}$$

Представим матрицу коэффициентов системы, как сумму трех матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,2 & 0,2 \\ 0,2 & -0,1 & 1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & -0,1 & 1,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Итак, } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B &= -D^{-1}(L + R) = \begin{pmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\
&= - \begin{pmatrix} 0,909 & 0 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,909 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & -0,1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,182 & 0,091 \\ -0,083 & 0 & 0,167 \\ 0,182 & -0,091 & 0 \end{pmatrix}. \\
c &= D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0,909 & 0 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,909 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,6 \\ -2,3 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,909 \cdot 1,6 \\ -0,833 \cdot 2,3 \\ 0,909 \cdot 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4544 \\ -1,9159 \\ 1,3635 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Итерационная формула после преобразований Якоби:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + c = \begin{pmatrix} 0 & -0,182 & 0,091 \\ -0,083 & 0 & 0,167 \\ 0,182 & -0,091 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1,4544 \\ -1,9159 \\ 1,3635 \end{pmatrix}.$$

Метод Зейделя.

Для ускорения сходимости метода простых итераций используют в качестве итерационной формулы следующую:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2, \\ \dots, \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k)} + c_n. \end{cases}$$

В последней формуле при выполнении $k+1$ итерации, начиная со второго уравнения системы используется результат $k+1$ итерации.

Пример 5. Для системы
$$\begin{cases} 1,1x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 1,6, \\ -0,1x_1 + 1,2x_2 + 0,2x_3 = -2,3, \\ 0,2x_1 - 0,1x_2 + 1,1x_3 = 1,5. \end{cases}$$
применить метод

Зейделя.

Составим итерационную формулу (см. пример 1):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,1x_1^{(k)} + 0,2x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,6, \\ x_2^{(k+1)} = 0,1x_1^{(k+1)} - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} - 2,3, \\ x_3^{(k+1)} = -0,2x_1^{(k+1)} + 0,1x_2^{(k+1)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,5. \end{cases}$$

Зададим начальное приближение: $x^{(0)} = (0,0,0)$. Выполним итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1,6, \\ x_2^{(1)} = 0,1 \cdot 1,6 - 2,3 = -2,14, \\ x_3^{(1)} = 0,1 \cdot 1,6 + 0,1 \cdot (-2,14) + 1,5 = 0,966. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0,1 \cdot 1,6 + 0,2 \cdot (-2,14) - 0,1 \cdot 0,966 + 1,6 = 0,915, \\ x_2^{(2)} = 0,1 \cdot 0,915 - 0,2 \cdot (-2,14) - 0,2 \cdot 0,966 - 2,3 = -1,974, \\ x_3^{(2)} = -0,2 \cdot 0,915 + 0,1 \cdot (-1,974) - 0,1 \cdot 0,966 + 1,5 = 1,023. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0,1 \cdot 0,915 + 0,2 \cdot (-1,974) - 0,1 \cdot 1,023 + 1,6 = 1,011, \\ x_2^{(3)} = 0,1 \cdot 1,011 - 0,2 \cdot (-1,974) - 0,2 \cdot 1,023 - 2,3 = -2,009, \\ x_3^{(3)} = -0,2 \cdot 1,011 + 0,1 \cdot (-2,009) - 0,1 \cdot 1,023 + 1,5 = 0,995. \end{cases}$$

Известно, что точное решение данной системы: $x^* = (1, -2, 1)$.

Сравним погрешность решений полученных за три итерации методом простых итераций (см. пример 1) $x_{МПИ}^{(3)} = (1.041, -1.981, 1.056)^T$ и методом

Зейделя $x_3^{(3)} = (1.011, -2.009, 0.995)^T$.

$$\|x^* - x_3^{(3)}\| = \left\| \begin{pmatrix} -0.011 \\ 0.009 \\ 0.005 \end{pmatrix} \right\| = 0,011, \quad \|x^* - x_{МПИ}^{(3)}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.211 \\ -0.001 \\ 0.256 \end{pmatrix} \right\| = 0,256.$$

Для преобразования системы в матричной форме к виду для итераций по методу Зейделя применяется формула Якоби:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

Оценка сходимости метода Зейделя производится аналогично оценке сходимости метода простых итераций.

2.3.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

1. Оценить число шагов, необходимых для решения системы методом простых итераций с точностью $\varepsilon=0,001$. Выполнить 3 итерации. Оценить погрешность полученного решения.

$$1.1. \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,05x_2 + 0,11x_3 - 0,08x_4 + 2,15 \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,16x_2 - 0,28x_3 - 0,06x_4 - 0,83 \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,15x_2 + 0,12x_4 + 1,16 \\ x_4 = -0,21x_1 + 0,13x_2 - 0,27x_3 + 0,44 \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,23x_2 + 0,11x_3 - 0,06x_4 + 0,67 \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,12x_2 - 0,33x_3 - 0,88 \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,32x_2 - 0,15x_3 + 0,07x_4 - 0,18 \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,11x_2 + 0,09x_3 - 0,12x_4 + 1,44 \end{cases}$$

2. Методом простых итераций решить с точностью 0,001 систему линейных уравнений, приведя ее к виду, удобному для итераций, используя формулу Якоби. Проверить условия сходимости, при необходимости преобразовать систему, так чтобы выполнялось условие диагонального преобладания.

$$2.1. \begin{cases} 4,5x_1 - 1,8x_2 + 3,6x_3 = -1,7 \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 1,2x_3 = 3,6 \\ 1,8x_1 + 2,5x_2 + 4,6x_3 = 2,2 \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5 \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$$

3. Методом Зейделя решить с точностью 0,001 системы линейных уравнений из задания 2, приведя их к виду, удобному для итераций,

используя формулу Якоби. Проверить условия сходимости, при необходимости преобразовать системы, так чтобы выполнялось условие диагонального преобладания

2.4. Методы решения алгебраических проблем собственных значений.

2.4.1 Теоретические сведения

Собственным вектором оператора $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ называется

вектор $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ для которого выполняется равенство: $Ax = \lambda x$.

Число λ называется **собственным значением** оператора A .

