Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Т. А. Долматова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания к практическим занятиям
для обучающихся по направлениям подготовки
44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Информатика»;
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),
профили «Математика и Информатика» и «Технология и Информатика»

Новокузнецк

2019

УДК [378.147.88:519.21](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.171я73
Д 64

Долматова Т. А.

Д 64 Теория вероятностей: методические указания к практическим занятиям для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Информатика»); 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Технология и Информатика») / Т. А. Долматова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 77 с.

В работе изложены методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория вероятностей»: краткие теоретические сведения; примеры решения опорных задач; сборники задач по каждой теме для организации практических занятий и выполнения домашних работ; ответы к задачам; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Информатика»; 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика и Информатика», «Технология и Информатика».

Рекомендовано на заседании
кафедры математики, физики и
математического моделирования
Протокол № 4 от 29.11.2019
Заведующий каф. МФММ
_____________/ Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией
факультета информатики, математики и
экономики
Протокол № 4 от 12.12.2019
Председатель методической комиссии ФИМЭ
_________________/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:519.21](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.171я73
Д 64

Текст представлен в авторской редакции

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Информатика»); 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профили «Математика и Информатика», «Технология и Информатика») и предназначены для наиболее рациональной организации аудиторной и внеаудиторной работы по изучению дисциплины «Теория вероятностей».

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности, происходящие в массовых однородных случайных явлениях и процессах. «Теория вероятностей» относится к дисциплинам вариативной части учебного плана подготовки бакалавров.

Целью изучения дисциплины «Теория вероятностей» является формирование математической компетентности, основанной на осознании значимости вероятностных, статистических моделей и методов в подготовке будущего учителя и в будущей профессиональной деятельности. **Задачи** дисциплины: формирование понимания значимости теории вероятностей в естественнонаучном образовании будущего учителя и базиса теоретических знаний науки, практических умений по их применению в будущей профессиональной деятельности.

Программа изучения дисциплины «Теория вероятностей» разработана на модульной основе. Весь учебный материал разделен на две основные структурные единицы, представляющие логически завершенные, информационно и методически обеспеченные блоки учебной дисциплины, называемые модулями, каждый из которых включает в себя несколько учебных элементов (УЭ). Модульное обучение неразрывно связано с балльно-рейтинговой системой контроля знаний. Раздел «Балльно-рейтинговая система обучения теории вероятностей» поясняет организацию процесса изучения дисциплины и требования, предъявляемые при этом к студентам. По каждой теме учебного элемента предложены: краткий теоретический материал, содержащий основные понятия, теоремы и формулы; сборник разноуровневых задач в количестве, достаточном для организации аудиторной и внеаудиторной работы, контрольные вопросы. В методические рекомендации включены: список основной и дополнительной литературы, предназначенной для самостоятельной работы по изучению теоретического материала и решения задач, необходимые приложения.

БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ СИСТЕМА ОБУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

БАЗОВЫЕ МОДУЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Модуль 1. Случайные события

УЭ 1.1. Основные понятия теории вероятностей: испытание и событие. Виды случайных событий. Определения вероятности: классическое, статистическое, геометрическое. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Сумма событий. Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Полная группа событий. Противоположные события. Произведение событий. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий. Вероятность появления хотя бы одного события.

УЭ 1.2. Следствия теорем сложения и умножения вероятностей: теорема сложения вероятностей совместных событий; формула полной вероятности; формулы Бейеса. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Модуль 2. Случайные величины

УЭ 2.1. Виды случайных величин. Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание; дисперсия; среднее квадратическое отклонение. Свойства числовых характеристик. Закон больших чисел.

УЭ 2.2. Непрерывная случайная величина (НСВ). Функция распределения вероятностей случайной величины. Плотность распределения вероятностей НСВ. Числовые характеристики НСВ. Равномерное распределение. Показательное распределение. Нормальное распределение.

УЭ 2.3. Система двух случайных величин. Условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин и системы непрерывных случайных величин. Числовые характеристики. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции.

БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВИДАМ

Таблица 1

Учебная работа (виды)	Сумма баллов	Виды и результаты учебной работы	Оценка в аттестации	Баллы
Текущая учебная работа в семестре (посещение занятий по расписанию и выполнение заданий)	**98 (60%)**	Лекционные занятия (конспект) (7 занятий)	**2 балла -** посещение 1 лекционного занятия	0 – 14
		Практические занятия (отчет о выполнении практической работы) (14 занятий).	**1 балл** - посещение 1 практического занятия; **2-3 балла** – посещение 1 занятия и существенный вклад на занятии в работу всей группы	0 - 42
		Контрольные работы (2 работы	За КР № 1**: от 0 до 20 баллов** За КР № 2**: от 0 до 22 баллов**	0 - 42
Итого по текущей работе в семестре (**50 баллов** – пороговое значение)				**0 – 98**
Промежуточная аттестация (экзамен)	**65 (40%)**	Устный опрос	**32 балла** (пороговое значение) **65 баллов** (максимальное значение)	32-65
Итого по промежуточной аттестации (экзамену)				**32-65**
Суммарная оценка по дисциплине: Сумма баллов текущей и промежуточной				

аттестации	**82 – 163 балла**

МОДУЛЬ 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Испытание или ***опыт*** - это всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление, а результат, исход испытания - это ***событие***.

События называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появления других событий в одном и том же испытании, и ***несовместными*** в противном случае.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

События A и B называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

События можно подразделить на следующие ***три вида***: достоверные, невозможные и случайные.

Классическое определение вероятности: вероятность события определяется формулой $P(A)=\frac{m}{n}$, где m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A; n – общее число всех равновозможных, несовместных элементарных исходов испытания, образующих полную группу.

<u>Пример 1.</u> В урне находятся 3 синих, 5 красных и 9 белых шаров. Наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет белым?

<u>Решение.</u> Испытание – извлечение шара. Событие A – появление белого шара. Все элементарные исходы испытания несовместны и рав-

новозможны. Их число: n = 17. Число исходов, благоприятствующих событию - 9. Тогда вероятность события равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{17}$.

Перестановки - комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Обозначаются P_n и вычисляется по формуле: $P_n = n!$

Размещения - комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Обозначаются A_n^m и вычисляется по формуле:

$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$

Сочетания - комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Обозначаются C_n^m и вычисляется по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 2. Сколько можно составить перестановок, размещение по 2 и сочетаний по 2 из трех элементов a, b, c?

Решение. Искомое число перестановок: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Искомое число размещений: $A_3^2 = 3 \cdot (3-2+1) = 6$.

Искомое число сочетаний: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

ЗАДАЧИ:

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

2. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

3. В коробке шесть одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все шесть кубиков. Найти вероятность того, что кубики появятся в возрастающем порядке.

4. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

5. Брошены две игральные кости. Найти вероятности событий:

а) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность равна четырем.

6. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме семь или восемь?

7. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

8. В мешочке имеется пять одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: *О, П, Р, С, Т*. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «*СПОРТ*».

9. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: *А, Т, М, Р, С, О*. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках, можно будет прочесть слово «*ТРОС*».

10. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от одного до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

11. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

12. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет: а) одну окрашенную грань; б) две окрашенные грани; в) три окрашенные грани.

13. Из ящика, где три черных и пять белых шаров, вынуто наугад два шара. Какова вероятность извлечения двух черных шаров?

14. Из колоды в 36 карт выбирают наудачу три карты. Найти вероятность, что: а) выбраны три туза; б) выбраны два туза.

15. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

16. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

17. В секретном замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

18. В сосуд емкостью 10 *л* попала ровно одна болезнетворная бактерия. Какова вероятность зачерпнуть её при наборе из этого сосуда стакана воды (200 см^3)?

19. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

20. В партии из 20 деталей, четыре нестандартные. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу трех деталей две окажутся стандартными.

21. В группе 25 студентов, из них 10 юношей и 15 девушек. Какова вероятность того, что из вызванных наудачу студентов: а) все три девушки; б) первые две девушки, третий – юноша; в) все трое юноши?

22. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

23. В группе 12 студентов, среди которых восемь отличников. По списку наудачу отобраны девять студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

24. Из стандартной колоды в 36 карт наудачу выбирается одна карта. Найти вероятность, что выбранная карта является тузом (масть роли не играет).

25. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

26. Среди 100 лотерейных билетов есть пять выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

27. Найти ошибку в решении задачи: брошены две игральные кости; найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна пять (событие A). Решение: возможны два исхода испытания: сумма выпавших очков равна пять и сумма выпавших очков не равна пяти. Событию A благоприятствует один исход; общее число исходов равно два, следовательно искомая вероятность $P(A) = ½$.

28. Все натуральные числа от 1 до 30 написаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным пяти?

29. Из букв слова «дифференциал» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной; б) согласной; в) «ч»?

Контрольные вопросы:

1. Что такое испытание, событие?
2. Какие события называются совместными, несовместными?
3. Что такое полная группа событий?
4. Какие события называются равновозможными?
5. Какие события называются противоположными?
6. На какие виды делятся все события? Дать определения.
7. Что такое вероятность события?
8. Классическое определение вероятности события.
9. Какими свойствами обладает вероятность?
10. Что такое комбинаторика?

11. Что представляют собой перестановки? По какой формуле вычисляются?

12. Что представляют собой размещения? По какой формуле вычисляются?

13. Что представляют собой сочетания? По какой формуле вычисляются?

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Относительная частота события A определяется формулой:

$W(A) = \frac{M}{N}$, где M – число испытаний, в которых событие A наступило,

N – общее число произведенных испытаний.

Теорема Бернулли: *при большом числе однородных и независимых испытаний частота некоторого события сколь угодно мало отличается от вероятности этого события в одном испытании.*

Вероятностью события A в данном испытании называют число $P(A)$, около которого колеблются значения относительной частоты при больших количествах испытаний. Это ***статистическое определение вероятности***.

Пример 1. Было вакцинировано 45 животных, заболевших животных было зарегистрировано 5. Относительная частота заболеваемости составила: $W(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

ЗАДАЧИ:

1. Всхожесть семян дикой яблони равна 60%. Сколько потребуется высеять семян, чтобы получить 120 ростков?

2. Относительная частота появления клубней картофеля, имеющих механические повреждения при уборке, равна 0,15. В корзине 350 клубней. Сколько клубней окажется поврежденными?

3. Для определения всхожести пшеницы посеяли две серии по 200 зерен. Получено соответственно 189 и 193 всхода. Какова относительная частота всхожести в каждой серии? Чему равна процентная всхожесть пшеницы?

4. Прививка сделана 12 животным. Иммунитет приобрели девять. Какова относительная частота приобретения иммунитета?

5. В урне 100 шаров белого и черного цветов. Из урны 60 раз вынули по одному шару, каждый раз возвращая его обратно. При этом белый шар появился в 18 случаях. Какое количество белых шаров в урне представляется наиболее правдоподобным?

6. При транспортировке из 1000 дынь испортилось пять. Чему равна относительная частота испорченных дынь?

7. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

8. По цели произведено 20 выстрелов. Причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

9. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Контрольные вопросы:

1. Что такое относительная частота события?
2. В чём заключается свойство устойчивости относительной частоты события?
3. Пояснить смысл статистического определения вероятности.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством: P=Длина l /Длина L.

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от её расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством: P=Площадь g /Площадь G.

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру g, которая составляет часть объемной фигуры G: P=Объем g /Объем G.

Пример 1. На отрезок OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение. Разобьем отрезок OA точками C и D на 3 равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка $B(x)$ попадет на отрезок CD длины $L/3$. Искомая вероятность $P = (L/3)/L = 1/3$.

ЗАДАЧИ:

1. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу нанесена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что отрезки OB и BA имеют длину, большую $L/4$.

2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

3. На отрезке длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

4. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых пять и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

5. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата;

б) правильного треугольника.

6. В круг радиусом 5 вписан треугольник наибольшей площади. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.

7. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

8. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

9. Расстояние от пункта A до пункта B автобус проходит за 2 минуты, а пешеход за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из A в B пешком. Найти вероятность того, что его в пути догонит автобус.

10. *Задача Бюффона.* Игла длиной l бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, разделенными расстояниями L

($L>l$). Все положения центра иглы и все её направления одинаково вероятны. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь из линий.

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается ограниченность классического определения вероятности?
2. В чём суть геометрического определения вероятности?
3. Как определить вероятность попадания точки на отрезок, в плоскую фигуру, в объемную фигуру?

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ

Сумма или объединение двух событий A и ***B*** – это событие ***C=A+B***, состоящее в появлении события ***A*** или события ***B***, или обоих вместе.

Если события ***A*** и ***B*** *несовместны*, то ***суммой двух событий A и B*** называется событие ***C***, состоящее в появлении хотя бы одного из событий ***A*** и ***B***.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)= P(A)+P(B)$.

<u>Пример 1.</u> В ящике четыре белых, пять красных, восемь зеленых и три голубых шара. Шары перемешивают и извлекают один шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

<u>Решение</u>. Элементарными исходами являются события: A – извлечение белого шара; B – извлечение красного шара; C – извлечение зеленого шара; D – извлечение голубого шара.

Интересующее нас событие состоит в появлении события B или C, или D, т.е. события $B+C+D$. Так как события B, C и D – несовместны, то

$$P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}+\frac{3}{20}=\frac{4}{5}.$$

Следствие 1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 2. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1.$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

Произведением двух событий A и ***B*** называется событие ***C***, состоящее в совместном (одновременном или последовательном) осуществлении обоих событий ***A*** и ***B***.

Произведением или пересечением двух или нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Вероятность события ***B***, вычисленная в предположении, что событие ***A*** уже наступило, называется ***условной вероятностью события B*** и обозначается $\boldsymbol{P_A(B)}$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что одно событие уже наступило: $P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 2. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Обозначим: A – появление двух белых шаров. Событие A представляет собой произведение двух событий: $A = BC$, где B – появление белого шара при первом вынимании; вероятность такого исхода $P(B) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$; C – появление белого шара при втором вынимании. Тогда условная вероятность этого события по отношению к событию B равна $P_B(C) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$. По теореме умножения вероятностей имеем: $P(A) = P(B)\, P_B(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$.

Пример 3. Те же условия, но после первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются.

Решение. В данном случае события B и C независимы и $P(A) = P(B) \cdot P(C) = = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}16$.

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, …, $P(A_n) = p_n$. Пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:
$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий равна: $P(A) = 1 - q^n$.

Пример 4. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны: $q_1=1- p_1 =1- 0{,}8=0{,}2$; $q_2 =1 - p_2 =1- 0{,}7=0{,}3$; $q_3 =1 - p_3 = 1- 0{,}9 = 0{,}1$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q_1q_2q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994$.

ЗАДАЧИ:

1. В лотерее 1000 билетов; из них на один билет падает выигрыш 500 руб., на 10 билетов – выигрыши по 100 руб., на 50 билетов - выигрыши по 20 руб., на 100 билетов – выигрыши по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 рублей.

2. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле 0,15, во вторую – 0,23, в третью – 0,17. Найти вероятность промаха.

3. В коробке 30 таблеток: 10 красных, пять желтых и 15 белых. Найти вероятность появления цветной таблетки (т.е. красной или желтой).

4. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

5. События A, B, C, D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}3$. Чему равна вероятность события D?

6. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

7. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца; три – из-за неисправности привода; две – из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

8. Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01; во второй – 0,008, в третий – 0,025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

9. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить девять очков – 0,3; вероятность выбить 8 очков или меньше – 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее девять очков.

10. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

11. Игральная кость брошена четыре раза. Найти вероятность того, что каждый раз выпадала цифра 1.

12. Подбрасываются две монеты. Какова вероятность того, что обе упадут «гербом» вверх?

13. Имеется три ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике восемь, во втором семь и в третьем девять стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

14. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все три выстрела дали попадание.

15. Цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны на карточках, которые тщательно перемешаны. Произвольным образом вынимаются подряд три карточки и кладутся в ряд. Какова вероятность, что число, составленное из трех цифр, которые написаны на карточках, больше 987?

