Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Позднякова

УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

*Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль «Математика и Информатика»*

Новокузнецк

2019

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73
П 47

Позднякова Е.В.

П 47 Уравнения с параметрами: методические рекомендации по выполнению контрольной работы для студентов факультета информатики, математики и экономики, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») / Е.В. Позднякова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2019 – 51 с.

В работе изложены методические рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине «Уравнения с параметрами»: основные теоретические сведения, примеры решения задач, варианты контрольной работы и образец ее решения, методические рекомендации по ее решению и оформлению, оценивание работы в балльно-рейтинговой системе, список основной и дополнительной литературы, современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем и образовательных онлайн-платформ.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и Информатика».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 3 от 04.10.2019

Заведующий каф. МФММ
_______________ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 3 от 14.11.2019

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_______________ / Г.Н. Бойченко

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73
П 47

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические материалы адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (профиль «Математика и Информатика») и направлены на оказание помощи студентам в выполнении контрольной работы по дисциплине “Уравнения с параметрами”, которая относится к вариативной части учебного плана и является дисциплиной по выбору.

“Уравнения с параметрами” является интегративной дисциплиной и включает в себя элементы математики, компьютерной графики и методики обучения математике.

Целью изучения дисциплины “Уравнения с параметрами” является: развитие информационно-математической компетентности, подготовка в области методики обучения решению нестандартных математических задач в системе основного общего и среднего образования, овладение классическим математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях, вооружение конкретными знаниями, дающими возможность преподавать данный предмет в школе, осуществлять квалифицированную подготовку учащихся к государственной итоговой аттестации по математике.

Задачи дисциплины: углубление уровня научной подготовки студентов в области решения задач с параметрами и методики обучения решению таким задачам в системе основного общего и среднего общего образования; развитие умений целесообразного выбора и использования компьютерных технологий для решения задач с параметрами; развитие умений решать прикладные задачи с помощью параметров.

В методические рекомендации включено:

1) основные теоретические сведения (основные понятия, типы и методы решения задач с параметрами, решение задач с параметрами с помощью компьютерной графики);

2) особенности оценивания контрольной работы в балльно-рейтинговой системе;

3) варианты контрольной работы и образец ее решения;

4) требования к выполнению и оформлению контрольной работы;

5) список рекомендуемой литературы

6) список современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем.

Основные теоретические сведения по дисциплине иллюстрируются соответствующими примерами, необходимыми чертежами, актуализируются в примерах решения задач школьного курса математики.

Список литературы для самостоятельной работы над теоретическим материалом или решением задач включает современные источники; указана литература основная и дополнительная. Помощь в изучении дисциплины могут оказать рекомендуемые профессиональные базы данных, информационные справочные системы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основные понятия

Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Комментарий. Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения $|x| = a - 1$ не следует неотрицательность значений выражения $a - 1$, и если $a - 1 < 0$, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

Если уравнение (неравенство) $F(x, a) = 0$ ($G(x, a) \geq 0$ или $G(x, a) > 0$) нужно решить относительно переменной x, а под a понимается произвольное действительное число, то уравнение (неравенство) называют ***уравнением (неравенством) с параметром.***

Пусть дано уравнение или неравенство с двумя переменными:

$F(x, a) = 0$ ($G(x, a) \geq 0$ или $G(x, a) > 0$). (1.1)

Задача о решении уравнения (неравенства) (1.1) может быть сформулирована одним из двух следующих способов:

1. Найти все пары чисел (x, a), удовлетворяющие этому уравнению (неравенству). В этом случае выражение (1.1) называется уравнением (неравенством) с двумя переменными x и a, в котором обе переменные x и a играют одинаковую роль.
2. Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение (неравенство) относительно x. Тогда выражение (1.1) называют уравнением (неравенством) с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра. При отсутствии ограничений под областью изменения параметра подразумевается множество всех действительных чисел.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое конкретное числовое значение, то возможен один из случаев:

а) получится уравнение или неравенство с одной неизвестной x;

б) получится выражение, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называется допустимым, во втором – недопустимым.

Решить уравнение или неравенство с параметром - это значит, для каждого допустимого значения параметра найти множество всех удовлетворяющих уравнению или неравенству значений неизвестного.

Отметим, что при некоторых множествах из допустимых значений параметра a могут получаться одни семейства уравнений (неравенств), при иных – другие. Поэтому для облегчения решения удобно нанести на числовую прямую значения параметра, называемые контрольными, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения.