Для нахождения всех собственных векторов решается система уравнений:

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad (1)$$

где матрица системы $A - \lambda E = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$.

Для существования нетривиальных решений системы (1) ее определитель должен быть равен 0:

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) представляет собой алгебраическое уравнение степени n :

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0. \quad (3)$$

Решения уравнения (3) являются собственными значениями оператора A .

После решения уравнения (3) для каждого собственного значения вычисляют собственный вектор, решая систему (1).

Пример 1. Найдём собственные числа и векторы оператора $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим уравнение (2) для поиска собственных значений:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Для поиска собственных векторов составим системы (1), используя каждое из найденных собственных значений:

$$\text{Для } \lambda_1 = 3: \begin{cases} (2-3)x_{11} - x_{12} = 0, \\ -x_{11} + (2-3)x_{12} = 0. \end{cases}$$

$$-x_{11} - x_{12} = 0,$$

$$x_{11} = 1, \quad x_{12} = -1,$$

$$\text{Итак, } x_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Для } \lambda_1 = 1: \begin{cases} (2-1)x_{11} - x_{12} = 0, \\ -x_{11} + (2-1)x_{12} = 0. \end{cases}$$

$$x_{11} - x_{12} = 0,$$

$$x_{11} = 1, \quad x_{12} = 1,$$

$$\text{Итак, } x_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Степенной метод

1) Степенной метод нахождения наибольшего по модулю собственного значения оператора.

Пусть A – матрица размера $n \times n$ имеет ровно n линейно независимых собственных векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и собственные числа $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Вычисляем наибольшее по модулю собственное значение λ_1 и соответствующий ему собственный вектор.

Начиная с произвольного начального вектора $y^{(0)}$, строим последовательность векторов по итерационной формуле: $y^{(k)} = Ay^{(k-1)}$.

$$\frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_{1i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

То есть на каждой итерации находим n приближений к первому собственному значению. Или интервал, в котором находится точное собственное значение: $\lambda_1 \in \left(\min_i \lambda_{1i}, \max_i \lambda_{1i} \right)$.

Если за приближение взять середину интервала $\lambda_1 \approx \frac{\min_i \lambda_{1i} + \max_i \lambda_{1i}}{2}$, то

погрешностью найденного решения будет $\varepsilon \leq \frac{\max_i \lambda_{1i} - \min_i \lambda_{1i}}{2}$.

При этом $y^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha x_1$.

Пример 2. Найдём наибольшее по модулю собственное число матрицы

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ степенным методом:

Зададим начальный вектор $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Выполняем итерации:

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(2)} \geq \frac{5}{2} = 2,5 \quad \lambda_1^{(2)} \leq \frac{-4}{-1} = 4,$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(3)} \geq \frac{14}{5} = 2,8$$

$$\lambda_1^{(3)} \leq \frac{-3}{-4} = 3,25,$$

$$y^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(4)} \geq \frac{41}{14} = 2,929$$

$$\lambda_1^{(4)} \leq \frac{-40}{-13} = 3,077,$$

$$y^{(5)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ -120 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(5)} \geq \frac{122}{41} = 2,976$$

$$\lambda_1^{(5)} \leq \frac{-120}{-40} = 3.$$

Итак, $2,976 \leq \lambda_1^{(5)} \leq 3$. Примем за $\lambda_1 \approx \frac{3+2,976}{2} \approx 3$.

Погрешность вычисления $\varepsilon \leq \frac{3-2,976}{2} = 0,012$.

Собственный вектор: $x_1 \approx \alpha \frac{y^{(5)}}{|y^{(5)}|} = \alpha \begin{pmatrix} 0,71 \\ -0,70 \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Для ускорения сходимости итерационного процесса можно воспользоваться возведением матрицы в степень.

Пример 3. Найдем наибольшее по модулю собственное число матрицы

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ степенным методом, используя $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$:

Зададим начальный вектор $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Выполняем две итерации

используя A^2 :

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -40 \end{pmatrix},$$

Третью итерацию выполним, используя матрицу A :

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ -120 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(3)} \geq \frac{122}{41} = 2,976$$

$$\lambda_1^{(3)} \leq \frac{-120}{-40} = 3.$$

Таким образом, решение, соответствующее примеру 2, удалось получить уже на третьей итерации.

Замечание 2. Избежать быстрого возрастания значений при применении степенного метода поможет пошаговая нормировка полученных векторов:

Пример 4. Применим пошаговую нормировку для решения задачи из примера 2:

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\text{Нормируем вектор: } \frac{y^{(1)}}{|y^{(1)}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2,24} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,9 \\ -0,45 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 \\ -0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,24 \\ -1,8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(2)} \geq \frac{2,24}{0,9} = 2,501$$

$$\lambda_1^{(2)} \leq \frac{-1,8}{-1} = 1,8,$$

$$\text{Нормируем вектор: } \frac{y^{(2)}}{|y^{(2)}|} = \frac{1}{\sqrt{2,24^2 + 1,8^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2,24 \\ -1,8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,781 \\ -0,625 \end{pmatrix}$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,781 \\ -0,625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,186 \\ -2,03 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(3)} \geq \frac{2,186}{0,781} = 2,8 \quad \lambda_1^{(3)} \leq \frac{-2,03}{-0,625} = 3,25,$$

$$\text{Нормируем вектор: } \frac{y^{(3)}}{|y^{(3)}|} = \frac{1}{\sqrt{2,24^2 + 1,8^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2,186 \\ -2,03 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,733 \\ -0,68 \end{pmatrix}$$

$$y^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,733 \\ -0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,146 \\ -2,094 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(4)} \geq \frac{2,146}{0,733} = 2,929 \quad \lambda_1^{(4)} \leq \frac{-2,094}{-0,68} = 3,077,$$

Таким образом, сходимость метода остается прежней (сравните с результатами примера 2, однако компоненты вектора перестали неограниченно расти).

2) Степенной метод нахождения второго по величине модуля собственного значения оператора.

Пусть A – матрица размера $n \times n$ имеет ровно n линейно независимых собственных векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и собственные числа $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Пусть уже известно наибольшее по модулю собственное число λ_1 .