16. В двух ящика находятся детали: в первом – 10 (из них три стандартных), во втором – 15 (из них шесть стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

17. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

18. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что студент знает каждый из двух вопросов, заданных ему экзаменатором.

19. В лотерее 20 билетов, из них 4 выигрышных и 16 пустых. Взят один билет, содержание которого осталось неизвестным. Какова вероятность того, что второй вынутый билет выигрышный?

20. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

21. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

22. В мешочке содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в мешочек).

23. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($A\overline{B}$) – 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{A}B$) – 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{A}\overline{B}$) – 78,2%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

24. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка 0,5, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Какова вероятность того, что в мишень попали ровно две пули.

25. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

26. В первом ящике два белых и 10 черных шаров; во втором ящике восемь белых и четыре черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

27. В одной урне один белый и четыре черных шара, в другой – два белых и три черных, в третьей – три белых и два черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что вынутых шаров будет один белый и два черных шара.

28. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

29. Один стрелок поражает цель с вероятностью 90%, другой с вероятностью 75%. Найти вероятность поражения цели только одним стрелком, если оба стрелка стреляют в неё одновременно.

30. Среди 100 лотерейных билетов есть пять выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

31. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

32. В одной урне три белых и пять черных шаров, в другой – пять белых и два черных шара. Из каждой урны взяли по шару. Какова вероятность того, что шары будут одного цвета?

33. Производят три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.

34. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

35. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

36. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки.

37. Первый студент из 20 вопросов программы выучил 17, второй – 12. Каждому студенту задают по одному вопросу. Определить вероятность того, что: а) оба студента правильно ответят на вопрос; б) правильно ответит только первый студент.

38. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 06; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

39. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.Найти вероятности того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

40. В течение месяца суд вынес 30 приговоров, в том числе шесть – за кражу. В порядке прокурорского надзора проверено 10% дел (т.е. три дела). Их выбор осуществлялся случайным образом. Определить вероятность того, что в числе этих дел оказалось: а) хотя бы одно дело по обвинению в краже; б) все три дела по указанному обвинению; в) ни одного дела о краже?

41. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

42. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

43. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

44. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

45. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Контрольные вопросы:

1. Что является суммой двух или нескольких событий?
2. Как найти вероятность появления одного из двух несовместных событий?

3. Как найти вероятность появления одного из нескольких несовместных событий?
4. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?
5. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
6. Как найти вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий?
7. Что является произведением двух или нескольких событий?
8. Что такое условная вероятность?
9. Какие события называются зависимыми, какие независимыми?
10. Как найти вероятность совместного появления двух событий?
11. Как найти вероятность совместного появления двух независимых событий?
12. Как найти вероятность совместного появления нескольких событий?

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Формула полной вероятности. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

Решение. Обозначим событие A - извлеченная деталь стандартна.

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2). Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, равна $P(B_1) = 1/2$. Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, равна $P(B_2) = 1/2$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A) = 0{,}8.$ Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A) = 0{,}9$. Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – стандартная, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Формулы Байеса. Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

<u>Пример 2.</u> Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

<u>Решение.</u> Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (событие B_1);

2) деталь проверил второй контролер (событие B_2).

Искомую вероятность того, что деталь, признанную стандартной, проверил первый контролер, найдем по формуле Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи имеем: $P(B_1)$ = 0,6 (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру); $P(B_2)$ = 0,4 (вероятность того, что деталь попадает ко второму контролеру); $P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером); $P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером).

Искомая вероятность $P_A(B_1) = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} \approx 0{,}59$.

Как видно, до испытания вероятность события B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этого события (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемого события.

ЗАДАЧИ:

1. В магазин для продажи поступает продукция трех фабрик, относительная доля которых есть: 1–50%, 2–30%, 3–20%. Для продукции фабрик брак соответственно составляет: 1–2%, 2–3%, 3–5%. Какова вероятность того, что изделие этой продукции, случайно приобретенное в магазине, окажется доброкачественным (событие A)?

2. В трех корзинах находится картофель. В первой 10% поврежденных клубней, во второй – 15%, в третьей – 10%. Из наудачу выбранной корзины берут один клубень. Какова вероятность события «клубень не поврежден»?

3. Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и пункта 2, причем, из 1-го пункта в 2 раза больше, чем из 2-го. Вероятность события (удобрение из первого пункта удовлетворяет стандарту) равна 0,9, а соответствующая вероятность для второго пункта равна 0,7. Определить вероятность события A (взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту).

4. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

5. Имеются три одинаковые на вид урны; в первой урне два белых и один черный шар; во второй - три белых и один черный; в третьей – два белых и два черных шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

6. По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, при двух попаданиях с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

7. Имеется пять урн с цветными шарами: две урны состава B_1 – по три белых и четыре черных шара, одна урна состава B_2 – 10 белых шаров, две урны состава B_3 – по два белых и пять черных шаров. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу извлекается один шар. Какова вероятность извлечь при этом черный шар (событие A)?

8. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решать 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению?

9. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

10. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых восемь пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из непристрелянной - 0,4. Какова вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле?

11. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,8. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

12. В первой урне содержится 10 шаров, из них восемь белых; во второй урне 20 шаров, из них четыре белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

13. В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 шт., из них пять поврежденных, во второй – 30 шт., из них шесть поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взяли одно яблоко. 1) Какова вероятность события «яблоко будет не повреждено»? 2) Яблоко оказалось не поврежденным. Какова вероятность события «яблоко взято из первой корзины»?

14. При исследовании жирности молока коров все стадо было разбито на три группы. В первой группе оказалось 70%, во второй 23% и в третьей 7% всех коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет не менее 4% жирности, для каждой группы коров соответственно равна 0,6; 0,35 и 0,1. 1) Определить вероятность того, что для взятой наудачу коровы жирность молока составит не менее 4%. 2) Взятая наудачу корова дает молоко жирностью не менее 4%. Найти вероятность того, что эта корова из первой группы.

15. В пирамиде 10 винтовок, из которых четыре снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

16. В некотором коллективе соотношение мужчин и женщин 1:2. Предположим, что 4% всех мужчин и 2,5% всех женщин носят очки. Наугад выбранное лицо носит очки. Найти вероятность, что это мужчина.

17. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку, то на первом месте рыба клюет с вероятностью p_1=0,8; на втором месте – с вероятностью p_2=0,7; на третьем – с вероятностью p_3=0,9. Известно, что, выйдя на ловлю рыбы, рыбак трижды закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность, что он удил рыбу на втором месте.

18. Вероятность поражения самолета при одиночном выстреле для первого ракетного расчета (событие A) равна 0,2, а для второго (событие B) – 0,1. Каждое из орудий производит по одному выстрелу, причем зарегистрировано одно попадание в самолет (событие C). Какова вероятность, что удачный выстрел принадлежит первому расчету?

19. В некотором коллективе среди мужчин курящих 30%, среди женщин курящих 10%. Наугад выбранное лицо курит. По данной информации найти процентное соотношение мужчин и женщин в этом коллективе.

20. Перед посевом 90% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями для растений из обработанных семян равна 0,08, для растений из необработанных семян – 0,4. Взятое наудачу растение оказалось пораженным. Какова вероятность того, что оно выращено из партии обработанных семян?

21. Большая популяция людей разбита на две группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах

31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

22. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

23. Имеется пять урн с белыми и черными шарами различного состава: две урны – по два белых и три черных шара (состава B_1), две урны – по одному белому и четыре черных шара (состав B_2), одна урна – четыре белых и один черный шар (состав B_3). Из одной наудачу выбранной урны извлечен шар, который оказался черным (событие A). Чему равна вероятность того, что шар извлечен из урны второго состава?

24. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

25. В районе 24 человека обучаются на заочном факультете института, из них шесть – на мехфаке, двенадцать – на агрофаке и шесть – на экономфаке. Вероятности успешно сдать все экзамены сессии для студентов соответственно равны: 0,6; 0,76; 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом экономфака.

26. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из этой же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

27. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30% - с заболеванием *L*, 20% - с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения болезни *K* равна 0,7; для болезней *L* и *M* вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *K*.

28. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

29. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает 25%, второй 30%, третий 45% деталей данного типа, поступающих на сборку. Первый автомат допускает 0,1%, второй 0,2%, третий 0,3% нестандартных деталей. Найти вероятность поступления на сборку нестандартных деталей и вероятность того, что оказавшаяся нестандартной деталь изготовлена: а) первым автоматом; б) вторым; в) третьим.

Контрольные вопросы:

1. Как определить полную вероятность события? При каких условиях она вычисляется?
2. Как определить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие?

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события *A* в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно собы-*

тия А. Далее рассматриваются независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Вероятность того, что при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие A наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), и, следовательно, не наступит $n–k$ раз, равна:

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}$., где $q = 1 - p$ (**формула Бернулли**).

<u>Пример 1.</u> У 6 животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,9. Какова вероятность того, что выздоровят только трое животных?

<u>Решение.</u> По условию задачи $n = 6$, а $k = 3$, $p = 0{,}9$ - вероятность выздоровления одного животного, тогда $q = 1 – 0{,}9 = 0{,}1$ – вероятность противоположного события. По формуле Бернулли получаем: $P_6(3) = C_6^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^3 \approx 0{,}015$.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$\mathrm{P_n}(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \quad \text{Здесь } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

<u>Пример 2.</u> Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

<u>Решение.</u> По условию, $n = 400$; $k = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$.

Воспользуемся формулой Лапласа: $P_{400}(80 \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x)$.

Вычислим $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$. По таблице приложения находим $\varphi(0)$ = 0,3989. Искомая вероятность $P_{400}(80)$ = (1/8)·0,3989 = 0,04986.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна $\mathrm{P}(\mathrm{k}_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$. Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция Лапласа, $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$, $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0 \le x \le 5$) приведена в приложении 2; для значений x > 5 полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\Phi(x)$ нечетная, следовательно, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

<u>Пример 3.</u> Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна p = 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

<u>Решение.</u> По условию, p = 0,2; q = 0,8; n = 400; k_1 = 70; k_2 = 100. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа: $P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$.

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{\mathrm{k}_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25; \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем $P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$

По таблице приложений находим: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$

Искомая вероятность $P_{400}(70, 100)$ = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.

ЗАДАЧИ:

1. Монету подбрасывают восемь раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

2. Монету подбрасывают шесть раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше трех раз?

3. В классе 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было два мальчика и одна девочка?

4. Человек, выбранный случайным образом из определенной группы населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Наугад выбирается группа из шести человек. Найти вероятность следующих событий: A – в группе два брюнета; B – в группе не менее четырех блондинов; C – в группе хотя бы один рыжий.

5. Статистические наблюдения показывают, что в некоторой местности в сентябре в среднем 10 дождливых дней. Найти вероятность, что из 10 наугад выбранных сентябрьских дней дождливыми окажутся: а) менее четырех дней; б) не более четырех дней.

6. У шести животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,98. Какова вероятность того, что: а) выздоровят все шестеро животных; б) не выздоровит ни одного; в) выздоровят только пятеро?

7. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты ровно три раза выпадет герб.

8. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 1/3. Найти вероятность того, что из шести выстрелов три поразят мишень.

9. Пусть вероятность того, что взятое наудачу из кучи зерно окажется всхожим, равна 0,9. Какова вероятность того, что из семи отобранных зерен ровно пять окажутся всхожими?

10. Допустим, что на опытной делянке посеяно 15 семян. Примем, что всхожесть всех семян одинакова и равна 80%. Найти вероятность того, что взойдет ровно 12 семян, безразлично в какой последовательности.

11. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд четыре шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

12. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более трех раз?

13. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

14. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

15. Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

16. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

17. В цехе шесть моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено четыре мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

18. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

19. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

20. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

21. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

22. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

23. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле

p = 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень восемь раз.

24. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

25. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

26. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

27. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

28. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 65 раз?

29. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

30. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

31. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Контрольные вопросы:

1. Что такое сложное событие?
2. Как определить вероятность того, что событие осуществится ровно k раз при n испытаниях?
3. Как определить вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико?
4. Как определить вероятность того, что события появится в n испытаниях не менее k_1 раз и не более k_2 раз?

МОДУЛЬ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретной (прерывной) называется случайная величина (ДСВ), которая принимает отдельные изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Соответствие между возможными значениями ДСВ и их соответствующими вероятностями называется ***законом распределения вероятностей***.

Закон распределения обычно задается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

где $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Закон распределения может быть задан аналитически (в виде формулы) либо графически (многоугольник распределения).

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 10000 билетов. Разыгрывается 100 выигрышей в 500 рублей и 1000 выигрышей по 10 рублю. Найти закон распределения случайной величины (СВ) X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Возможные значения случайной величины X: $x_1 = 500$; $x_2 = 10$; $x_3 = 0$.

Вероятности этих значений таковы: $p_1 = \frac{100}{10000} = 0{,}01$; $p_2 = \frac{1000}{10000} = 0{,}1$; $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89$.

В виде таблицы закон распределения запишется так:

X	500	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Биномиальным называют закон распределения ДСВ X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений события) вычисляют по формуле Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

Пример 2. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

Решение. Это пример биномиального распределения при $n = 20$ и $p = 0.4$. Ожидаемое число есть $M(X) = np = 20 \cdot 0.4 = 8$.

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где k – число появлений события в n испытаниях, $\lambda = np$ - среднее число появлений события или математическое ожидание. Это формула называется *формулой Пуассона* и говорят, что случайная величина распределена по ***закону Пуассона.***

Пример 3. При выработке некоторой массовой продукции вероятность появления одного нестандартного изделия составляет 0,01. Какова вероятность, что в партии из 100 изделий этой продукции 2 изделия будут нестандартными?

Решение. Здесь вероятность $p = 0{,}01$ мала, а число $n = 100$ велико, причем $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$.

Используя формулу Пуассона для нахождения вероятности, получаем следующее значение: $P_{100}(2) \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2} e^{-1} \approx 0{,}184.$

ЗАДАЧИ:

1. ДСВ *X* задана законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

2. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается пять очков. Построить ряд распределения числа выбитых очков.

3. Игральная кость брошена три раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

4. Вероятность поражения цели при одиночном выстреле равна $p = 1/3$. Найти распределение вероятностей для числа попаданий при числе выстрелов, равном пяти.

5. В зерне, предназначенном для очистки, 10% сорняков. Наудачу отобраны четыре зерна. Написать закон распределения числа сорняков среди четырех отобранных зерен и построить многоугольник распределения.

6. В денежной лотерее разыгрывается один выигрыш в 100 000 р., 10 выигрышей по 10 000 р. и 100 выигрышей по 100 р. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша *X* для владельца одного лотерейного билета.

7. Отмечено, что в некоторой местности в течение ряда лет в июне 30% дождливых дней. Составить закон распределения СВ X – числа дождливых дней в течение одной недели июня месяца.

8. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

9. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать закон распределения ДСВ X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

10. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать биномиальный закон распределения ДСВ X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

11. В партии из 10 деталей имеется восемь стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

12. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения ДСВ X – числа стандартных деталей среди отобранных.

13. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

14. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

15. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 *мин* абонент позвонит на коммутатор равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение 1 *мин* позвонят три абонента; позвонят четыре абонента?

16. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно два вызова?

17. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить пять семян сорняков?

18. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

19. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

22. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого промежутка времени T равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение промежутка времени T произойдет не более 3 обрывов.

23. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

24. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно две опечатки;

в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

25. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 *мин*, равно пять. Найти вероятность того, что за 2 *мин* поступит: а) два вызова;

б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Контрольные вопросы:

1. Что такое случайная величина? Виды случайных величин и примеры.
3. Что такое дискретная случайная величина?
4. Что такое непрерывная случайная величина?
5. Как задается дискретная случайная величина?
6. Что такое закон распределения дискретной случайной величины?
7. Способы задания закона распределения.
8. Что такое многоугольник распределения?
9. Что такое биномиальное распределение вероятностей случайной величины? Почему имеет такое название?
10. По какой формуле высчитываются вероятности значений случайной величины при биномиальном распределении?
11. Что представляет собой закон распределения вероятностей массовых и редких событий?
12. По какой формуле высчитываются вероятности значений случайной величины при законе распределения Пуассона?