Типы задач с параметрами

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Задача 1. Решите неравенство $\sqrt{x+a} \geq x+1$.

Решение: Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1<0,\\ x+a\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\geq 0,\\ x+a\geq x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{отсюда} \quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x<-1\\ x\geq -a;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x\geq -1,\\ x^2+x+1-a\leq 0;\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Очевидно первая система совокупности имеет решение, если $-a<-1$, т.е. при $a>1$. Для совместимости второй системы необходимо, чтобы множество решений неравенства $x^2+x+1-a\leq 0$ было непустым. Это означает, что дискриминант $4a-3$ соответствующего квадратного трехчлена должен быть неотрицательным. Отсюда, $a \geq \frac{3}{4}$.

Таким образом, естественно рассмотреть два случая: $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ и $a > 1$.

Если $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$, то решением квадратичного неравенства будет отрезок: $\left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$. Поэтому вопрос о решении второй системы совокупности сводиться к исследованию расположения числа -1 относительно полученного промежутка. Легко показать, что отрезок $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$ решение неравенства$-1 \leq \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$. Следовательно, в рассматриваемом случае полученный отрезок будет решением второй системы (2) и всей совокупности, поскольку система (1), как указано ранее, не имеет решений при $a \leq 1$.

Если $a > 1$, то имеет $-1 \leq \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}, -1 < \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ и решение системы (2) будет отрезок$\left[-1; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$, а система (1) удовлетворяет только промежуток $[-a; -1)$. Значит, в этом случае рассматриваемая совокупность имеет решением отрезок $\left[-a; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

Ответ: если $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$, то $\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$;

если $a > 1$, то $-a \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$;

при других *a* решений нет.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Задача 2. Для каждого *a* определите число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Решение: Пусть $a < 0$, тогда уравнение решений не имеет. Пусть a - фиксированное неотрицательное число. Тогда данное уравнение $2|x| - x^2 = a^2$, или уравнение $|x|^2 - 2|x| + a^2 = 0$ (1), обозначим $|x| = z$.

Имеем $z^2 - 2z + a^2 = 0$ (2).

$D = 4 - 4a^2$. Поэтому при $a > 1$ уравнение (2) не имеет решение, а значит, не имеет решение и уравнение (1).

Если $a = 1$, то уравнение (2) имеет единственный корень $z = 1$, и тогда уравнению (1) равносильно уравнение $|x| = 1$ и имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Если $0 < a < 1$, то уравнение (2) имеет корни $z_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}$, $z_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2}$. Следовательно, в этом случае уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений $|x| = 1 + \sqrt{1 - a^2}$ и $|x| = 1 - \sqrt{1 - a^2}$ (3).

Так как числа z_1, z_2 неотрицательные, то первое уравнение совокупности уравнений (3) имеет два решения: $x_{1,2} = \pm(1 + \sqrt{1 - a^2})$, а второе уравнение – два решения $x_{3,4} = \pm\left(1 - \sqrt{1 - a^2}\right)$.

При этом, если $a \neq 0$, т.е. $0 < a < 1$, то все числа различны. Если же a=0, то $x_3 = x_4 = 0$.

Ответ: если $a < 0$, то нет решений;

если $a = 0$, то три решения;

если $0 < a < 1$, то четыре решения;

если a = 1, то два решения;

если $a > 1$, то нет решений.

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д.; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако, не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Задача 3. Найти, при каких значениях параметра a система уравнений не имеет ни одного решения. $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 6a - 2, \\ x + y = 1. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)(1 - x) = 6a - 2, \\ y = 1 - x. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - (9a^2 - 2)x + 9a^2 - 2 = 6a - 2, \\ y = 1 - x. \end{cases}$$

$$2x - 9a^2x + 2x + 9a^2 - 2 = 6a - 2,$$

$$4x - 9a^2x + 9a^2 = 6a, x(4 - 9a^2) = 6a - 9a^2,$$

$x(2 - 3a)(2 + 3a) = 3a \cdot (2 - 3a)$. Если $2 - 3a = 0$, то имеем $x \cdot 0 = 0$ т.е. уравнение имеет большое множество решений, тогда и значений уравнение большое множество, так как согласно значению решений быть не должно, то $2 - 3a \neq 0$. Имеем:

$$x = \frac{3a(2-3a)}{(2-3a)(2+3a)}, x = \frac{3a}{2+3a} \ (*)$$

Выражение (*) не имеет смысла, т.е. уравнение имеет решения

$2 + 3a = 0, a = -\frac{2}{3}$, а значит, не определено и значение у, где $y = 1 - x$, поэтому только при $a = -\frac{2}{3}$ система не имеет ни одного решения.