Вычисляем второе по величине модуля собственное значение λ_2 по

$$\text{формуле: } \lambda_2 \approx \frac{y_i^{(k+1)} - \lambda_1 y_i^{(k)}}{y_i^{(k)} - \lambda_1 y_i^{(k-1)}}.$$

Пример 5. В примере 2 вычислено наибольшее по модулю число матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - $\lambda_1 \approx 3$. Вычислим второе по величине модуля

собственное значение: $\lambda_2 \approx \frac{y_i^{(5)} - \lambda_1 y_i^{(4)}}{y_i^{(4)} - \lambda_1 y_i^{(3)}}$.

$$\lambda_2 \leq \frac{122 - 3 \cdot 41}{41 - 3 \cdot 14} \approx 1, \quad \lambda_2 \geq \frac{-120 - 3 \cdot (-40)}{-40 - 3 \cdot (-13)} = 0.$$

То есть $\lambda_2 \in (0, 1)$.

3) Степенной метод нахождения наименьшего по модулю собственного значения оператора.

Пусть известно наибольшее по модулю собственное значение оператора A . Наименьшее по модулю собственное значение находим по формуле: $\lambda_n \approx \Lambda + \lambda_1$, где Λ является наибольшим по модулю собственным значением матрицы $A - \lambda_1 E$.

Пример 6. В примере 2 вычислено наибольшее по модулю число матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - $\lambda_1 \approx 3$. Вычислим наименьшее по модулю собственное значение.

$$\text{Строим матрицу } A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применяем к ней степенной метод:

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(1)} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(2)} = \frac{2}{-1} = -2,$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(3)} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Итак, $\lambda_2 \approx -2 + 3 = 1$. Вектор $x_2 \approx \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Замечание. Найти наименьшее по модулю собственное значение оператора можно используя **обратные итерации**. Для выполнения итераций используем обратную матрицу $y^{(k)} = A^{-1}y^{(k-1)}$. Число обратное наибольшему собственному значению обратной матрицы A^{-1} и есть наименьшее по модулю собственное значение матрица A .

Пример 7. В примере 2 вычислено наибольшее по модулю число матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - $\lambda_1 \approx 3$. Вычислим наименьшее по модулю собственное значение методом обратных итераций. Вычисляем

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}.$$

Применяем степенной метод к построенной матрице.

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{0,67}{1} = 0,67,$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,558 \\ 0,442 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\lambda_2} \geq \frac{0,558}{0,67} \approx 0,833, \quad \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{0,442}{0,33} \approx 1,339$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,33 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,558 \\ 0,442 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,48 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\lambda_2} \geq \frac{0,52}{0,558} \approx 0,932, \quad \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{0,48}{0,442} \approx 1,086$$

То есть, $0,932 \leq \frac{1}{\lambda_2} \leq 1,086$, а $0,921 \leq \lambda_2 \leq 1,073$.

$$\text{Итак, } \lambda_2 \approx \frac{0,921+1,073}{2} = 0,997,$$

$$\varepsilon \leq \frac{1,073-0,921}{2} = 0,076,$$

$$x_2 \approx \alpha \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,48 \end{pmatrix}.$$

Метод вращений Якоби для симметричных матриц.

Метод основан на свойствах собственных пар:

Свойство 1. Если $\{\lambda, x\}$ - собственная пара матрицы $B = C^{-1}AC$, то $\{\lambda, Cx\}$ - собственная пара матрицы A .

Свойство 2. Пусть $\{\lambda_i, e_i\}$ - собственные пары диагональной матрицы $\Lambda = C^{-1}AC$, то $\{\lambda_i, x_i\}$ - собственная пара матрицы A .

Для построения подобной матрицы будем использовать матрицу плоских вращений.

$$T_{ij}(\varphi) = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & : & \dots & : & 0 \\ \dots & \cos \varphi & \dots & -\sin \varphi & \dots \\ & : & & : & \\ \dots & \sin \varphi & \dots & \cos \varphi & \dots \\ & : & & : & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где a_{ij} - наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы A .

Вращать матрицу A будет пока сумма модулей внедиагональных элементов не будет меньше заданной точности.

Алгоритм метода:

1) Выбираем a_{ij} - наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы A . Вычисляем угол вращения:

$$\varphi^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, & \text{при } a_{ii} - a_{jj} \neq 0, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{при } a_{ii} - a_{jj} = 0. \end{cases}$$

Рассчитываем матрицу плоских вращений: $T^{(1)} = T_{ij}(\varphi^{(1)})$.

Строим подобную матрицу $B^{(1)} = T^{(1)T} A T^{(1)}$.

k) Выбираем $b_{ij}^{(k-1)}$ - наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы $B^{(k-1)}$. Вычисляем угол вращения:

$$\varphi^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2b_{ij}^{(k-1)}}{b_{ii}^{(k-1)} - b_{jj}^{(k-1)}}, & \text{при } b_{ii}^{(k-1)} - b_{jj}^{(k-1)} \neq 0, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{при } b_{ii}^{(k-1)} - b_{jj}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Рассчитываем матрицу плоских вращений: $T^{(k)} = T_{ij}(\varphi^{(k)})$

Строим подобную матрицу $B^{(k)} = T^{(k)T} B^{(k-1)} T^{(k)}$.

Условие остановки: $\sum_{i \neq j} |b_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon$.

Собственные числа матрицы A расположены на диагонали матрицы $B^{(k)}$.

Собственные векторы матрицы A расположены в столбцах матрицы $X = T^{(1)} \cdot T^{(2)} \cdot \dots \cdot T^{(k)}$.

