Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Т. А. Долматова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Методические рекомендации по выполнению контрольных работ
для обучающихся по направлениям подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Информатика»;
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и Информатика» и «Технология и Информатика»*

Новокузнецк

2019

УДК [378.147.88:519.21](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.171я73
Д64

Долматова Т. А.

Д 64Теория вероятностей: методические рекомендации по выполнению контрольных работ для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Информатика»); 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили«Математика и Информатика», «Технология и Информатика») / Т. А. Долматова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 64с.

В работе представлены методические материалы по выполнению двух контрольных работпо дисциплине «Теория вероятностей»: основные теоретические сведения в форме конспектов лекций, банк задач для контрольных работ и образцы решения одного из вариантов, методические рекомендации по решению и оформлению, оценивание работ в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, приложения.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Информатика»; 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Технология и Информатика».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 4 от 29.11.2019
Заведующий каф. МФММ
_____________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 4 от 12.12.2019
Председатель методической комиссии ФИМЭ
________________/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:519.21](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.171я73
Д 64

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические рекомендации адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Информатика»; 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика» и «Технология и Информатика» и направлены на оказание помощи студентам в выполнении домашней контрольной работы по теории вероятностей.

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности, происходящие в массовых однородных случайных явлениях и процессах. Главными объектами теории вероятностей служат математические модели случайных процессов, исходы которых нельзя определить однозначно условиями проведения эксперимента. Методы теории вероятностей проникли во многие сферы деятельности человека, в связи с этим основы теории вероятностей занимают определенной место в школьном курсе математики. Вероятностно-статистическая линия – обязательная составляющая школьного математического образования – требует необходимой подготовки от будущего учителя.

Целью изучения дисциплины «Теория вероятностей» является формирование основных понятий и навыков анализа явлений и процессов в условиях неопределенности.

Задачидисциплины: формирование понимания значимости теории вероятностей в естественнонаучном образовании будущего учителя; формирование базиса знаний, умений, навыков по основным разделам дисциплины и готовности их применения в будущей профессиональной деятельности.

В методические рекомендации включено:

1) краткий конспект лекцийпо теории вероятностей(основные понятия, свойства, теоремы, формулы);

2) банк задач к вариантам контрольных работ;

3) образец решения вариантов контрольных работ;

4) особенности оценивания контрольных работ в балльно-рейтинговой системе;

5) требования к выполнению и оформлению контрольных работ;

6) список рекомендуемой литературы.

Теоретические сведения по теории вероятностей представлены в объеме, достаточном для выполнения итоговыхконтрольных работ по основным разделам курса.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает классические и современные источники; указана литература основная и дополнительная.

Таким образом, данные методические материалы позволяют студентам успешно и в установленный срок выполнить индивидуальные варианты итоговых контрольных работ.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (краткий)

Основные понятия теории вероятностей. Виды случайных событий. Классическое определение вероятности

Испытание или ***опыт*** - это всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление, а результат, исход испытания - это***событие***.

События называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появления других событий в одном и том же испытании, и ***несовместными*** в противном случае.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

СобытияA и B называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

События можно подразделить на следующие ***три вида***: достоверные, невозможные и случайные.

Классическое определение вероятности: вероятность события определяется формулой:

$P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению событияA; n – общее число всех равновозможных, несовместных элементарных исходов испытания, образующих полную группу.

Основные формулы комбинаторики

Правило суммы: если объектA может быть выбран m способами, а объект B – nспособами, причем выборы объектов A и B несовместны, то выбор «A или B» можно сделать $m + n$ способами.

Правило произведения: если объектA может быть выбран m способами и после каждого из этих выборов объект B сможет быть выбран nспособами, то выбор упорядоченной пары (A, B) можно сделать $m \cdot n$ способами.

Перестановки - комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Обозначаются P_nи вычисляется по формуле:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \ 0! = 1.$$

Перестановки с повторениями: если среди n элементов есть k_1 элементов одного вида, k_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок равно:

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Размещения - комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Обозначаются A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Размещения с повторениями: $\overline{A_n^m} = n^m.$

Сочетания - комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Обозначаются C_n^m и вычисляется по формуле: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Сочетания с повторениями: $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m.$

Относительная частота

Относительная частота событияA определяется формулой:

$W(A) = \frac{M}{N}$, где M – число испытаний, в которых событие A наступило,N – общее число произведенных испытаний.

Теорема Бернулли: *при большом числе однородных и независимых испытаний частота некоторого события сколь угодно мало отличается от вероятности этого события в одном испытании.*

Геометрическое определение вероятности

Пусть отрезокl составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством:

$P=\frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}$.

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от её расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством:

$P=\frac{\text{Площадь } g}{\text{Площадь } G}$.

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру g, которая составляет часть объемной фигуры G:

$P=\frac{\text{Объем } g}{\text{Объем } G}$.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вероятность появления хотя бы одного события

Сумма или объединение двух событийA и ***B*** – это событие

C=A+B, состоящее в появлении события***A*** или события ***B***, или обоих вместе.

Если события***A*** и ***B****несовместны*, то ***суммой двух событий A***и***B*** называется событие ***C***, состоящее в появлении хотя бы одного из событий ***A*** и ***B***.

Теорема. Вероятность появления одного из двух *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B)= P(A)+P(B).$

Следствие 1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$

Следствие 2. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB).$

Произведением двух событий A и ***B*** называется событие ***C***, состоящее в совместном (одновременном или последовательном) осуществлении обоих событий ***A*** и ***B***.

Произведением или пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Вероятность события ***B***, вычисленная в предположении, что событие ***A*** уже наступило, называется ***условной вероятностью события B*** и обозначается $\boldsymbol{P_A(B)}$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что одно событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, причем

$P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, …, $P(A_n) = p_n$.Пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Вероятность наступления событияA, состоящего в появлении хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий равна:

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Формула полной вероятности. Вероятность событияA, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Формулы Байеса. Пусть событиеA может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу. Если событиеA уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Если производятся испытания, при которых вероятность появления событияA в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*. Далее рассматриваются независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Вероятность того, что при nнезависимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событиеA наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), и, следовательно, не наступит $n–k$ раз, равна:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}$., где $q = 1 - p$ - **формула Бернулли**.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x). \quad \text{Здесь } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2раз, приближенно равна

$$P(k_1;k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа,

$$x' = \frac{(k_1-np)}{\sqrt{npq}}; \quad x'' = \frac{(k_2-np)}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0 \le x \le 5$) приведена в приложении 2; для значений x> 5 полагают $\Phi(x)=0{,}5$. Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\Phi(x)$ нечетная, следовательно, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$).

1.2. БАНК ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1 ПО РАЗДЕЛУ «СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ»

Для всех вариантов номера задач находятся в приложении 3.

1. Из 20 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 17. Найти вероятность того, что студент ответит правильно на экзаменационный билет, состоящий из двух вопросов.

2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность безотказной работы первого из них равна 0,75, второго 0,85, третьего 0,95. Найти вероятность того, что: а) откажут два станка; б) все три станка будут работать безотказно; в) хотя бы один станок откажет в работе.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынимается наугад 3. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

4. Найти вероятность того, что абонент наберет правильный двузначный номер, если он знает, что данный номер не делится на пять.