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Математическом ожиданием ***$M(X)$*** ДСВ X называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность: $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$ или $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$.

2. $M(CX) = CM(X)$.

3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$, где X и $У$ – две случайные величины.

4. $M(XY) = M(X)\,M(Y)$, где X и $У$ – две случайные величины.

Дисперсией ***D(X)*** ДСВ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

По определению дисперсия вычисляется следующим образом:

$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n$.

Свойства дисперсии:

1. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ (*удобная формула для вычисления дисперсии*).

2. $D(C) = 0$.

3. $D(CX) = C^2 D(X)$.

4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, где X и $У$ – две случайные величины.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ СВ X называется квадратный корень из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Для СВ X, имеющей *биномиальное распределение*: $M(X) = np$;

$D(X) = npq$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Математическое ожидание и дисперсия СВ X, распределенной по *закону Пуассона*, равны: $M(X) = D(X) = \lambda$.

Пример 1. СВ X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти $\sigma(X)$.

Решение. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

Найдем математическое ожидание X: $M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 10\cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

Найдем математическое ожидание X^2:
$(X^2) = 2^2\cdot 0{,}1 + 3^2\cdot 0{,}4 + 10^2\cdot 0{,}5 = 54$.

Находим дисперсию: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$=54-6,4^2=13,04.

Искомое $\sigma(X)$ =3,61.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение СВ X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин X_1, X_2, …, X_n, … имеет конечные математические ожидания, и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. если ε – любое положительное число, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1$.

В частности, среднее арифметическое последовательности попарно независимых величин, дисперсии которых равномерно ограничены и которые имеют одно и тоже математическое ожидание a, сходится по вероятности к математическому ожиданию a, т.е. если ε – любое положительное число, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1$.

<u>Пример 2.</u> ДСВ X задана законом распределения

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}2$.

<u>Решение.</u> Найдем $M(X)$ и $D(X)$ величины X: $M(X) = 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}54$; $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0{,}0144$. Воспользуемся неравенством Чебышева в форме $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставляя $M(X) = 0{,}54$, $D(X) = 0{,}0144$, $\varepsilon = 0{,}2$, окончательно получим

$$P(|X - 0{,}54| < 0{,}2) \geq 1 - \frac{0{,}0144}{0{,}04} = 0{,}64.$$

ЗАДАЧИ:

1. СВ X характеризуется рядом распределения:

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Определить математическое ожидание и дисперсию.

2. Производится 3 независимых выстрела по мишени; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. СВ X – число попаданий. Определить характеристики величины X - математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

3. В одном из опытов по сортоиспытанию ржи было подсчитано количество зерен в колосьях. Результаты объединены в следующую таблицу:

x_i	30	40	50	60	70	80
n_i	10	10	20	30	20	10

Найти $M(X)$ и $D(X)$, приняв относительные частоты за вероятности.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ X, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

5. ДСВ X принимает три возможных значения: x_1=4 с вероятностью p_1 =0,5; x_2 =6 с вероятностью p_2 =0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти значения x_3 и p_3, зная, что $M(X)$=8.

6. Дан перечень возможных значений ДСВ X: x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)$ = 2,3, $M(X^2)$ = 5,9. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

7. Дан перечень возможных значений ДСВ X: x_1=-1, x_2=0, x_3=1, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)$=0,1, $M(X^2$ =0,9. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

8. Независимые СВ заданы законами распределения. Найти математическое ожидание случайной величины XY.

X	1	2

p	0,2	0,8

Y	0.5	1
p	0.3	0.7

9. Дисперсия СВ X равна 5. Найти дисперсию следующих величин: а) $X-1$; б) $-2X$; в) $3X+6$.

10. Найти математическое ожидание СВ $Z=X+2Y$, если известны математические ожидания СВ X и Y: $M(X)=5$, $M(Y)=3$.

11. Найти математическое ожидание СВ Z, если известны математические ожидания X и Y: а) $Z=X+2Y$, $M(X)=5$, $M(Y)=3$;

б) $Z=3X+4Y$, $M(X)=2$, $M(Y)=6$.

12. СВ X и Y независимы. Найти дисперсию СВ $Z=3X+2Y$, если известно, что $D(X)=5$, $D)(Y)=6$.

13. СВ X – число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(X)$.

14. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Приняв за СВ X число извлеченных белых шаров, составить её закон распределения, определить математическое ожидание и дисперсию.

15. Найти дисперсию СВ X – числа появлений события A в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7.

16. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02.

17. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0{,}2$, если $D(X) = 0{,}004$.

18. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 0{,}9$ и $D(X) = 0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, оценить ε снизу.

19. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

20. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется:

а) меньше трех; б) не меньше трех.

21. Вероятность появления события A в каждом испытании равна ½. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

22. Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/4. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

23. ДСВ X задана законом распределения

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$.

Контрольные вопросы:

1. Что такое математическое ожидание случайной величины?
2. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины?
3. В чем заключается вероятностный смысл математического ожидания?

4. Чему равно математическое ожидание числа появлений события в одном испытании?

5. Каковы свойства математического ожидания?

6. Что такое отклонение случайной величины от её математического ожидания?

7. Чему равно математическое ожидание отклонения? Доказать.

8. Что такое дисперсия дискретной случайной величины?

9. Как вычисляется дисперсия по определению?

10. По какой формуле вычисляется дисперсия?

11. Каковы свойства дисперсии?

12. Что такое среднее квадратическое отклонение? Для чего оно вводится?

13. Чему равны математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение числа появлений события в n независимых испытаниях с постоянной вероятностью?

14. Сформулировать неравенство Чебышева.

15. Сформулировать теорему Чебышева.

НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывной называется случайная величина (НСВ), которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Функцией распределения (***интегральной функцией распределения***) вероятностей СВ X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения является общим способом задания любой случайной величины.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

4. Вероятность того, что НСВ X примет одно определенное значение, равна нулю: $P(X = x_1) = 0$.

5. Если возможные значения СВ X принадлежат интервалу $(a; b)$, то: $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. Если возможные значения НСВ расположены на всей числовой оси, то $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Пример 1. Для случайной величины, заданной таблицей

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 0, \\ 0{,}0001, \text{ если } 0 \prec x \le 1, \\ 0{,}0037, \text{ если } 1 \prec x \le 2, \\ 0{,}0523, \text{ если } 2 \prec x \le 3. \\ 0{,}3439, \text{ если } 3 \prec x \le 4, \\ 1, \text{ если } x \succ 4. \end{cases}$$

Плотностью распределения вероятностей НСВ X (или ***дифференциальной функцией распределения***) называется функция, равная первой производной от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Вероятность того, что НСВ X примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$ определяется равенством: $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \ge 0$.

2. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения: $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$.

3. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

4. Если возможные значения СВ принадлежат интервалу $(a,\ b)$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1.$

<u>Пример.</u> Продолжительность жизни растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину *X*. Пусть функцией плотности распределения для *X* является $f(x) = \frac{1}{120}e^{-\frac{x}{120}}$. Какая доля растений данного вида умирает за период 100 дней?

<u>Решение.</u> Согласно формуле (3), имеем:

$$P(0 \le X \le 100) = \int\limits_{0}^{100} \frac{1}{120} e^{-\frac{x}{120}}dx = \frac{1}{120}\int\limits_{0}^{100} e^{-\frac{x}{120}}\mathrm{dx} = \frac{1}{120}(-120)e^{-\frac{x}{120}}\Big|_{0}^{100} = 1 - e^{-\frac{5}{6}} \approx 0{,}7.$$

ЗАДАЧИ:

1. НСВ *X* задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 2; \\ x-2 \ \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x > 3. \end{cases}$

Найти вероятность, что в результате испытания СВ *X* примет значение из интервала (2,5; 4).

2.СВ *X* задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le -1; \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ \textit{при} \ -1 < x \le 2; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x > 2. \end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (0, 1).