Пример 9. Применим метод вращений для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1) \max_{i \neq j} |a_{ij}| = |a_{13}| = 2$$

Так как $a_{11} = a_{33} = 1$, то $\varphi^{(1)} = \frac{\pi}{4}$.

$$T^{(1)} = T_{13}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & 0 & -\sin \frac{\pi}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & 0 & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = T^{(1)T} \cdot A \cdot T^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1,414 \\ 0 & -1,414 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2) \max |b_{ij}^{(1)}| = |b_{23}^{(1)}| = 1,414$$

Так как $b_{22}^{(1)} - b_{33}^{(1)} = -1$,

то $\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2b_{23}^{(1)}}{b_{22}^{(1)} - b_{33}^{(1)}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot (-1,414)}{-1} \approx 0,615$.

$$T^{(2)} = T_{23}(0,615) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0,615 & -\sin 0,615 \\ 0 & \sin 0,615 & \cos 0,615 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

$$B_2 = T^{(2)T} \cdot B_1 \cdot T^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Сумма внедиагональных элементов матрицы B_2 равна 0. Следовательно, числа на диагонали – приближенные значения собственных значений: $\lambda_1 \approx -1$, $\lambda_2 \approx 1$, $\lambda_3 \approx 4$.

Находим собственные векторы:

$$X = T^{(1)} \cdot T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,707 & -0,408 & -0,577 \\ 0 & 0,816 & -0,577 \\ 0,707 & 0,408 & 0,577 \end{pmatrix}.$$

$$\text{То есть } x_1 \approx \alpha \begin{pmatrix} 0,707 \\ 0 \\ 0,707 \end{pmatrix}, x_2 \approx \alpha \begin{pmatrix} -0,408 \\ 0,816 \\ 0,408 \end{pmatrix}, x_3 \approx \alpha \begin{pmatrix} -0,577 \\ -0,577 \\ 0,577 \end{pmatrix}$$

2.4.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

Задание 1. Найти все собственные числа и собственные векторы матрицы степенным методом с точность до 0,001.

$$1.1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1.2. A = \begin{pmatrix} 2,4 & 1,2 & 2,5 \\ 1,2 & 3,5 & 1,4 \\ 2,5 & 1,4 & 4,2 \end{pmatrix} \quad 1.3. A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,9 & 1,5 \\ 0,9 & 1,4 & 1 \\ 1,5 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Используя метод вращений Якоби, найти собственные числа и собственные векторы матрицы с точностью до 0,001.

$$2.1. A = \begin{pmatrix} 3 & 1,7 & 1,6 & 5,5 \\ 1,7 & 1 & 2 & 4,5 \\ 1,6 & 2 & 3 & 1,5 \\ 5,5 & 4,5 & 1,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2.2. A = \begin{pmatrix} 1,6 & 0,4 & 1 & 2 \\ 0,4 & 1 & 0,5 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 2 & 1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2.5. Решение систем нелинейных уравнений.

2.5.1. Теоретические сведения

2) *Решение систем нелинейных уравнений.*

$$\text{Система нелинейных уравнений: } \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots, \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

1. Метод простых итераций.

Преобразуя уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots, \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

$$\text{Получаем итерационные формулы: } \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots, \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}). \end{cases}$$

Теорема. Данная итерационная последовательность сходится к точному решению системы если $\sup_{x \in S} \|\Phi'(x)\| \leq q < 1$.

$$\Phi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Априорная оценка погрешности: } \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

$$\text{Апостериорная оценка погрешности: } \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

Пример 8. Найдем решение системы $\begin{cases} x^3 - \ln y - 1,6 + x = 0, \\ \sin x + y - 2,3 - \sqrt{y} = 0. \end{cases}$ методом

простых итераций.

Приведем систему к виду для итераций: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{\ln y + 1,6 - x}, \\ y = -\sin x + 2,3 + \sqrt{y}. \end{cases}$

То есть $\varphi_1(x, y) = \sqrt[3]{\ln y + 1,6 - x}$, $\varphi_2(x, y) = -\sin x + 2,3 + \sqrt{y}$.

Зададим начальное приближение $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Проверим сходимость по теореме:

$$\Phi'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(\ln y + 1,6 - x)^2}} & \frac{1}{3y\sqrt[3]{(\ln y + 1,6 - x)^2}} \\ -\cos x & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix}$$

$$\Phi'(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(\ln 1 + 1,6 - 1)^2}} & \frac{1}{3y\sqrt[3]{(\ln 1 + 1,6 - 1)^2}} \\ -\cos 1 & \frac{1}{2\sqrt{1}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0,45 & 0,47 \\ -0,54 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

$$\|\Phi'(x)\| = \max\{0,45 + 0,54; 0,47 + 0,5\} = 0,99 < 1.$$

Выполняем итерации:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\ln y_0 + 1,6 - x_0} = \sqrt[3]{\ln 1 + 1,6 - 1} \approx 0,843, \\ y_1 = -\sin x_0 + 2,3 + \sqrt{y_0} = -\sin 1 + 2,3 + \sqrt{1} \approx 2,458. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt[3]{\ln y_1 + 1,6 - x_1} = \sqrt[3]{\ln 2,458 + 1,6 - 0,843} \approx 1,183, \\ y_2 = -\sin x_1 + 2,3 + \sqrt{y_1} = -\sin 0,843 + 2,3 + \sqrt{2,458} \approx 3,121. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \sqrt[3]{\ln y_2 + 1,6 - x_2} = \sqrt[3]{\ln 3,121 + 1,6 - 1,183} \approx 1,158, \\ y_3 = -\sin x_2 + 2,3 + \sqrt{y_2} = -\sin 1,183 + 2,3 + \sqrt{3,121} \approx 3,140. \end{cases}$$

Оценим погрешность полученного решения.

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &\leq \frac{0,99}{1-0,99} \left\| \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{0,99}{1-0,99} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \\ &= \frac{0,99}{1-0,99} \sqrt{(1,158 - 1,183)^2 + (3,140 - 3,121)^2} \approx 0,98.\end{aligned}$$

Вычислим невязку полученного решения:

$$\xi_1 = (x_3)^3 - \ln y_3 - 1,6 + x_3 = (1,158)^3 - \ln 3,140 - 1,6 + 1,158 \approx -0,03,$$

$$\xi_2 = \sin x_3 + y_3 - 2,3 - \sqrt{y_3} = \sin 1,158 + 3,140 - 2,3 - \sqrt{3,140} \approx -0,015.$$

$$\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \approx 0,03^2 + 0,015^2 = 0,00113.$$

2. Метод покоординатных итераций.

$$\text{Итерационная формула: } \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots, \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}). \end{cases}$$

2.5.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы

$$1. \text{ Решить систему уравнений } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

1.1. Методом простых итераций с погрешностью $\varepsilon = 0,01$.