5. Игральная кость подброшена два раза. Найти вероятность того, что: а) сумма очков на верхних гранях составит семь; б) хотя бы два очка появится при одном подбрасывании.

6. В урне имеется пять черных и семь красных шаров. Последовательно (без возвращения) извлекается три шара. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут красными; б) три шара будут красными или черными.

7. В группе из 15 человек шесть человек занимаются спортом. Найти вероятность того, что из случайно отобранных семи человек пять человек занимаются спортом.

8. Мышь может выбрать наугад один из пяти лабиринтов. Известно, что вероятности её выхода из различных лабиринтов за три минуты равны: 0,5; 0,6; 0,2; 0,1; 0,1. Пусть оказалось, что мышь вырвалась из лабиринта через три минуты. Какова вероятность того, что она выбрала: а) первый лабиринт; б) второй лабиринт?

9. Из 10 билетов выигрышными являются два. Найти вероятность того, что из пяти случайно взятых билетов выигрышным является один.

10. В сентябре вероятность дождливого дня равна 0,3. Команда «Статистик» выигрывает в футбол в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день – с вероятностью 0,3. Известно, что в сентябре они выиграли некоторую игру. Какова вероятность, что в тот день: а) шел дождь; б) был ясный день?

11. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5, третьим – 0,4. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

12. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем 10 деталей, из них восемь стандартных. Из случайно взятого ящика наудачу взята одна деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она взята из второго ящика.

13. На каждой из пяти одинаковых карточек написана одна из следующих букв: *А*, *Е*, *Н*, *С*, *Т*. Карточки перемешиваются. Определить вероятность того, что из вынутых и положенных в ряд карточек а) можно составить слово «*СТЕНА*», б) из трех карточек можно составить слово «*НЕТ*».

14. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,46, из второго – 0,6.

15. Имеется три урны. В первой урне шесть черных и четыре белых шара, во второй пять белых и пять черных шара, в третьей семь белых и три черных шара. Случайно выбирается урна, и из неё извлекается шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что выбрана вторая урна.

16. Монета подбрасывается три раза. Найти вероятность того, что герб появится: а) все три раза; б) только один раз; в) хотя бы один раз.

17. На отдельных карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все карточки перемешиваются, после чего наугад берут пять карточек и раскладывают их в ряд. Определить вероятность того, что будет получено число 12035.

18. Три экономиста предложили одновременно три экономические теории, которые считаются равновероятными. После наблюдения над состоянием экономики оказалось, что вероятность того развития, которое она получила на самом деле, в соответствии с первой теорией была равна 0,5; со второй – 0,7; с третьей – 0,4. Каким образом это изменяет вероятности правильности трех теорий?

19. В магазине продается четыре магнитофона. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны: 0,91; 0,9; 0,95, 0,94. Найти вероятность того, что взятый наудачу магнитофон выдержит гарантийный срок.

20. Игральная кость сделана так, что вероятность выпадения определенного числа пропорциональна числу очков. Какова вероятность выпадения трех очков, если известно, что выпало нечетное число очков.

21. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того. Что абсолютная величина разности выпавших очков равна 3?

22. Студент в поисках книги посещает три библиотеки. Вероятности того, что они есть в библиотеках, равны 0,4, 0,5, 0,1, а того, что они выданы или нет – равновероятные события. Какова вероятность того, что нужная книга найдена?

23. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

24. В урне имеется 10 белых, пять черных и 15 красных шаров. Извлекается последовательно два шара. Рассматриваются два события: A - хотя бы один шар из двух вынутых красный; B – хотя бы одни вынутый шар белый. Найти вероятность события$C = A + B$.

25. Наудачу набранный номер состоит из пяти цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нем различны.

26. В магазин трикотажных изделий поступили носки, 60% которых получено от одной фабрики, 25% - от другой и 15% - от третьей. Найти вероятность того, что купленные покупателем носки изготовлены на второй или третьей фабрике.

27. Пассажир за получением билета может обратиться в одну из касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, вторую –

0,35 и третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

28. Бросаются три игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы на одной появится два очка; б) на них выпадет по одинаковому числу очков.

29. Из девяти жетонов, занумерованных разными однозначными цифрами, выбирается три. Найти вероятность того, что последовательная запись их номеров покажет возрастание значений цифр.

30. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Какова вероятность того, что выиграет хотя бы один билет из трех купленных?

31. Из полной колоды карт (52 шт.) вынимают сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти карты будут разных мастей.

32. Имеется три урны. В первой из них пять белых и шесть черных шаров, во второй четыре белых и три черных шара, в третьей пять белых и три черных шара. Некто наугад выбирает одну из урн и вынимает из неё шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из второй урны.

33. В магазине имеется в продаже 20 пар обуви, из которых семь пар 42-го размера. Найти вероятность того, что из восьми покупателей трое выберут обувь 42-го размера.

34. В мешке смешаны катушки с нитями трех цветов: 30% белых, 50% красных, остальные зеленые. Определить вероятность того, что при последовательном вытягивании наугад трех нитей окажется, что все они одного цвета.

35. В урне «a» белых и «b» черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, - тоже белый.

36. У рыбака имеется два места ловли рыбы, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6, на втором – с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю в одно из мест, два раза закинул удочку. Найти вероятность того, что рыба клюнет только один раз.

37. На сборку поступило 50 деталей от первого станка, 100 – от второго и 150 – от третьего. Первый станок дает 2 %, второй 1 % и третий 2 % брака. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется не бракованной.

38. Найти вероятность того, что на две определенные карточки в «Спортлото «5 из 36» будет получено по минимальному выигрышу (угадано ровно три числа).

39. Вероятность того, что стрелок попадет хотя бы один раз при трех выстрелах, равна 0,992. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, предполагая её постоянной при каждом выстреле.

40. Пусть 3 % всех мужчин и 0,5 % всех женщин коллектива курят. Наугад выбранный человек курит. Какова вероятность, что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаково)

41. В группе из 25 человек 10 учатся на «отлично», восемь – на «хорошо» и семь – на «удовлетворительно». Найти вероятность того, что из взятых наугад восьми человек трое учатся на «отлично».

42. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным).

43. В группе спортсменов 10 лыжников, шесть боксеров и четыре бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжников составляет 0,8, боксеров – 0,7, бегунов – 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

44. На одной полке наудачу расставляется восемь книг. Найти вероятность того, что определенные три книги окажутся поставленными рядом.

45. Монету бросают три раза. Какое из событий более вероятно: A – все три раза выпала цифра, илиB – два раза выпала цифра и один раз герб? Подсчитать вероятности этих событий.

46. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность того, что оба арбуза спелые?

47. На один ряд из семи мест случайным образом садятся семь учеников. Найти вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.

48. Известно, что при 10-кратном бросании монеты пять раз выпали гербы и пять раз цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первых пяти бросаниях?

49. Из 15 строительных рабочих 10 – штукатуры, а пять – маляры. Наудачу отбирается бригада из пяти рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет три маляра и два штукатура?

50. Игральная кость брошена три раза. Найти вероятность того, что: а) все три раза выпадет четное число очков; б) четное число очков выпадет только один раз; в) четное число очков выпадет хотя бы один раз.

51. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в 3 раза больше производительности второго. Вероятность изготовления не бракованной детали первым автоматом равна 0,95, а вторым – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

52. Какова вероятность получения одного туза, туза и короля при сдаче шести карт из колоды в 52 карты?

53. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

54. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она каждому выдаст его собственную шляпу.

55. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при третьем бросании?

56. Двадцать машин были доставлены на станцию технического обслуживания. При этом пять из них имели неисправность в ходовой части, восемь машин имели неисправности в моторе, а 10 были полностью исправны. Какова вероятность, что машина с неисправной ходовой частью имеет также неисправный мотор?

57. Из 15 билетов выигрышными являются два. Найти вероятность того, что из 10 билетов выигрышным является один.

58. Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитуриент должен подготовить 20 вопросов по элементам математического анализа и 25 по геометрии. Однако он успел подготовить только 15 вопросов по элементам математического анализа и 20 по геометрии. Билет содержит три вопроса, два из которых по элементам математического анализа и один по геометрии. Какова вероятность, что: а) студент сдает экзамен на «отлично» (отвечает на все три вопроса); б) на «хорошо» (отвечает на любые два вопроса)?

59. На стеллаже 15 учебников, пять из них в переплете. Наудачу выбирают три учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплете?

60. Из пяти винтовок, из которых три снайперские и две обычные, наудачу выбирается одна, и из неё производится выстрел. Найти вероятность попадания в мишень, если вероятность попадания из снайперской винтовки – 0,95, а из обычной – 0,7.

61. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено три выстрела. Какова вероятность, что будет: а) три попадания; б) один промах; в) хотя бы одно попадание.

62. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена – 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен.

63. В первой урне из 10 шаров шесть черного и четыре белого цвета, во второй три черных и семь белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что вынуты: а) два белых шара; б) хотя бы один шар черный; в) белый и черный в любой последовательности.

64. Вероятность того, что хотя бы один из трех покупателей купит определенный товар, равна 0,784. Вероятности покупки товара покупателями одинаковы. Определить вероятность того, что: а) два покупателя совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.

65. В коробке находятся жетоны с номерами от одного до 10. Наудачу извлекаются два жетона. Какова вероятность того, что будут вынуты: а) оба жетона с нечетными номерами; б) хотя бы один жетон с нечетным номером; в) один жетон с четным номером.

66. В двух группах обучается по 25 студентов. В первой группе сессию на «отлично» сдали семь человек, во второй – четыре человека. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова вероятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник.

67. В первой бригаде из восьми тракторов два требуют ремонта, во второй из шести тракторов один требует ремонта. Из каждой бригады наудачу выбирают по одному трактору. Определить вероятность того, что: а) оба трактора исправны; б) хотя бы один исправен; в) только один исправен.

68. В организации работают 12 мужчин и восемь женщин. Для них выделено три премии. Определить вероятность того, что премию получат: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины; в) хотя бы один мужчина.

69. Из 25 работников предприятия 10 имеют высшее образование. Определить вероятность того, что из случайно отобранных трех человек высшее образование имеют: а) три человека; б) один человек; в) хотя бы один человек.

70. На карточках написаны буквы *К, Ч, Р, Т, О, А, К, А*. Карточки перемешивают и кладут в порядке их вытаскивания. Какова вероятность того, что получится: а) слово «*КАРТОЧКА*»; б) слово «*КАРТА*»; в) слово «*ТОК*».

71. В коробке из 25 изделий 15 повышенного качества. Наудачу извлекается три изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества;
в) хотя бы одно изделие повышенного качества.

72. Бросается три игральных кости. Какова вероятность того, что:
а) хотя бы на одной из них появится пять очков; б) на всех выпадут нечетные цифры; в) на всех костях выпадут одинаковые цифры?

73. В первом ящике из шести шаров четыре красных и два черных, во втором – из семи шаров два красных и пять черных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный после этого из первого ящика, - черный.

74. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска нестандартного изделия первым предприятием равна 0,1, вторым – 0,15. 1) Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется нестандартным. 2) Взятое изделие оказалось нестандартным. Какова вероятность того, что оно выпущено на втором предприятии?

75. Имеется три урны. В первой три белых и два черных шара, во второй и третьей по четыре белых и три черных шара. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

76. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40% всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства равна 90%, второго – 85%, третьего – 95%. 1) Определить вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдет. 2) Наудачу взятое семя не взошло. Какова вероятность, что оно получено из второго хозяйства?

77. Программа экзамена состоит из 30 вопросов. Из 20 студентов группы восемь человек выучили все вопросы, 6 человек – по 25 вопросов, 5 человек – по 20 вопросов, а один человек – 10 вопросов. Определить вероятность того, что случайно вызванный студент ответит на два вопроса билета.

78. Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки – 99%, необработанных – 85%. 1) Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдет?
2) Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанных семян?

79. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна: для первого завода – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,8 и для четвертого – 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

80. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором – 0,6, в третьем – 0,8. 1) Определить вероятность того, что покупатель купит товар в каком-то магазине. 2) Покупатель купил товар. Найти вероятность того, что он купил его во втором магазине.

1.3.ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ

Контрольная работа по разделу «Случайные события» является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине «Теория вероятностей», а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа по разделу «Случайные события» направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по теории вероятностей;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

Индивидуальный номер варианта контрольной работы находится в Приложении 8. Приложение содержит 31 вариант, номера заданий в которых соответствуют номерам в банке заданий. В каждом варианте содержится 10 задач.

Перед тем как приступить к выполнению контрольной работы, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с типовыми задачами, выполненными на практических занятиях, а также с образцом решения одного из вариантов контрольной работы. В образце решения варианта представлено и необходимое оформление контрольной работы.

За правильное выполнение каждого задания можно заработать до двух баллов.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 1.

Таблица 1. Оценивание контрольной работы № 1 в БРС

Критерии оценивания задания	**Количество баллов**
Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ, задание оформлено правильно.	**2**
Ход решения задания верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ ИЛИ задание оформлено не правильно.	**1**
Нарушена логическая цепочка рассуждений, решение не обосновано, ответ не верный, задание оформлено небрежно.	**0**
Максимальное количество баллов за контрольную работу № 1	**20**

1.4. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольная работа выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний преподавателя.

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.Например:

Контрольная работа№ 1 (или № 2) потеории вероятностей студенткиФИМЭ
4 курса группы МИа-16-1Петровой Елены Александровны
Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним, для наглядности – иллюстрациями.

6. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

1.5.ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

1.В урне находятся три синих, пять красных и девять белых шаров. Наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белым?

Решение. Испытание – извлечение одного шара.

СобытиеA – появление белого шара.

Все элементарные исходы испытания несовместны и равновозможны. Их число: $n = 17$.

Число исходов, благоприятствующих событию - 9. Тогда вероятность события равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{17} \approx 0{,}529$.

Ответ: 0,529.

2.Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Испытание – набор наудачу последних трех цифр номера телефона. СобытиеA – набраны нужные цифры. Вероятность события находится по формуле$P(A) = \frac{m}{n}$.

Все элементарные исходы испытания несовместны и равновозможны. Их число $n = A_n^k = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

Число исходов, благоприятствующих событию m = 1. Тогда вероятность события равна$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720} \approx 0{,}0014.$

Ответ: 0,0014.

3.При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Решение.СобытиеA – попадание в цель при стрельбе из винтовки.

Относительная частота событияA определяется формулой:

$W(A) = \frac{M}{N}$, тогда $W(A) = 0{,}85$.