3.СВ задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 2; \\ \frac{x}{2} - 1 \ \ \textit{при} \ 2 < x \le 4; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x > 4. \end{cases}$ Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (2, 3).

4. СВ *X* задана на всей оси *Ox* функцией распределения

$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctg\ x}{\pi}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (0, 1).

5. СВ задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 2; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2} \ \ при \ \ 2 < x \le 2; \\ 1 \ \ при \ \ x > 2. \end{cases}$

Найти вероятность, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (-1,1).

6. СВ задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 2; \\ 0.5x - 1 \ \ при \ \ 2 < x \le 4; \\ 1 \ \ при \ \ x > 4. \end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) меньшее 0,2; б) меньшее трех; в) не меньше трех; г) не меньше пяти.

7. СВ задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ x^2 \ \ при \ \ 0 < x \le 1; \\ 1 \ \ при \ \ x > 1. \end{cases}$ Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25, 0,75).

8. ДСВ X задана законом распределения

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и начертить её график.

9. ДСВ X задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить её график.

10. ДСВ X задана законом распределения

X	2	6	10
p	0,5	0,4	0,1

Построить график функции распределения этой величины.

11. Производится один опыт, в котором может появиться или не появиться событие *A*. Вероятность события *A* равна 0,3. СВ *X* – число появлений события *A* в опыте. Найти её функцию распределения.

12. Функция распределения НСВ *X* задана выражением $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ ax^2 \ \ \textit{при} \ 0<x\le 1; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x>1. \end{cases}$ Найти а) коэффициент *a;* б) плотность распределения *f(x*); в) вероятность попадания величины *X* на участок от 0,25 до 0,5.

13. Дана функция распределения НСВ *X:* $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ \sin 2x \ \ \textit{при} \ \ 0<x\le \frac{\pi}{4}; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Найти плотность распределения *f(x).*

14. СВ *X* задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ x \ \ \textit{при} \ 0<x\le 1; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x>1. \end{cases}$

Найти плотность распределения.

15. СВ *X* задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2} \ \ \textit{при} \ 0<x\le \pi; \\ 1 \ \textit{при} \ \ x>\pi. \end{cases}$

Найти плотность распределения.

16. НСВ *X* задана плотностью распределения *f(x)* = $\frac{3}{2}\sin 3x$ в интервале (0, $\frac{\pi}{3}$); вне этого интервала *f(x) = 0.* Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$).

17. Задана плотность распределения НСВ *X:* $f(x)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ x \le 0; \\ \sin x \ \ \textit{при} \ \ 0<x\le \frac{\pi}{2}; \\ 0 \ \ \textit{при} \ \ x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Найти функцию распределения.

18. Задана плотность распределения НСВ *X:* $f(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le 1; \\ x-\dfrac{1}{2} \;\; при \; 1<x\le 2; \\ 0 \;\; при \;\; x>2. \end{cases}$

Найти функцию распределения.

19. Задана плотность распределения НСВ *X:* $f(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le \dfrac{\pi}{6}; \\ 3\sin 3x \;\; при \;\; \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3}; \\ 0 \;\; при \;\; x>\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ Найти функцию распределения.

20. СВ задана плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le -\dfrac{\pi}{2}; \\ a\cos x \;\; при \; -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \;\; при \;\; x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Найти коэффициент a.

Контрольные вопросы:

1. Что такое функция распределения случайной величины? Её геометрический смысл.
2. Перечислить свойства функции распределения.
3. Представить график функции распределения непрерывной случайной величины.
4. Что такое плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины?
5. Как определить вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал? Геометрический смысл данного равенства.
6. Свойства плотности распределения.
7. Как найти функцию распределения по известной плотности распределения?

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическим ожиданием НСВ, возможные значения которой принадлежат интервалу $(a,\ b)$, называется определенный интеграл $\int_a^b x\,f(x)dx,$ т.е. $M(X) = \int_a^b x\,f(x)dx,$ где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X.

Если возможные значения СВ принадлежат всей числовой оси, то $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx,$ предполагается, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$ существует.

Модой $M_o(X)$ НСВ X называют то её возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой $M_e(X)$ НСВ X называют то её возможное значение, которое определяется равенством $P[X \prec M_e(X)] = P[X \succ M_e(X)]$.

Дисперсия НСВ, возможные значения которой принадлежат интервалу (a,b), определяется равенством: $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2\, f(x)dx.$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2\, f(x)dx.$

Свойства $M(X)$ и $D(X)$ формулируются так же, как и соответствующие свойства для ДСВ.

Вычислять дисперсию удобно по следующим формулам: $D(X) = \int_a^b x^2\, f(x)\,dx - [M(X)]^2$, если значения СВ принадлежат интервалу $(a,\ b)$; $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\,dx - [M(X)]^2,$ если значения СВ принадлежит всей числовой оси.

Величину $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называют ***средним квадратическим отклонением*** СВ.

Пример. СВ X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le 1, \\ a\,x \;\; при \;\; 1<x\le 3, \\ 0 \;\; при \;\; x>3. \end{cases}$$ Найти: 1) коэффициент a; 2) $M(X)$; 3) $D(X)$.

Решение. Используя свойство 4 плотности распределения, получаем:

$$\int_1^3 a\,x\,dx=1, \quad a\int_1^3 x\,dx=a\frac{x^2}{2}\Big|_1^3=4a, \;\; 4a=1$$, следовательно $a=\dfrac{1}{4}$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X)=\int_1^3 \frac{1}{4}x\,x\,dx=\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{1}{4}\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{27-1}{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{26}{3}=\frac{26}{12}\approx 2{,}17;$$

$$D(X)=\int_1^3 \frac{1}{4}x^2\,x\,dx-(2{,}17)^2=\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_1^3-(2{,}17)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{3^4-1^4}{4}-(2{,}17)^2=5-4{,}7089=0{,}2911.$$

ЗАДАЧИ:

1. СВ X имеет плотность распределения $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x, & при \;\; x\in(0;2) \\ 0, & при \;\; x\notin(0;2) \end{cases}$. Найти математическое ожидание.

2. Найти $M(X)$ и $D(X)$ СВ X, заданной функцией распределения
$$F(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le 0; \\ x \;\; при \;\; 0<x\le 1; \\ 1 \;\; при \;\; x>1. \end{cases}$$

3. Найти $M(X)$ и $D(X)$ СВ X, зная ее плотность распределения

$f(x)=\dfrac{1}{2l}$ $при \;\; a-l\le x\le a+l$, $f(x)=0$ при остальных значениях X.

4. СВ X задана плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases} 0 \;\; при \;\; x\le 0; \\ 1 \;\; при \;\; 0<x\le 1; \\ 0 \;\; при \;\; x>1. \end{cases}$ Найти математическое ожидание и дисперсию.

5. СВ X задана плотностью распределения $f(x)=(1/2)x$ в интервале $(0;\,2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание.

6. СВ X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале

(0; 1); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание.

7. СВ X задана плотностью распределения $f(x)=c(x^2 + 2x)$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: а) параметр c; б) математическое ожидание величины X.

8. Найти математическое ожидание СВ X, заданной функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ \dfrac{x}{4} \ \ при \ \ 0 < x \le 4; \\ 1 \ \ при \ \ x > 4. \end{cases}$

9. СВ X в интервале $(0; \pi)$ задана плотностью распределения

$f(x) = (1/2) \sin x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

10. СВ X в интервале $(0, 5)$ задана плотностью распределения

$f(x) = (2/25)x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

11. Найти дисперсию СВ X, заданной функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0; \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} \ \ при \ \ 0 < x \le 2; \\ 1 \ \ при \ \ x > 2. \end{cases}$

12. СВ X задана плотностью распределения $f(x) = 2\cos 2x$ в интервале $(0; \pi/4)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: а) моду; б) медиану X.

13. Случайная величина X в интервале (2, 4) задана плотностью распределения $f(x) = -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

Контрольные вопросы:

1. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины?
2. Что такое мода непрерывной случайной величины?
3. Что такое медиана непрерывной случайной величины?
4. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины?
5. Удобные формулы для вычисления дисперсии.
6. Как определяется среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины?