1.2. Методом покоординатных итераций с погрешностью $\varepsilon = 0,01$.

2.6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.6.1. Теоретические сведения

1. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (Задач Коши).

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения заключается в нахождении его частного решения по начальным данным – значению искомой функции в начальной точке:

Дано: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Найти: решение дифференциального уравнения на отрезке $x \in [x_0, b]$.

1.1. Метод степенных рядов.

Метод является приближенно-аналитическим, т.е. решение ищется в виде формулы.

Решение будем искать в виде степенного ряда:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + R_n,$$

$$\text{или } y(x) = \sum_{k=0}^n y^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + R_n \quad (1)$$

Первое слагаемое ряда (1) задано в виде начального условия: $y(x_0) = y_0$.

Второе слагаемое ряда (1) получаем, подставляя начальные условия в дифференциальное уравнение: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Для получения третьего слагаемого ряда (1) дифференцируем по x правую часть дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$:

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y', \text{ а затем в полученную формулу подставляем}$$

начальные условия и результат вычисления $y'(x_0)$:

$$y''(x_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot y'(x_0).$$

Продолжаем вычисления по указанной схеме до получения всех необходимых слагаемых.

Последнее слагаемое ряда (1) называется остаточный член ряда. Величина Остаточного члена показывает с какой погрешностью получено решение при условии, что ряд составлен из n слагаемых:

$$R_n \leq \max \left| \frac{y^{(n+1)}(x)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|. \quad (2)$$

Пример 1. Применим метод степенных рядов к поиску решения задачи

Коши: $y' = (x+1)^2 y$, $y(0) = 1$. Для решения оставим четыре члена ряда:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + R_3,$$

или после подстановки начального условия:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + \frac{y'(0)}{1!}(x-0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-0)^3 + R_3 = \\ &= y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}x^3 + R_3. \end{aligned}$$

$y(0) = 1$ - дано в условии начальной задачи.

$y' = (x+1)^2 y$ - из условия задачи, следовательно $y'(0) = (0+1)^2 \cdot 1 = 1$.

Для определения третьего слагаемого ряда рассчитаем вторую производную: $y'' = (y')' = ((x+1)^2 \cdot y)' = 2(x+1) \cdot y + (x+1)^2 \cdot y'$. Подставим в полученную формулу начальные условия и полученное значение $y'(0) = 1$:
 $y''(0) = 2(0+1) \cdot 1 + (0+1)^2 \cdot 1 = 3$.

Для определения четвертого слагаемого ряда рассчитаем третью производную:

$y''' = (y'')' = (2(x+1) \cdot y + (x+1)^2 \cdot y')' = 2y + 2(x+1)y' + 2(x+1) \cdot y' + (x+1)^2 \cdot y''$.
 Подставим в полученную формулу начальные условия и полученное значение $y' = 1$ и $y'' = 3$: $y'''(0) = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$.

Итак, составляем степенной ряд: $y(x) \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{6}x^3 + R_3$.

Для оценки погрешности полученного решения для вычисления значения функции, например, в точке $x=0,1$, рассчитаем остаточный член

$$\text{ряда по формуле (2): } R_3 \leq \max \left| \frac{y^{(4)}(x)(0,1-0)^4}{4!} \right|.$$

$$y^{(4)} = (y''')' = (2y + 4(x+1)y' + (x+1)^2 \cdot y'')' = 6y' + 6(x+1)y'' + (x+1)^2 \cdot y'''$$

.

$$y^{(4)}(0) = 6 \cdot 1 + 6 \cdot (0+1) \cdot 3 + (0+1)^2 \cdot 9 = 33.$$

$$\text{Итак, } R_3 \leq \max \left| \frac{y^{(4)}(x)(0,1-0)^4}{4!} \right| = \frac{33 \cdot 0,0001}{24} \leq 0,0002.$$

Для сравнения полученного решения с точным, проинтегрируем данное уравнение:

$$y' = (x+1)^2 y,$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^2 y,$$

$$\frac{dy}{y} = (x+1)^2 dx,$$

$$\int_1^y \frac{dy}{y} = \int_0^x (x+1)^2 dx,$$

$$\ln|y|_1^y = \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_0^x,$$

$$\ln|y| = \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3},$$

$$y = e^{\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}}.$$

Найдем значение функции в точке $x=0,1$ по точной и приближенной формулам:

$$y(0,1) = e^{\frac{(0,1+1)^3}{3} - \frac{1}{3}} = e^{\frac{0,331}{3}} \approx e^{0,11} \approx 1,115.$$

$$y(0,1) \approx 1 + 0,1 + \frac{3}{2}0,1^2 + \frac{9}{6}0,1^3 \approx 1,1165.$$

1.2. Метод Пикара.

Метод также является приближенно-аналитическим. Последовательные приближения к решению задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, рассчитывают, используя рекуррентную формулу:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx. \quad (3)$$

Погрешность, полученного по формуле (3) составляет:

$$\varepsilon_n \leq \frac{MN^n}{(n+1)!} H^{n+1}, \quad (4)$$

где $M = \max_D |f(x, y)|$,

$$N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|,$$

$$H = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

$$D: \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}.$$

Пример 2. Применим метод Пикара к поиску решения задачи Коши:

$y' = (x+1)^2 y$, $y(0) = 1$. Для решения оставим два последовательных приближения, используя формулу (3):

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (x+1)^2 y_0 dx = 1 + \int_0^x (x+1)^2 dx = 1 + \frac{(1+x)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{(1+x)^3}{3}.$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (x+1)^2 y_1 dx = 1 + \int_0^x (x+1)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{(1+x)^3}{3} \right) dx =$$

$$= 1 + \frac{2(x+1)^3}{9} + \frac{(x+1)^6}{18} - \frac{5}{18}.$$

Оценим погрешность полученного решения в прямоугольнике $D: \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ по формуле (4):