Всего было произведено 120 выстрелов, т. е. $N = 120$. Тогда M, равное числу испытаний, в которых событиеAнаступило, $M = 120 \cdot 0{,}85 = 102.$

Ответ: 102.

4. На отрезок OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение. Разобьем отрезок OA точкамиC и D на три равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка $B(x)$ попадет на отрезок CD длины $L/3$.

Искомая вероятность равна: $P = (L/3)/L = 1/3$.

Ответ: 1/3.

5. В ящике четыре белых, пять красных, восемь зеленых и три голубых шара. Шары перемешивают и извлекают один шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Элементарными исходами являются события: A – извлечение белого шара; B – извлечение красного шара; C – извлечение зеленого шара; D – извлечение голубого шара.

Интересующее нас событие состоит в появлении событияB или C, или D, т.е. события $B+C+D$. Так как событияB, C и D – несовместны, то

$$P(B+C+D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: 0,8.

6. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение.Обозначим события: A_1 - попадание первого орудия, A_2 - попадание второго орудия и A_3 - попадание третьего орудия. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события независимы.

Вероятность находим по формуле: $P(A) = 1 - q_1q_2 \ldots q_n$.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q_1q_2q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994$.

Ответ: 0,994.

7. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

Решение.Событие A - извлеченная деталь стандартна.

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2). Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, равна $P(B_1)$ = 1/2. Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, равна $P(B_2)$ =1/2.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A) = 0{,}8.$ Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A) = 0{,}9$. Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – стандартная, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Ответ: 0,85.

8. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение.СобытиеA - годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (событие B_1);
2) деталь проверил второй контролер (событие B_2).

Искомую вероятность того, что деталь, признанную стандартной, проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса: $P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}$.

По условию задачи имеем: $P(B_1)$ = 0,6 (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру); $P(B_2)$ = 0,4 (вероятность того, что деталь попадает ко второму контролеру); $P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером); $P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером).

Искомая вероятность $P_A\,(B_1) = \dfrac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} \approx 0{,}59$.

Ответ: 0,59.

9. У 6 животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,9. Какова вероятность того, что выздоровят только трое животных?

Решение. По условию задачи n = 6, а k = 3, p = 0,9 - вероятность выздоровления одного животного, тогда q = 1 – 0,9 = 0,1 – вероятность противоположного события.

По формуле Бернулли получаем: $P_6(3) = C_6^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^3 \approx 0{,}015$.

Ответ: 0,015.

10. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, n = 400; k = 80; p = 0,2; q= 0,8.

Воспользуемся формулой Лапласа: $\mathrm{P}_{400}(80 \approx \dfrac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi(x) = \dfrac{1}{8}\cdot\varphi(x)$

Вычислим $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$.

По таблице приложения $\varphi(0) = 0{,}3989$.

Искомая вероятность $P_{400}(80) = (1/8) \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986$.

Ответ: 0,04986.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1.КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (краткий)

Дискретная случайная величина. Законы распределения вероятностей

Дискретной (прерывной) называется случайная величина (ДСВ), которая принимает отдельные изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Соответствие между возможными значениями ДСВ и их соответствующими вероятностями называется ***законом распределения вероятностей***.

Закон распределения обычно задается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

где $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Закон распределения может быть задан аналитически (в виде формулы) либо графически (многоугольник распределения).

Биномиальным называют закон распределения ДСВ X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений события) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где k – число появлений события в n испытаниях,

$\lambda = np$ - среднее число появлений события или математическое ожидание. Это формула называется *формулой Пуассона* и говорят, что случайная величина распределена по ***закону Пуассона.***

Числовые характеристики дискретной случайной величины. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева

Математическом ожиданием$M(X)$ ДСВ X называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность:

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$или $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$.

2. $M(CX) = CM(X)$.

3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$, где X и $У$ – две случайные величины.

4. $M(XY) = M(X)\,M(Y)$, где X и $У$ – две случайные величины.

Дисперсией $D(X)$ ДСВ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$D(X) = M[X - M(X)]^2$.

По определению дисперсия вычисляется следующим образом:

$D(X) = [x_1 - M(X)]^2p_1 + [x_2 - M(X)]^2p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2p_n$.

Свойства дисперсии:

1. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ (*удобная формула для вычисления дисперсии*).

2. $D(C) = 0$.

3. $D(CX) = C^2D(X)$.

4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, где X и $У$ – две случайные величины.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ СВX называется квадратный корень из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Для СВX, имеющей *биномиальное распределение*:

$M(X) = np$; $D(X) = npq$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Математическое ожидание и дисперсия СВX, распределенной по *закону Пуассона*, равны: $M(X) = D(X) = \lambda$.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение СВX от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин X_1, X_2, …, X_n, … имеет конечные математические ожидания, и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. если ε – любое положительное число, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

В частности, среднее арифметическое последовательности попарно независимых величин, дисперсии которых равномерно ограничены и которые имеют одно и тоже математическое ожидание a, сходится по вероятности к математическому ожиданию a, т.е. если ε – любое положительное число, то $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathrm{a}\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Непрерывная случайная величина. Функция распределения вероятностей. Плотность распределения вероятностей

Непрерывной называется случайная величина (НСВ), которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Функцией распределения(***интегральной функцией распределения***) вероятностей СВX называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P\ (X<x)$.

Функция распределения является общим способом задания любой случайной величины.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то

$F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;\ b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$P(a< X <b) = F(b) – F(a)$.

4. Вероятность того, что НСВ X примет одно определенное значение, равна нулю:

$P(X = x_1) = 0$.

5. Если возможные значения СВX принадлежат интервалу $(a;\ b)$, то:

$F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. Если возможные значения НСВ расположены на всей числовой оси, то $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$.

Плотностью распределения вероятностей НСВ X (или ***дифференциальной функцией распределения***) называется функция, равная первой производной от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Вероятность того, что НСВX примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$ определяется равенством:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Свойства плотности распределения:

1.Плотность распределения неотрицательна, т.е.$f(x) \geq 0$.

2. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x).$$

3.Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

4.Если возможные значения СВ принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическим ожиданиемНСВ, возможные значения которой принадлежат интервалу (a, b), называется определенный интеграл

$\int_a^b x\, f(x)dx,$ т.е. $M(X) = \int_a^b x\, f(x)dx,$ где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X.

Если возможные значения СВ принадлежат всей числовой оси, то $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx,$ предполагается, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ существует.

Модой $M_o(X)$ НСВ X называют то её возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой $M_e(X)$ НСВ X называют то её возможное значение, которое определяется равенством^

$$P[X \prec M_e(X)] = P[X \succ M_e(X)].$$

Дисперсия НСВ, возможные значения которой принадлежат интервалу (a,b), определяется равенством:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2\, f(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей осиOx, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2\, f(x)dx.$$

Свойства $M(X)$ и $D(X)$ формулируются так же, как и соответствующие свойства для ДСВ.

Вычислять дисперсию удобно по следующим формулам:

$D(X) = \int_a^b x^2\, f(x)\, dx - [M(X)]^2$, если значения СВ принадлежат интервалу (a, b);

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx - [M(X)]^2,$ если значения СВ принадлежит всей числовой оси.

Величину $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называют ***средним квадратическим отклонением*** СВ.