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Равномерным называют распределение вероятностей НСВ X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно $f(x) = 1/(b-a)$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Математическое ожидание и *дисперсия* равномерно распределенной СВ находятся по формулам: $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей НСВ X, которое описывается плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0. \\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0 \end{cases}$, где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона: $F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0. \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Вероятность попадания в интервал (a, b) НСВ X, распределенной по показательному закону, заданному функцией распределения: используя свойства функции распределения, имеем: $P(a<X<b)=F(b) - F(a)$.

Учитывая, что $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$, получим

$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Значения функции e^{-x} находят по таблице.

<u>Пример 1.</u> НСВ распределена по показательному закону $f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0. \\ 2e^{-2x} & при \quad x \geq 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,3; 1).

<u>Решение.</u> По условию, $\lambda = 2$. Тогда $P(0{,}3 < X < 1) = e^{-(2\cdot 0{,}3)} - e^{-2\cdot 1} \approx 0{,}41$.

Математическое ожидание показательного распределения: $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$; *дисперсия*: $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$; *среднее квадратическое отклонение:* $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Нормальным называют распределение вероятностей НСВ *X*, плотность которого имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где σ и a – *параметры распределения:* σ – среднее квадратическое отклонение *X*, *a* – математическое ожидание.

График функции *f(x)* называется ***кривой нормального распределения*** или ***нормальной кривой***.

Свойства кривой нормального распределения:

1) функция определена на всей числовой оси *Ox*;

2) при всех значениях *x* функция принимает положительные значения, т.е. нормальная кривая расположена над осью *Ox*;

3) Ось *Ox* служит горизонтальной асимптотой графика;

4) кривая симметрична относительно прямой *x* = *a*;

5) функция имеет максимум при *x* = *a*, равный $f(a)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

6) по мере удаления *x* от точки *a* функция убывает и при $x\to\pm\infty$ кривая приближается к оси *Ox*;

7) кривая выпукла при $x\in(a-\sigma,\ a+\sigma)$ и вогнута при $x\in(-\infty, a-\sigma)$ и $x\in(a+\sigma,+\infty)$, а точки графика $(\mathrm{a}-\sigma,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ *и* $(\mathrm{a}+\sigma,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ являются точками перегиба.

<u>Пример 2.</u> Известно, что СВ *X* подчинена нормальному закону распределения, *M(X)* = 6, $\sigma^2 = 9$. Найти функцию плотности вероятности.

<u>Решение.</u> Имеем: *a* = 6, $\sigma = 3$. Согласно формуле, плотность распределения: $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}$.

Пример 3. Известно, что СВ X подчиняется нормальному закону с функцией плотности вероятности: $f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-15)^2}{200}}$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Согласно выражению, задающему $f(x)$, имеем: a = 15, σ = 10. Тогда $M(X)$ = 15, $D(X) = \sigma^2 = 10^2 = 100$.

Вероятность того, что СВ X, подчиненная нормальному закону, примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна: $P(\alpha \langle X \langle \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - функция Лапласа (ее значения даны в таблице приложения 2).

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной СВ X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, равна $P(|X-a|\langle \delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Пример 4. СВ X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. По условию, α = 10, β = 50, a = 30, σ = 10, следовательно, $P(10 < \mathrm{X} < 50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=2\Phi(2).$ По таблице приложения находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда, искомая вероятность $P(10 < \mathrm{X} < 50)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$

Пример 5. СВ X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. По условию, δ = 3, a = 20, σ = 10. Следовательно, $P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\Phi(0{,}3).$ По таблице приложения находим $\Phi(0{,}3)=0{,}1179.$ Искомая вероятность $P(|X-20|<3)=0{,}2358.$

Правило трех сигм. Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения:

$$P(|X-a|\langle 3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

ЗАДАЧИ:

1. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1*А*. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02*А*.

2. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

3. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

4. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20с.

5. Найти математическое ожидание СВ X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

6. Рост взрослой женщины является СВ, распределенной по нормальному закону с параметрами: a = 164 см, σ = 5,5 см. Найти плотность вероятности.

7. Математическое ожидание нормально распределенной СВ X равно a = 3 и среднее квадратическое отклонение σ = 2. Написать плотность вероятности X.

8. Написать плотность вероятности нормально распределенной СВ X, зная, что $M(X)$ =3, $D(X)$ = 16.

9. Нормально распределенная СВ X задана плотностью $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

10. СВ X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a=40 и дисперсией D=200. Вычислить вероятность попадания СВ в интервал (30; 80).

11. Масса вагона – СВ, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратическим отклонением σ = 0,9 т. Найти вероятность того, что очередной вагон имеет массу не более 70 т, но не менее 60 т.

12. Пусть X – СВ, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием a = 1,6 и средним квадратическим отклонением σ = 1. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта СВ попадет хотя бы один раз в интервал (1, 2)?

13. СВ X, распределенная по нормальному закону, представляет собой ошибку измерения некоторого расстояния. При измерении допускается систематическая ошибка в сторону завышения на 1,2 м; среднее квадратическое отклонение ошибки измерения равно 0,8 м. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 м.

14. СВ X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 0 и 2. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (-2; 3).

15. СВ X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (4; 8).

16. Пусть вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с параметрами a = 375 г, σ = 25 г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет от 300 до 425 г.

17. СВ X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 30 и дисперсией 100. Найти вероятность того, что значение СВ заключено в интервале (10; 50).

18. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной СВ X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

19. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной СВ X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенной в интервале (15, 25).

20. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

21. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

22. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

23. СВ X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Найти вероятность попадания X в интервал (0, 10).

Контрольные вопросы:

1. Какое распределение вероятностей называется равномерным?

2. Какое распределение вероятностей называется нормальным?
3. Каковы параметры нормального распределения?
4. Построить график плотности нормального распределения, указать его свойства.
5. Как влияют параметры нормального распределения на форму нормальной кривой?
6. Как определить вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины?
7. Как вычислить вероятность заданного отклонения нормально распределенной случайной величины?
8. Какова сущность правила трех сигм.

СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Законом распределения дискретной двумерной СВ называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$. Обычно закон распределения задают таблицей с двумя входами.

Y	X					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Зная закон распределения двумерной ДСВ, можно найти законы распределения каждой из составляющих.

<u>Пример 1.</u> Найти законы распределения составляющих двумерной СВ, заданной законом распределения:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20

y_2	0,06	0,18	0,16

Решение. Сложив вероятности по столбцам. Получим вероятности возможных значений *X*: $P(x_1)=0{,}16;$ $P(x_2)=0{,}48;$ $P(x_3)=0{,}36.$ Напишем закон распределения составляющей *X*:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Контроль: 0,16 + 0,48 + 0,36 = 1

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений *У:* $P(y_1)=0{,}60;$ $P(y_2)=0{,}40.$ Напишем закон распределения составляющей *У:*

$У$	y_1	y_2
P	0,60	0,40

Контроль: 0,60 + 0,40 = 1.

***Функцией распределения двумерной* СВ** (*X, У*) называют функцию *F(x, y),* определяющую для каждой пары чисел *x* и *y* вероятность того, что *X* примет значение, меньшее *x*, и при этом *У* примет значение, меньшее *y*: $F(x,y)=P(X<x,Y<y).$

Пример. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая *X* двумерной СВ (*X, У*) примет значение *X* < 2 и при этом составляющая *У* примет значение У < 3, если известна функция распределения системы $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{3}+\frac{1}{2}\right)$

Решение. По определению функции распределения двумерной СВ, $F(x,y)=P(X<x,Y<y)$. Положив $x=2$, $y=3$, получим искомую вероятность $P(X<2,\ Y<3)=F(2,\ 3)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$.

Свойства функции распределения двумерной случайной величины:

1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству: $0\le F(x,y)\le 1$.

2. *F(x, y)* есть неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y),\ если\ \ x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1),\ если\ \ y_2 > y_1.$$

3. Имеют место предельные соотношения:

$$1)\, F(-\infty, y) = 0, \quad 2)\, F(x, -\infty) = 0, \ 3)\, F(-\infty, -\infty) = 0, \ 4)\, F(\infty, \infty) = 1.$$

4. а) При $y = \infty$ функция распределения двумерной СВ становится функцией распределения составляющей *X*: $F(x, \infty) = F_1(x)$.