Рассчитаем необходимые составляющие:

$$M = \max_D |f(x, y)| = \max_D |(x+1)^2 y| = (1+1)^2 \cdot 2 = 8,$$

$$N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_D |(x+1)^2| = (1+1)^2 = 4,$$

$$H = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Итак, } \varepsilon_2 \leq \frac{8 \cdot 4^2}{3!} \left(\frac{1}{8} \right)^3 = \frac{1}{24} \leq 0,05.$$

Для сравнения полученного решения с точным, найдем значение функции в точке $x=0,1$ по точной (получена в примере 1) и приближенной формулам:

$$y(0,1) = e^{\frac{(0,1+1)^3}{3} - \frac{1}{3}} = e^{\frac{0,331}{3}} \approx e^{0,11} \approx 1,115.$$

$$y_2(0,1) = 1 + \frac{2(0,1+1)^3}{9} + \frac{(0,1+1)^6}{18} - \frac{5}{18} \approx 1,12.$$

1.3. Метод Эйлера.

Метод является численным в чистом виде. Решение задачи Коши $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ ищем в виде таблицы значений неизвестной функции на заданном отрезке $x \in [x_0, b]$.

Алгоритм.

1) разбиваем отрезок $[x_0, b]$ на расчетные узлы $x_i = x_0 + ih$, используя расчётный шаг $h = \frac{b - x_0}{n}$.

Получаем таблицу значений:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	$x_n=b$
y	y_0				

2-($n+1$)) Рассчитываем значения функции в расчетных узлах последовательно по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (5)$$

$n+2$) Погрешность полученного решения оцениваем по методу Рунге, используя формулу:

$$R_n = 2 \left[y_h(x_n) - y_{\frac{h}{2}}(x_n) \right], \quad (6)$$

где $y_h(x_n)$ - решение, рассчитанное с шагом h , $y_{\frac{h}{2}}(x_n)$ - решение,

рассчитанное с шагом $h/2$.

Пример 3. Применим метод Эйлера к поиску решения задачи Коши:

$$y' = (x+1)^2 y, \quad y(0) = 1 \text{ на отрезке } [0,1].$$

1) Разбиваем отрезок $[0,1]$ на расчетные узлы, используя расчётный шаг

$$h = \frac{1-0}{5} = 0,2.$$

Получаем таблицу значений:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	1					

Рассчитываем значения функции в расчетных узлах последовательно по формуле (5).

$$2) y_1 = y_0 + 0,2 \cdot (x_0 + 1)^2 \cdot y_0 = 1 + 0,2 \cdot (0 + 1)^2 \cdot 1 = 1,2,$$

$$3) y_2 = y_1 + 0,2 \cdot (x_1 + 1)^2 \cdot y_1 = 1,2 + 0,2 \cdot (0,2 + 1)^2 \cdot 1,2 = 1,5456,$$

$$4) y_3 = y_2 + 0,2 \cdot (x_2 + 1)^2 \cdot y_2 = 1,5456 + 0,2 \cdot (0,4 + 1)^2 \cdot 1,5456 \approx 2,1515,$$

$$5) y_4 = y_3 + 0,2 \cdot (x_3 + 1)^2 \cdot y_3 = 2,1515 + 0,2 \cdot (0,6 + 1)^2 \cdot 2,1515 \approx 2,2531,$$

$$6) y_5 = y_4 + 0,2 \cdot (x_4 + 1)^2 \cdot y_4 = 2,2531 + 0,2 \cdot (1 + 1)^2 \cdot 2,2531 \approx 4,0556.$$

Полученное решение заносим в таблицу:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	1	1,2	1,5456	2,1515	2,2531	4,0556

7) Для оценки погрешности полученного решения в точке $x=1$, применим метод Рунге:

Построим решение той же задачи с расчетным шагом $\frac{h}{2} = 0,1$:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	1,1	1,233	1,411	1,649	1,972	2,416	3,035	3,912	5,179	7,048

По формуле (6) оценим погрешность:

$$R_{10} = 2 \left| y_h(1) - y_{\frac{h}{2}}(1) \right| = 2 \cdot |4,0556 - 7,048| = 6.$$

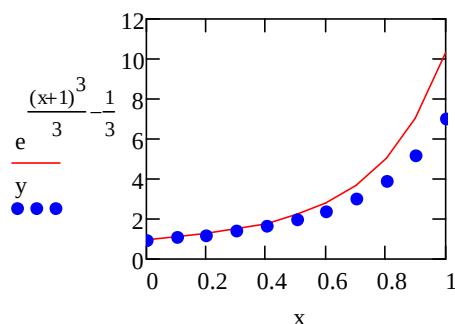
Погрешность более 0,1. Следовательно, необходимо еще уменьшать расчетный шаг.

Для сравнения полученного решения с точным, найдем значения

функции по точной формуле: $y(x) = e^{\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}}$ (получена в примере 1) и подставим в таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	1,1	1,233	1,411	1,649	1,972	2,416	3,035	3,912	5,179	7,048
$e^{\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}}$	1	1,117	1,275	1,49	1,788	2,207	2,807	3,685	5,006	7,05	10,312

Для наглядности разницы построим графики:



Наибольшее расхождение возникает в последней точке интервала и составляет $10,312 - 7,048 = 3,264$.

1.4. Методы Рунге-Кутты.

Представляет собой группу методов для решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Определенный метод из группы выбирается после определения значений необходимых параметров, одним из которых является порядок метода q . Так метод Эйлера относится к методам Рунге –Кутты первого порядка.

Одними из методов второго порядка ($q=2$) являются

1) гибридный метод (Хойна):

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y), \\ k_2(h) &= hf(x + h, y + k_1(h)) \\ y(x + h) &= y(x) + \frac{1}{2}k_1(h) + \frac{1}{2}k_2(h) \end{aligned} \quad (7)$$

2) уточненный метод Эйлера

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y), \\ k_2(h) &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_1(h)\right), \\ y(x + h) &= y(x) + k_2(h). \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из формул (7-8) происходит дополнительное уточнение очередного значения функции.