Равномерное распределение случайных величин. Показательное распределение. Нормальное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей НСВ X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно $f(x) = 1/(b-a)$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Математическое ожидание и *дисперсия* равномерно распределенной СВ находятся по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей НСВ X, которое описывается плотностью распределения

$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0. \\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases}$, где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0. \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) НСВ X, распределенной по показательному закону, заданному функцией распределения: используя свойства функции распределения, имеем:

$P(a<X<b)=F(b) - F(a)$.

Учитывая, что $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}, \quad F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$, получим

$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Значения функции e^{-x} находят по таблице.

Математическое ожидание показательного распределения:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};$$

дисперсия: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$;

среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Нормальным называют распределение вероятностей НСВ *X*, плотность которого имеет вид: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где σ и a – *параметры распределения:* σ – среднее квадратическое отклонение *X*, a – математическое ожидание.

График функции *f(x)* называется ***кривой нормального распределения*** или ***нормальной кривой***.

Свойства кривой нормального распределения:

1) функция определена на всей числовой оси*Ox*;

2) при всех значениях *x* функция принимает положительные значения, т.е. нормальная кривая расположена над осью*Ox*;

3) Ось*Ox* служит горизонтальной асимптотой графика;

4) кривая симметрична относительно прямой$x = a$;

5) функция имеет максимум при $x = a$, равный $f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

6) по мере удаления *x* от точки *a* функция убывает и при $x\to \pm\infty$ кривая приближается к оси*Ox*;

7) кривая выпукла при $x\in (a-\sigma,\ a+\sigma)$и вогнута при$x\in(-\infty, a-\sigma)$ и $x\in(a+\sigma,\ +\infty)$, а точки графика $(\mathrm{a}-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ *и* $(\mathrm{a}+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$являются точками перегиба.

Вероятность того, что СВ*X*, подчиненная нормальному закону, примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна:

$$P(\alpha \langle\, X \,\langle\, \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функция Лапласа (ее значения даны в таблице приложения 2).

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной СВX по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, равна

$$P(|X-a|\langle \delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило трех сигм. Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения:

$$P\left(|X-a|\langle 3\sigma\right)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

2.2.БАНК ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 2 ПО РАЗДЕЛУ «СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

Для всех вариантов номера задач находятся в приложении 4.

1. Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих пробах не участвует. Построить многоугольник распределения.

2. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

3.Непрерывная случайная величина Xзадана дифференциальной функцией $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \ при \ \ x<-\dfrac{\pi}{2} \ \ или \ \ x>0,\\ \cos x \ \ при \ \ -\dfrac{\pi}{2}<x<0.\end{cases}$$

. 1) Найти функцию распределения X.

2) Построить графики $F(x)$ и $f(x)$. 3) Найти вероятность попадания X в интервал $\left(-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Дана интегральная функция распределения: $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Найти дифференциальную функцию $f(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$, D(X).

5. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,4, вторым – 0,6. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

6. Производится три независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления событияA равна 0,4. Составить закон распределения ДСВ X – числа появлений событияA в указанных испытаниях. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

7. В партии из 10 деталей имеется восемь стандартных. Из этой партии наудачу взято две детали. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу стандартных деталей в выборке. Построить многоугольник распределения.

8. НСВ Xзадана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{\textit{при}}\ \ x\le 0, \\ (1/\pi)(x-0{,}5\sin 2x) & \text{\textit{при}}\ \ 0<x\le\pi, \\ 1 & \text{\textit{при}}\ \ x>\pi. \end{cases}$$ 1) Найти плотность вероятности.

2) Построить графики $f(x)$, $F(x)$. 3) Найти вероятность попадания случайной величиныX в интервал (0; π/2).

9. Найти: $M(X)$ непрерывнойслучайной величины X, распределенной равномерно в интервале

(2; 8); функцию распределения $F(x)$ и функцию плотности вероятности $f(x)$; вероятность попадания непрерывной случайной величиныX в интервал (3; 6).

10. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времениT равна 0,001. Найти вероятность того, что за времяT откажут ровно три элемента. Определить закон распределения случайной величины X и её числовые характеристики.

11. В коробке семь карандашей, из которых четыре красных. Из этой коробки наудачу извлекается три карандаша. 1) Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке. 2) Построить многоугольник распределения. 3) Найти вероятность события: $0<X\leq 2$.

12. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 250 деталей окажется ровно пять бракованных. Определить закон распределения случайной величины X и её числовые характеристики.

13. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время не откажет хотя бы один элемент, равна 0,99.

14. НСВ X на всей числовой осиOx задана интегральной функцией: $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\ x$. Найти вероятность того, что в результате двух испытаний случайная величина примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

15. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X: $f(x)=\begin{cases} 0 & при \ x \le \pi/6, \\ C\sin 3x & при \ \pi/6 < x \le \pi/3, \\ 0 & при \ x > \pi/3. \end{cases}$. Найти$C$, интегральную функцию $F(x)$.

16. Из 25 контрольных работ, среди которых пять оценены на «отлично», наугад извлекается три работы. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, если X – число работ, оцененных на «отлично» среди извлеченных. Построить многоугольник распределения. Чему равна вероятность события X> 0?

17. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

18. В урне пять белых и 20 черных шаров. Вынули три шара. Случайная величинаX – число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения величины X.

19. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти интегральную функцию и построить её график.

20. Дана дифференциальная функция случайной величины X: $f(x)=\begin{cases} 0 & при \ x \le 1, \\ C(x^2-x) & при \ 1 < x \le 2, \\ 0 & при \ x > 2. \end{cases}$. Найти: постоянную$C$; интегральную функцию $F(x)$; вероятность попадания случайной величины X в интервал (1/2; 3/2).

21. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,9 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Дискретная случайная величина X – число промахов. Найти закон распределения X; построить многоугольник распределения; найти вероятность событий: $X< 2$, $X\leq 3$, $1 <X \leq 3$.

22. Бросают три монеты. Требуется: а) задать случайную величинуX, равную числу выпавших «решек»; б) построить ряд распределения.

23. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = C/(1+x^2)$. Найти: а) постояннуюC; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания в интервал $-1<X< 1$; г) построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

24. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины, имеющей плотность вероятности $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}$. Указать интервал, симметричный относительно $M(X)$, в который попадает СВ X с вероятностью

$p = 0{,}9973$.

25. Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при четырех бросках, если вероятность попадания равна 0,7.

26. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго – 0,4. Дискретная случайная величина X – число попаданий в мишень. Найти закон распределения X; построить многоугольник распределения; найти вероятность $X \geq 1$.

27. Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 4 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке.

28.Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$. Найти плотность вероятности X; построить графики $f(x)$ и $F(x)$; найти вероятность попадания X в интервал (0; 1).

29. $M(X)$ и $\sigma(X)$ нормального распределения случайной величины X соответственно равны 10 и два. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

30. СВX задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x \le 2, \\ (x-2)^2 & при\ 2 < x \le 3, \\ 1 & при\ \ x > 3. \end{cases}$.

Найти плотность вероятности случайной величины X; построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

31. Три стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти закон распределения величины X – числа попаданий в мишень. Построить многоугольник распределения. Чему равна вероятность получения не менее двух попаданий?

32. Случайная величина X распределена равномерно в интервале

(0; π). Найти закон распределения случайной величины$Y = cosX$.

33. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [1; 3]. Найти плотность вероятности случайной величины$Y = X^2$.

34. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X задана на всей числовой осиOx: $f(x) = 4C/(1 + x^2)$. Найти постоянный параметр C.

35. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x \le -2, \\ 1/2+(1/\pi)\arcsin(x/2) & при\ -2 < x \le 2, \\ 1 & при\ \ x > 2. \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате трех испытаний X примет значение в интервале (-1; 1).

36. В первой урне пять шаров – два белых и три черных. Во второй три шара – один белый и два черных. Из первой урны наудачу переложили во вторую два шара, после чего из второй в первую переложили один шар. Найти закон распределения случайной величины X – числа белых шаров в первой урне, после всех перекладываний шаров. Какова вероятность того, что число белых шаров не больше, чем первоначально? Построить многоугольник распределения.

37. Случайную величину *X* умножили на *k*. Как от этого изменяются её характеристики: а) математическое ожидание; б) дисперсия; в) среднее квадратическое отклонение?

38. Функция распределения случайной величины *X* задана формулой $F(x) = A + B \cdot arctgx\, , (-\infty < X < +\infty)$. Найти: а) постоянные*A* и *B*; б) плотность вероятности *f*(*x*); в) вероятность того, что величина *X* попадет в отрезок [-1; 1].

39. СВ *X* задана интегральной функцией $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 2, \\ 1/2x - 1 & при\ 2 < x \le 4, \\ 1 & при\ x > 4. \end{cases}$.

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение: а) меньше 2; б) меньше 3; в) не меньше 3; г) не меньше 5.

40. Дана интегральная функция НСВ *X*: $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \sin 2x & при\ 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 & при\ x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$.

Найти дифференциальную функцию и вероятность попадания случайной величины в интервал (π/16; π/8).

41. Вероятность изготовления стандартной детали – 0,98. Для контроля наудачу взято 100 деталей. Найти закон распределения случайной величины *X*, равной числу нестандартных деталей в выборке. Построить многоугольник распределения. Найти вероятность событий: а) в выборке две стандартные детали; б) в выборке более двух стандартных деталей.

42. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 50 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,01.

43. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией: $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$ в интервале (-c; c), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (-c/2; c/2) и функцию распределения $F(x)$.

44.Непрерывная случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданиемa = 10. Вероятность попадания случайной величиныX в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)?

45. Производятся 20 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти дисперсию числа появления успеха в этих испытаниях.

46. Дискретная случайная величина X – число мальчиков в семьях с пятью детьми. Предполагают равновероятное рождение мальчика и девочки. Найти закон распределения X. Построить многоугольник распределения.

47. При 10 000 бросаний монеты «герб» выпал 6400 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична?

48. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,01. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время t окажется меньше двух.

49. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & при\ \ x\geq 0\quad (\lambda>0),\\ 0 & при\ \ x<0.\end{cases}$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (2;3).

50. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ (распределение Лапласа). Найти математическое ожидание величины X.

51 – 70. Случайные величины X и Y заданы законами распределений. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X и Y. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$;$V = XY$. Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величиныZ. Найти математическое ожидание, дисперсию случайной величины$W = 2X – 4Y$.

51.

x_i	-1	3	4
p_i	0,2	p_2	0,6

y_i	2	5
q_i	0,4	0,6

52.

x_i	2	7	9
p_i	P_1	0,3	0,2

y_i	0	1
q_i	0,7	0,3

53.

x_i	4	6	9
p_i	0,1	0,5	p_3

y_i	3	5
q_i	0,4	0,6

54.

x_i	1	2	5
p_i	p_1	0,1	0,8

y_i	1	3
q_i	0,4	0,6

55.

x_i	-2	4
p_i	0,4	0,6

y_i	0	5	10
q_i	0,3	q_2	0,3

56.

x_i	0	5	10
p_i	0,3	0,1	p_3

y_i	-2	4
q_i	0,3	0,7

57.

x_i	-2	0	3
p_i	p_1	0,5	0,2

y_i	4	6
q_i	0,5	0,5

58.

x_i	-5	0	10
p_i	0,2	0,2	0,6

y_i	1	6
q_i	q_1	0,4

59.

x_i	-1	2	4
p_i	0,4	0,2	p_3

y_i	-3	1
q_i	0,4	0,6

60.	x_i	4	7	10		y_i	1	5	
	p_i	0,3	*0,2*	p_3		q_i	0,1	0,9	

61.	x_i	-4	-2	1		y_i	0	4	
	p_i	0,1	0,6	0,3		q_i	q_1	0,2	

62.	x_i	-10	-6	-1		y_i	-1	2	
	p_i	0,4	p_2	0,2		q_i	0,2	0,8	

63.	x_i	-1	0	3		y_i	2	4	
	p_i	0,6	0,2	0,2		q_i	q_1	0,2	

64.	x_i	-2	-1	1		y_i	4	5	
	p_i	0,3	0,2	p_3		q_i	0,2	0,8	

65.	x_i	3	7	10		y_i	-4	4	
	p_i	p_1	0,1	0,6		q_i	0,3	0,7	

66.	x_i	-6	-2	-1		y_i	1	4	
	p_i	0,2	p_2	0,2		q_i	0,2	0,8	

67.	x_i	2	5			y_i	-1	3	7
	p_i	0,4	p_2			q_i	0,1	0,3	0,6

68.	x_i	0	10	20		y_i	-2	-1	
	p_i	0,4	p_2	0,4		q_i	0,3	0,7	

69.	x_i	-10	0	5		y_i	1	4	
	p_i	0,3	0,4	0,3		q_i	0,8	q_2	

70.	x_i	-2	1
	p_i	0,1	p_2
q_i	0,2	0,3	0,5
y_i	-6	-1	2

71 – 90. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти: а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a;\ b)$; б) дифференциальную функцию (плотность распределения) $f(x)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

71. $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{\mathrm{x}^2}{\pi^2}, & 0<x\le\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$ $a=1$, $b=2$.

72. $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{64}{81}\mathrm{x}^2, & 0<x\le\dfrac{9}{8},\\ 1, & x>\dfrac{9}{8}.\end{cases}$ $a=1$, $b=2$.

73. $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (\mathrm{x}-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $a=2{,}5$, $b=3$.

74. $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{6}(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}), & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $a=1$, $b=2$.

75. $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\sin\mathrm{x}}{2}+\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $a=0$, $b=\frac{\pi}{6}$.

76. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{16}{25}x^2, & 0<x\le \frac{5}{4}, \\ 1, & x>\frac{5}{4}. \end{cases}$ a = 0,5, b = 1.

77. $F(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$ a = -2, b = 0.

78. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \ln x, & 1<x\le e, \\ 1, & x>e. \end{cases}$ a = 2, b = e.

79. $F(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 100, \\ 1-\left(\frac{100}{x}\right)^3, & x>100. \end{cases}$ a = 110, b= 120.

80. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-2x}, & x>0. \end{cases}$ a = 0, b = 2.

81. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{x^2}{e^2}, & 0<x\le e, \\ 1, & x>e. \end{cases}$ a = 1, b = 2.

82. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3, \\ \frac{x^4-81}{175}, & 3<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$ a = 3,2, b = 3,5.

83. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{x^4}{16}, & 0<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$ a = 1, b = 1,5.

84. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \frac{(x-1)^2}{25}, & 1<x\le 6, \\ 1, & x>6. \end{cases}$ a = 2, b = 4.

85. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{(x+2)^3}{216}, & -2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ a = -1, b = 3**.**

86. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x^3 - x}{60}, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ a = 1, b = 2.

87. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{64}{49}x^2, & 0 < x \le \dfrac{7}{8}, \\ 1, & x > \dfrac{7}{8}. \end{cases}$ a = 0,5, b = 1.

88. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{x^3 + 8}{16}, & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ a = -1, b = 1.

89. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x^3 - x^2}{48}, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ a = 2, b = 3.

90. $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \sqrt{2}, \\ \dfrac{x^6 - x^4 - 4}{96}, & \sqrt{2} < x \le \sqrt{5}, \\ 1, & x > \sqrt{5}. \end{cases}$ a = 1,5,b = 2.

2.3.ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ

Контрольная работа по разделу «Случайные величины» является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине «Теория вероятностей», а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Контрольная работа по разделу «Случайные величины» направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по теории вероятностей;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

Индивидуальный номер варианта контрольной работы находится в Приложении 9. Приложение содержит 31 вариант, номера заданий в которых соответствуют номерам в банке заданий. В каждом варианте содержится 10 задач.

Перед тем как приступить к выполнению контрольной работы, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с типовыми задачами, выполненными на практических занятиях, а также с образцом решения одного из вариантов контрольной работы. В образце решения варианта представлено и необходимое оформление контрольной работы.

За правильное выполнение 1-8 заданий можно заработать до двух баллов; 9-10 заданий – до трёх баллов.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 2.

Таблица 2. Оценивание контрольной работы № 2 в БРС

Номера заданий	Критерии оценивания задания	Количество баллов
1-8	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ, задание оформлено правильно.	**2**
	Ход решения задания верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ ИЛИ задание оформлено не правильно.	**1**
	Нарушена логическая цепочка рассуждений, решение не обосновано, ответ не верный, задание оформлено небрежно.	**0**
9-10	Задание выполнено полностью. Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ, задание оформлено правильно.	**3**
	Ход решения задания верный, но решение недостаточно обоснованно ИЛИ из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ ИЛИ задание оформлено не правильно.	**2**
	Ход решения задания верный, но задание решено не полностью, из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ ИЛИ задание оформлено не правильно.	**1**
	Максимальное количество баллов за контрольную работу № 2	**22**

2.4. ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

1. В денежной лотерее выпущено 10000 билетов. Разыгрывается 100 выигрышей в 500 рублей и 1000 выигрышей по 10 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

<u>Решение.</u> Возможные значения случайной величины X: $x_1 = 500$; $x_2 = 10$; $x_3 = 0$.

Вероятности этих значений находим по классическому определению вероятности: $p_1 = \frac{100}{10000} = 0{,}01$; $p_2 = \frac{1000}{10000} = 0{,}1$;

$p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89$.

Тогда закон распределения имеет вид:

X	500	10	0
p	0,01	0,1	0,89

2. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

<u>Решение.</u> Это пример биномиального распределения при $n = 20$ и $p = 0.4$. Ожидаемое число есть $M(X) = np = 20 \cdot 0.4 = 8$.

Ответ: 8.

3. СВX задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

<u>Решение.</u> $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

Найдем математическое ожидание X: $M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

Найдем математическое ожидание величины X^2:
$(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54$.

Находим дисперсию: $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$.

Искомое$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$=3,61.

Ответ: 3,61.

4. ДСВ Xзадана законом распределения

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0,2$.

Решение. Найдем $M(X)$и $D(X)$ величины X:
$M(X) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54;\ D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,0144.$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставляя $M(X) = 0,54,\ D(X) = 0,0144,\ \varepsilon = 0,2$, получим:

$$P(|X - 0,54| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,0144}{0,04} = 0,64.$$

Ответ: 0,64.

5. СВX задана плотностью распределения

$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \leq 1, \\ ax \ \ при \ \ 1 < x \leq 3, \\ 0 \ \ при \ \ x > 3. \end{cases}$ Найти: 1) коэффициент a; 2) $M(X)$; 3) $D(X)$.

Решение. Используя свойство 4 плотности вероятности, получаем:

$\int_1^3 ax\,dx = 1,\ \ a\int_1^3 x\,dx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = 4a,\ 4a = 1$, следовательно $a = \frac{1}{4}$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X) = \int_1^3 \frac{1}{4}x\,x\,dx = \frac{1}{4}\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{27-1}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{26}{3} = \frac{26}{12} \approx 2,17;$$

$$D(X) = \int_1^3 \frac{1}{4}x^2\,x\,dx - (2,17)^2 = \frac{1}{4}\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 - (2,17)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{3^4 - 1^4}{4} - (2,17)^2 = 5 - 4,7089 = 0,2911.$$

Ответ: 1/4; 2,17; 0,2911.

6. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0.\\ 2e^{-2x} & при \quad x\geq 0\end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,3; 1).

Решение. По условию, $\lambda = 2$. Тогда $P(0{,}3 < X < 1) = e^{-(2\cdot 0{,}3)} - e^{-2\cdot 1} \approx 0{,}41$.

Ответ: 0,41.

7. Известно, что случайная величинаX подчинена нормальному закону распределения, $M(X)$ = 6, σ^2= 9. Найти функцию плотности вероятности.

Решение. Имеем: a = 6, σ = 3. Согласно формуле, плотность распределения имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}$.

8. Случайная величинаX распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. По условию, δ = 3, a = 20, σ = 10. Следовательно, $P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\dfrac{3}{10}\right)=2\Phi(0{,}3).$ По таблице приложения находим $\Phi(0{,}3)=0{,}1179.$ Искомая вероятность $P(|X-20|<3)=0{,}2358.$

Ответ: 0,2358.

9. Случайные величины X и Y заданы законами распределений:

X	-2	2	5
p	0,2	0,5	0,3

Y	0	1	4
p	0,3	0,4	0,3

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y. Составить законы распределения случайных величин $Z = X + Y$;$V = XY$. Построить многоугольник распределения вероятностей Z. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $W = 2X - 4Y$.

Решение.

1. Находим математические ожидания случайных величин X и Y по формуле $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$:

$$M(X) = -2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 = 2{,}1.$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}6.$$

2. Находим дисперсии случайных величин X и Y по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$:

$$D(X) = (-2)^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 5^2 \cdot 0{,}3 - (2{,}1)^2 = 5{,}89.$$

$$D(Y) = (0)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}3 - (1{,}6)^2 = 2{,}64.$$

3. Находим средние квадратические отклонения случайных величин X и Y по формуле $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$:

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}89} \approx 2{,}427; \quad \sigma(Y) = \sqrt{2{,}64} \approx 1{,}625.$$

4. Составим закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Получим её значения:

$$z_1 = -2 + 0 = -2;\ z_2 = -2 + 1 = -1; \dots;\ z_9 = 5 + 4 = 9.$$

Вычислим соответствующие вероятности:

$$p_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06;\ p_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08; \dots;\ p_9 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09.$$

Закон распределения имеет вид:

Z	-2	-1	2	3	5	6	9
p	0,06	0,08	0,21	0,2	0,09	0,27	0,09

5. Составим закон распределения случайной величины $V = XY$.