б) При $x = \infty$ функция распределения двумерной СВ становится функцией распределения составляющей *У*: $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Плотностью совместного распределения вероятностей f(x, y) двумерной НСВ (*X*, *У*) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения: $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$. Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения.*

Свойства двумерной плотности вероятности:

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна: $f(x, y) \geq 0$.

2. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$.

Условным распределением составляющей *X* при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1 \mid y_j), p(x_2 \mid y_j), ..., p(x_n \mid y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $У = y_j$ (*j* имеет одно и то же значение при всех значениях *X*) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей *У*.

В общем случае **условные законы распределения** составляющей *X* в предположении, что событие $У = y_j$ уже произошло, определяются соотношением: $p(x_i \mid y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$.

Аналогично находят условные законы распределения составляющей $У$: $p(y_j \mid x_i) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$

Сумма вероятностей условного распределения при фиксированном y_j или x_i равна 1.

Пример. Дискретная двумерная СВ задана таблицей

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Найти условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая $У$ приняла значение y_1.

Решение. Искомый закон определяется совокупностью следующих условных вероятностей: $p(x_1 \mid y_1), p(x_2 \mid y_1), .p(x_3 \mid y_1)$. Выше мы находили $p(y_1) = 0{,}60$.

Находим их:
$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}10}{0{,}60} = \frac{1}{6};$$
$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}60} = \frac{1}{2};$$
$$p(x_3 \mid y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3}$$

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$.

Условным математическим ожиданием ДСВ $У$ при $X = x$ (x – определенное возможное значение X) называют произведение возможных значений $У$ на их условные вероятности: $M(Y \mid X = x) = \sum y_j p(y_j \mid x)$.

Для непрерывных величин: $M(Y \mid X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\psi(y \mid x)dy$, где $\psi(y \mid x)$ - условная плотность случайной величины $У$ при $X = x$.

Условное математическое ожидание $M(Y \mid x)$ есть функция от x: $M(Y \mid x) = f(x)$, которую называют ***функцией регрессии Y*** на ***X***.

Аналогично определяется условное математическое ожидание случайной величины X и ***функция регрессии*** X на $У$: $M(X \mid y) = \varphi(y)$.

<u>Пример.</u> Дискретная двумерная СВ задана таблицей.

Y	X			
	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2 = 6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное математическое ожидание составляющей $У$ при $X = x_1 = 1$.

<u>Решение.</u> Найдем $p(x_1)$, для чего сложим вероятности, помещенные в первом столбце таблицы: $p(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45$.

Найдем условное распределение вероятностей величины $У$ при X=x_1 =1:

$$p(y_1 \mid x_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3};$$

$$p(y_2 \mid x_1) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(x_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3}$$

Найдем искомое условное математическое ожидание по формуле

$$M(Y \mid X = x_1) = \sum y_j p(y_j \mid x_1) = y_1 p(y_1 \mid x_1) + y_2 p(y_2 \mid x_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3}. = 5 .$$

Математическим ожиданием двумерной СВ (X, Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, определяемых равенствами: $M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}$, $M(Y) = m_y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$, если (X, Y) – дискретная система СВ и $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy,\ M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dxdy$, если ($X$, Y) – непрерывная система СВ.

Начальный момент второго порядка: $M(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$ для дискретных СВ; $M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy$ для непрерывных СВ.

Дисперсия двумерной случайной величины – это совокупность двух дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$, определяемых равенствами:

$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)^2p_{ij}$, $D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j-m_y)^2p_{ij}$, если ($X$, Y) дискретная система СВ; $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2f(x,y)dxdy$, $D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2f(x,y)dxdy$, если ($X$, Y) непрерывная система СВ.

Корреляционным моментом (***ковариацией***) двух СВ X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих СВ от их математических ожиданий, обозначается и вычисляется: $K_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}$, если ($X$, Y) дискретная двумерная СВ; $K_{XY}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$, если ($X$, Y) двумерная НСВ.

Коэффициентом корреляции r_{XY} двух СВ X и Y называется отношение их ковариации к произведению их средних квадратических отклонений: $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$.

ЗАДАЧИ:

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной СВ:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

2. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной СВ:

Y	X			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

3. Задана функция распределения двумерной СВ:

$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y & при\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & при\ \ x<0\ \ или\ \ y<0\end{cases}$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1,\ x=2,\ y=3,\ y=5$, если известна функция распределения: $F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & при\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0 & при\ \ x<0\ \ или\ \ y<0\end{cases}$.

5. Задана функция распределения двумерной СВ:

$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y} & при\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0 & при\ \ x<0\ \ или\ \ y<0\end{cases}$. Найти двумерную плотность вероятности системы $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

6. Задана функция распределения двумерной СВ:

$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}) & при\ \ x>0,\ y>0,\\ 0 & при\ \ x<0\ \ или\ \ y<0\end{cases}$. Найти двумерную плотность вероятности системы $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

7. Задана двумерная ДСВ (X, Y):

Y	X		
	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X, при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=0{,}4$; в) условный закон распределения Y при условии, что $X=x_2=5$.

8. Задана двумерная ДСВ (X, Y):

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10

14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условный закон распределения X при условии, что $Y = 10$; б) условный закон распределения Y при условии, что $X = 6$.

9. Закон распределения двумерной ДСВ задан таблицей:

X	Y		
	-1	0	1
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Найти коэффициент корреляции r_{xy}.

10. Двумерная СВ (X, Y) задана законом распределения:

X	Y			
	1	2	3	4
1	0,07	0,04	0,11	0,11
2	0,08	0,11	0,06	0,08
3	0,09	0,13	0,10	0,02

Проверить, зависимы ли X и Y.

Контрольные вопросы:

1. Что называют законом распределения дискретной двумерной случайной величины?
2. Что такое функция распределения двумерной случайной величины? Её свойства.
3. Как найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник?
4. Что такое плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины?
5. Как найти вероятность попадания случайной точки в произвольную область?
6. Свойства двумерной плотности вероятности.
7. Как составить условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин?
8. Как составить условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин?
9. Что такое условное математическое ожидание?
10. Что такое корреляционный момент?

11. Что такое коэффициент корреляции?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Катальников, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. В. Катальников, Ю. В. Шапарь ; науч. ред. И. А. Шестакова ; Министерство образования и науки РФ, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. - 2-е изд., перераб. - Электронные текстовые данные. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 72 с. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276210. – Загл. с экрана.

2. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели [Электронный ресурс] : учебник для академического бакалавриата / В. Д. Мятлев, Л. А. Панченко, Г. Ю. Ризниченко, А. Т. Терехин. — 2-е изд., испр. и доп. — Электронные текстовые данные. - Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 321 с. — (Университеты России). — Режим доступа: https://biblio-online.ru/viewer/3BE3DA5E-63AD-4D81-ABC6-8B5C7744D7B3. – Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие . - 12-е издание, переработанное. - М. : Высшее образование [и др.], 2009. - 479 с. - (Основы наук). - Гриф МО "Рекомендовано". - ISBN 978-5-9692-0391-4. – Загл. с экрана.

2. Долматова, Т. А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Т. А. Долматова ; Минобрнауки России, ФГБОУ ВПО "Кузбасская государственная педагогическая академия". - Новокузнецк : [РИО КузГПА], 2014. - 102 с.

3. Палий, И. А. Теория вероятностей [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. А. Палий. – Эл. текстовые данные. – Москва : ИНФРА-М, 2012. - 236 с. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-16004940-3. –

Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=225156. – Загл. с экрана.

4. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. С. Мхитарян [и др.] ; под ред. В. С. Мхитаряна. - 2-е изд., перераб. и доп. - Электронные текстовые данные. — Москва : Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. - 336 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=451329. – Загл. с экрана.

5. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Т. А. Гулай [и др.]. - 2-е изд., доп. – Эл. текстовые данные. - Ставрополь : АГРУС, 2013. - 260 с. - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=514780. – Загл. с экрана.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ Приложение 1

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2254	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1569	1513
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0794	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ Приложение 2

x	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$
0,00	0,000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		