Наиболее используемыми методами Рунге-Кутты третьего и четвертого порядка являются:

$$q=3$$

$$k_1(h) = hf(x, y),$$

$$k_2(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1(h)}{2}\right), \quad (9)$$

$$k_3(h) = hf(x + h, y - k_1(h) + 2k_2(h)),$$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1(h) + 4k_2(h) + k_3(h)).$$

$$q=4$$

$$k_1(h) = hf(x, y),$$

$$k_2(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1(h)}{2}\right),$$

$$k_3(h) = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2(h)}{2}\right), \quad (10)$$

$$k_4(h) = hf(x + h, y + k_3(h)),$$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1(h) + 2k_2(h) + 2k_3(h) + k_4(h)).$$

Оценка погрешности расчета по формулам Рунге-Кутты производится по правилу Рунге:

$$R_n = \frac{y_h(x_n) - y_{\frac{h}{2}}(x_n)}{1 - \frac{1}{2^q}}. \quad (11)$$

Пример 4. Применим уточненный метод Эйлера к поиску решения задачи Коши: $y' = (x+1)^2 y$, $y(0) = 1$ на отрезке $[0,1]$.

1) Разбиваем отрезок $[0,1]$ на расчетные узлы, используя расчётный шаг

$$h = \frac{1-0}{5} = 0,2.$$

Получаем таблицу значений:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
-----	---	-----	-----	-----	-----	---

y	1					
---	---	--	--	--	--	--

Рассчитываем значения функции в расчетных узлах последовательно по формулам (8).

2)

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0,2 \cdot (0+1)^2 \cdot 1 = 0,2,$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2 \cdot (0+0,1+1)^2 \cdot (1+0,5 \cdot 0,2) = 0,266,$$

$$y_1 = y_0 + k_2 = 1 + 0,2662 = 1,266.$$

3)

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0,2 \cdot (0,2+1)^2 \cdot 1,2662 = 0,365,$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2 \cdot (0,2+0,1+1)^2 \cdot (1,266+0,5 \cdot 0,365) = 0,49$$

$$y_2 = y_1 + k_2 = 1,266 + 0,49 = 1,756.$$

4)

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0,2 \cdot (0,4+1)^2 \cdot 1,756 = 0,688,$$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2 \cdot (0,4+0,1+1)^2 \cdot (1,756+0,5 \cdot 0,688) = 0,945,$$

$$y_3 = y_2 + k_2 = 1,756 + 0,945 = 2,701.$$

5)

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = 0,2 \cdot (0,6+1)^2 \cdot 2,701 = 1,383,$$

$$k_2 = hf\left(x_3 + \frac{1}{2}h, y_3 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2 \cdot (0,6+0,1+1)^2 \cdot (2,701+0,5 \cdot 1,383) = 1,961,$$

$$y_4 = y_3 + k_2 = 2,701 + 1,961 = 4,662.$$

6)

$$k_1 = hf(x_4, y_4) = 0,2 \cdot (0,8 + 1)^2 \cdot 4,662 = 3,021,$$

$$k_2 = hf\left(x_4 + \frac{1}{2}h, y_4 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,2 \cdot (0,8 + 0,1 + 1)^2 \cdot (4,662 + 0,5 \cdot 3,021) = 4,457,$$

$$y_5 = y_4 + k_2 = 4,662 + 4,457 = 9,119.$$

Полученное решение заносим в таблицу и сравниваем с точным:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	1	1,2662	1,756	2,701	4,662	9,119
$\frac{(x+1)^3 - 1}{3}$	1	1,275	1,788	2,807	5,006	10,312

Наибольшее расхождение возникает в последней точке интервала и составляет $10,312 - 9,119 = 1,193$.

Для оценки погрешности надо повторить вычисления с уменьшенным в два раза шагом и воспользоваться формулой Рунге (11), в которой $q=2$.

2. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Краевая задача заключается в нахождении решения дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ на отрезке $x \in [a, b]$, удовлетворяющего краевым условиям: $y(a) = A, y(b) = B$.

2.1. Метод стрельбы.

Заключается в замене краевой задачи на задачу Коши со следующими начальными условиями: $y(a) = A, y'(a) = C_1$.

После решения задачи Коши проводится оценка точности: $\varepsilon = |B - y_i(b, C_i)|$, где $y_i(b, C_i)$ - значение искомой функции в точке $x=b$, полученное при решении задачи Коши с начальным условием $y'(a) = C_i$.

Если величина ε больше заданной точности, то производится корректировка начального условия: $y'(a) = C_{i+1}$. И задача Коши решается заново.

Замечание. Например, для применения метода Эйлера уравнение второго порядка нужно представить в виде системы уравнений первого порядка с помощью замены:
$$\begin{cases} y' = z, & y(a) = A, \\ z' = f(x, y, z), & z(a) = C_1. \end{cases}$$

Полученная система решается последовательным применением формул для каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h z_i, \\ z_{i+1} = z_i + h f(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$$

Пример 5. Решим краевую задачу $y'' + 2x^2 y' + y = x$, $y(0,5) = 1$, $y(1) = 3$ методом стрельбы.

Заменим ее на задачу Коши: $y'' + 2x^2 y' + y = x$, $y(0,5) = 1$, $y'(0,5) = C_1$.