Получим её значения:

$$v_1 = -2 \cdot 0 = 0;\ v_2 = -2 \cdot 1 = -2; \dots;\ v_9 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Вычислим соответствующие вероятности:

$$p_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06;\ p_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08; \dots;\ p_9 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09.$$

Закон распределения имеет вид:

V	-8	-2	0	2	5	8	20
p	0,06	0,08	0,3	0,2	0,12	0,15	0,09

6. Находим математическое ожидание случайной величины $W = 2X - 4Y$:

$$M(W) = M(2X - 4Y) = M(2X) - M(4Y) = 2M(X) - 4M(Y)$$
$$= 2 \cdot 2{,}1 - -4 \cdot 1{,}6 = -2{,}2.$$

Находим дисперсию случайной величины $W = 2X - 4Y$:

$$D(W) = D(2X - 4Y) = D(2X) + D(4Y) = 4D(X) + 16D(Y) =$$
$$= 4 \cdot 5{,}89 + 16 \cdot 2{,}64 = 65{,}8.$$

10.Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения $F(x)$:

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ \frac{1}{6}(\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}), 1 < x \le 3, \\ 1, \ x > 3. \end{cases}$$ $a = 1$, $b = 2$. Найти: а) вероятность попадания X в интервал $(a; b)$; б) дифференциальную функцию (плотность распределения) $f(x)$; в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

а) Зная функцию распределения случайной величины, вероятность попадания X в интервал $(a; b)$ находится по формуле:

$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$. Тогда$P(1 <X< 2) = F(2) - F(1) =$

$= \frac{1}{6}(4 - 2) - 0 = \frac{1}{3}$.

$$б) f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \ \text{при } x \le 1, \\ \frac{1}{6}(2x - 1), \ \text{при } 1 < x \le 3, \\ 0, \ \text{при } x > 3. \end{cases}$$

в) Находим математическое ожидание X: $M(X) = \int_a^b x\, f(x) dx$,

$$D(X)=\int_a^b x^2\, f(x)\,dx-[M(X)]^2 \quad ,\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Катальников, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. В. Катальников, Ю. В. Шапарь ; науч. ред. И. А. Шестакова ; Министерство образования и науки РФ, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. - 2-е изд., перераб. - Электронные текстовые данные. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 72 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276210. – Загл. с экрана.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели [Электронный ресурс] : учебник для академического бакалавриата / В. Д. Мятлев, Л. А. Панченко, Г. Ю. Ризниченко, А. Т. Терехин. — 2-е изд., испр. и доп. — Электронные текстовые данные. - Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 321 с. — (Университеты России). — Режим доступа: https://biblio-online.ru/viewer/3BE3DA5E-63AD-4D81-ABC6-8B5C7744D7B3. – Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие . - 12-е издание, переработанное. - М. : Высшее образование [и др.], 2009. - 479 с. - (Основы наук). - Гриф МО "Рекомендовано". - ISBN 978-5-9692-0391-4. – Загл. с экрана.

2.Долматова, Т. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Т. А. Долматова ; Минобрнауки России, ФГБОУ ВПО "Кузбасская государственная педагогическая академия". - Новокузнецк : [РИО КузГПА], 2014. - 102 с.

3. Палий, И. А. Теория вероятностей [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. А. Палий. – Эл.текстовые данные. – Москва : ИНФРА-М, 2012. - 236 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-16004940-3. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=225156. – Загл. с экрана.

4. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. С. Мхитарян [и др.] ; под ред. В. С. Мхитаряна. - 2-е изд., перераб. и доп. - Электронные текстовые данные. — Москва : Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. - 336 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=451329. – Загл. с экрана.

5. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Т. А. Гулай [и др.]. - 2-е изд., доп. – Эл.текстовые данные. - Ставрополь : АГРУС, 2013. - 260 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=514780. – Загл. с экрана.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ Приложение 1

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2254	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1569	1513
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0794	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ Приложение 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

Приложение 3

Задания к контрольной работе № 1

№ варианта	Номера задач									
1	4	8	23	24	26	44	54	61	66	73
2	3	10	17	22	28	35	37	41	49	59
3	5	20	35	36	39	42	43	62	65	67
4	1	14	15	18	45	51	62	63	64	75
5	3	8	28	29	38	41	52	75	79	80
6	4	7	16	17	18	26	33	41	42	59
7	8	22	35	48	56	65	69	70	77	78
8	6	19	27	31	32	37	59	71	73	80
9	25	29	30	32	34	36	45	46	53	65
10	3	7	12	13	16	40	50	56	64	74
11	12	33	44	47	49	53	57	59	66	68
12	2	5	13	28	31	55	58	60	70	75
13	9	12	14	29	30	42	56	69	71	74
14	1	3	27	39	49	51	61	64	66	78
15	11	18	21	22	40	52	73	70	78	79
16	24	25	36	44	47	48	52	54	69	72
17	10	13	20	31	37	57	61	72	73	74
18	5	6	15	18	21	50	62	63	67	68
19	1	14	26	33	34	41	50	58	70	76
20	5	11	21	23	25	32	40	43	53	78
21	6	19	31	33	52	58	62	71	72	80
22	9	13	20	23	25	38	56	60	67	68
23	2	4	7	16	30	32	34	38	63	76
24	4	11	23	24	28	39	51	54	76	77
25	1	6	9	13	19	40	46	48	57	58
26	2	16	17	24	47	57	64	71	74	77
27	8	10	20	35	37	44	53	54	63	69
28	2	7	15	19	22	26	45	66	72	80
29	11	12	27	28	30	39	55	61	67	79
30	9	15	17	27	34	43	49	50	51	55
31	10	21	36	38	46	55	60	65	68	75

Приложение 4

Задания к контрольной работе № 2

№ варианта	Номера задач									
1	4	8	23	24	26	44	45	46	51	71
2	3	10	17	22	28	35	37	41	52	72
3	5	20	35	36	39	42	43	44	53	73
4	1	14	15	18	39	40	45	47	54	74
5	3	8	28	29	34	35	36	37	55	75
6	4	7	16	17	18	26	33	41	56	76
7	8	9	10	11	12	17	22	50	57	77
8	6	20	26	28	30	31	44	49	58	78
9	25	29	30	32	36	45	46	50	59	79
10	3	7	12	13	16	40	42	45	60	80
11	12	33	34	36	38	39	42	47	61	81
12	2	5	14	29	31	32	38	43	62	82
13	9	12	14	15	17	23	27	29	63	83
14	1	3	4	9	16	18	19	22	64	84
15	11	18	21	22	40	43	44	48	65	85
16	24	25	36	37	38	39	43	48	66	86
17	10	13	14	16	18	22	26	49	67	87
18	5	6	15	18	21	23	24	28	68	88
19	1	14	26	27	31	33	34	42	69	89
20	5	11	21	23	25	32	40	43	70	90
21	20	21	41	44	49	50	51	52	55	71
22	9	13	20	23	25	31	41	52	55	72
23	2	4	7	16	30	32	34	38	53	73
24	4	11	23	24	28	41	42	47	54	74
25	1	6	9	13	19	40	46	48	55	75
26	2	16	17	24	25	29	31	33	56	76
27	8	10	20	22	25	29	35	46	57	77
28	2	7	15	19	26	45	47	50	78	80
29	11	12	27	28	30	39	40	41	59	79
30	9	15	17	27	34	43	49	50	60	80
31	10	21	35	36	37	38	48	49	61	81