Представим задачу Коши в виде системы:
$$\begin{cases} y' = z, & y(0,5) = 1, \\ z' = x - 2x^2 z - y, & z(0,5) = C_1. \end{cases}$$

Формулы для метода Эйлера:

$$\begin{cases} y_{i+1} = z_i, & y(0,5) = 1, \\ z_{i+1} = x_i - 2x_i^2 z_i - y_i, & z(0,5) = C_1. \end{cases}$$

Зададим расчетный шаг $h=0,1$ и начальное значение $C_1=1$. Вычисляем расчетные узлы, последовательно значения y и z и заносим в таблицу:

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	1,05	1,098	1,142	1,184	1,222

z	1	0,95	0,895	0,834	0,767	0,694
-----	---	------	-------	-------	-------	-------

Погрешность найденного решения составляет:

$$\varepsilon = |3 - y_5| = |3 - 1,222| = 1,778.$$

Так как заданное значение $y(1) = 3$ больше полученного, то увеличим начальное значение $z(0,5) = C_2 = 8$. Снова решаем задачу Коши по формулам:

$$\begin{cases} y_{i+1} = z_i, & y(0,5) = 1, \\ z_{i+1} = x_i - 2x_i^2 z_i - y_i, & z(0,5) = C_2 = 8. \end{cases}$$

Решения заносим в таблицу:

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	1,4	1,797	2,191	2,58	2,964
z	8	7,95	7,877	7,781	7,662	7,519

Погрешность найденного решения составляет:

$$\varepsilon = |3 - y_5| = |3 - 2,964| = 0,036.$$

2.2. Метод конечных разностей.

Для решения краевой задачи вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Вычисляем расчетный шаг $h = \frac{b-a}{n}$, используя расчетный шаг вычисляем расчетные узлы $x_i = x_0 + ih$ и узловые значения коэффициентов уравнения $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Производные заменяем разностными формулами:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Подставляя все в уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} y_0 = a, \\ \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} - (2 - h^2 q_i) y_i + \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ y_n = b \end{cases}$$

(12)

Вычисляем значения коэффициентов системы (12) в расчетных узлах, заполняем таблицу:

i	0	1	2	...	n
x_i	a	x_1	x_2	...	b
$1 + \frac{h}{2} p_i$					
$2 - h^2 q_i$					
$h^2 f_i$					

Построенная система имеет трехдиагональную матрицу. Можно ее решать, например, методом прогонки.

Пример 6. Решим краевую задачу

$y'' + 2x^2 y' + y = x$, $y(0,5) = 1$, $y(1) = 3$ методом конечных разностей.

Вычисляем расчетный шаг $h = \frac{1-0,5}{5} = 0,1$.

Используя расчетный шаг вычисляем расчетные узлы. Вычисляем значения коэффициентов системы (12) в расчетных узлах, заполняем таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$1 + \frac{h}{2} p_i = 1 + 0,1x^2$	1,025	1,036	1,049	1,064	1,081	1,1

$2 - h^2 q_i = 2 - h^2 = 1,99$	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
$h^2 f_i = 0,1^2 x$	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01

Составляем систему (12):

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ 1,036y_2 - 1,99y_1 + 1,036y_0 = 0,006, \\ 1,049y_3 - 1,99y_2 + 1,049y_1 = 0,007, \\ 1,064y_4 - 1,99y_3 + 1,064y_2 = 0,008, \\ 1,081y_5 - 1,99y_4 + 1,081y_3 = 0,009, \\ y_5 = 3. \end{cases}$$

Матрица системы трехдиагональная:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,036 & -1,99 & 1,036 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,049 & -1,99 & 1,049 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,064 & -1,99 & 1,064 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,081 & -1,99 & 1,081 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решаем методом прогонки. Получаем таблицу искомой функции:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	1	1,963	2,777	3,311	3,424	3

2.6.2. Задания для аудиторной и самостоятельной работы.

1. Получить приближенное решение задачи Коши $y' = (x+1)(y+1)$, $y(0)=0$ в виде степенного ряда. Рассчитать четыре слагаемых ряда. Оценить погрешность по формуле остаточного члена ряда. Найти точное аналитическое решение и сопоставить с приближенным решением.

2. Найти третье последовательное приближение к решению задачи Коши $y' = (x+1)(y+1)$, $y(0)=0$ методом Пикара. Оценить погрешность по формуле (4). Найти точное аналитическое решение и сопоставить с приближенным решением.

3. Получить приближенное решение задачи Коши $y' = (x+1)(y+1)$, $y(0)=0$ на отрезке $[0,1]$ методом Эйлера. Оценить локальную погрешность метода по правилу Рунге (добиться, чтобы она была меньше 0,1). Найти точное аналитическое решение и сопоставить с численным решением – для сопоставления составить таблицу и привести графики решений в единой системе координат.

4. Получить приближенное решение задачи Коши $y' = (x+1)(y+1)$, $y(0)=0$ на отрезке $[0,1]$ уточненным методом Эйлера, с тем расчетным шагом, который получился в задании 3. Найти точное аналитическое решение и сопоставить с численным решением – для сопоставления составить таблицу и привести графики решений в единой системе координат.

5. Получить приближенное решение задачи Коши $y' = (x+1)(y+1)$, $y(0)=0$ на отрезке $[0,1]$ методом Рунге-Кутты 4-го порядка, с тем расчетным шагом, который получился в задании 3. Найти точное аналитическое решение и сопоставить с численным решением – для сопоставления составить таблицу и привести графики решений в единой системе координат.

6. Решить краевую задачу методом стрельбы с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x,$$

$$\begin{cases} y(0,7) = 0,5 \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2 \end{cases}$$

7. Используя метод конечных разностей составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, шаг $h = 0,1$. Сравнить с решением задачи 6, построив графики в единой системе координат.

$$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$$

$$\begin{cases} y(0,7) = 0,5 \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2 \end{cases}$$

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Жидков Е.Н. Вычислительная математика : учебное пособие для вузов / Е.Н. Жидков. – Москва : Академия, 2010. – 200 с. ISBN 978-5-7695-5892-4. – Текст непосредственный.
2. Пантина, И. В. Вычислительная математика : учебник / И. В. Пантина, А. В. Синчуков. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : МФПУ Синергия, 2012. – 176 с. (Университетская серия). – ISBN 978-5-9558-0480-4. – URL: <http://www.znaniyum.com/bookread2.php?book=451160>

Дополнительная литература

3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов/В. М. Вержбицкий. – Москва: Высш. шк., 2002. – 840 с ISBN 5-06-004020-8. – Текст непосредственный.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы : Учебное пособие для ВУЗов. - 4-е издание, переработанное и дополненное. - Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 632 с. ISBN 5-94774-396-5– Текст непосредственный.