Ответ: при $a = -\frac{2}{3}$ система не имеет ни одного решения.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Задача 4. Найти все значения a, при которых всякое решение неравенства $(0{,}5)^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \leq (0{,}25)^{\frac{1}{(3-x)^2}}$ входит в область определения функции $f(x) = \ln(9 - 16a^4x^2)$.

Решение: $(0{,}5)^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \leq (0{,}5)^{\frac{2}{(x-3)^2}}$

$$\frac{1}{2(x-1)^2} \geq \frac{2}{(x-3)^2}; \quad \frac{3\left(x-\frac{5}{3}\right)\cdot(x+1)}{2(x-1)^2\cdot(x-3)^2} \leq 0.$$

Получаем: $-1 \leq x < 1$ или $1 < x \leq \frac{5}{3}$.

Область определения исходной функции задается неравенство $9 - 16a^4x^2 > 0$. Теперь условие задачи можно сформировать так: при каких a решение неравенства $9 - 16a^4x^2 > 0$ содержит множество $\left[-1; 1\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right]$?

Очевидно, $a = 0$ входит в ответ (в этом случае решением неравенства является любое действительное число). При $a \neq 0$ получаем $x^2 < \frac{9}{16a^4}$ или $-\frac{3}{4a^2} < x < \frac{3}{4a^2}$.Понятно, что промежуток $(-\frac{3}{4a^2}; \frac{3}{4a^2})$ будет содержать указанное множество, если: $\begin{cases} -\frac{3}{4a^2} < -1, \\ \frac{5}{3} < \frac{3}{4a^2}. \end{cases}$ Отсюда $a^2 < \frac{9}{20}$. Тогда

$$-\frac{3\sqrt{5}}{10} < a < \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Ответ: $-\frac{3\sqrt{5}}{10} < a < \frac{3\sqrt{5}}{10}$, кроме $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Методический комментарий. Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.

Наиболее массовый класс задач с параметром — задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Методы решения задач с параметрами

Метод I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение $|x+2|=ax$ не имеет решений?

Решение: Для каждого значения параметра a решим данное уравнение, после чего отберем те значения параметра, при которых уравнение решений не имеет.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} x+2=ax, \\ x+2\geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -(x+2)=ax, \\ x+2<0, \end{cases}$ т.е.

$\begin{cases} (a-1)x=2, \\ x\geq -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} (a+1)x=-2, \\ x<-2. \end{cases}$

Первая система имеет одно решение $x=\frac{2}{a-1}$ при $\frac{2}{a-1}\geq -2$ т. е. при $a\leq 0$ или $a>1$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение $x=-\frac{2}{a+1}$ если $-\frac{2}{a+1}<-2$,т. е. при $-1<a<0$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Объединяя решения систем, имеем: данное уравнение имеет одно решение $x=\frac{2}{a-1}$ при $a\leq -1$, $a\leq -1$, $a=0$, $a>1$; два решения $x=\frac{2}{a-1}$ и $x=-\frac{2}{a+1}$ при

$-1<a<0$.Анализируя полученный результат, определяем значения параметра a, при которых уравнение не имеет решений.

Ответ: $0<a<1$.

Методический комментарий: Может показаться, что приведенное решение не экономно и содержит много лишних ходов. Например, кажется естественным после получения совокупности двух систем сразу искать лишь те значения параметра, при которых не имеет решений каждая из систем, после чего найти значения параметра, при которых обе системы не имеют решений одновременно. Однако даже понимание того, что требуется проделать в этом случае, уже представляет собой определенную трудность для ряда учащихся. Сказанное, разумеется, не означает, что во всех аналогичных задачах целесообразно выходить на более общую постановку вопроса (выбор оптимального способа решения зависит от конкретной задачи).

Метод II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики в координатной плоскости $(x; y)$ или в координатной плоскости $(x; a)$.

Методический комментарий. Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Задача 6. Найдите все значения а, при которых прямая у = а пересекает график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$в четырех различных точках.

Решение. Решение данной задачи сводится к решению уравнения вида $|x^2 - 2x - 3| = a$ в зависимости от параметра a.

Построим график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$. Для этого вначале найдем координаты вершины параболы $x = 1$, $y = -4$ и построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Затем ту часть графика, которая лежит ниже оси x, симметрично отобразим вверх относительно оси x (рис.1).

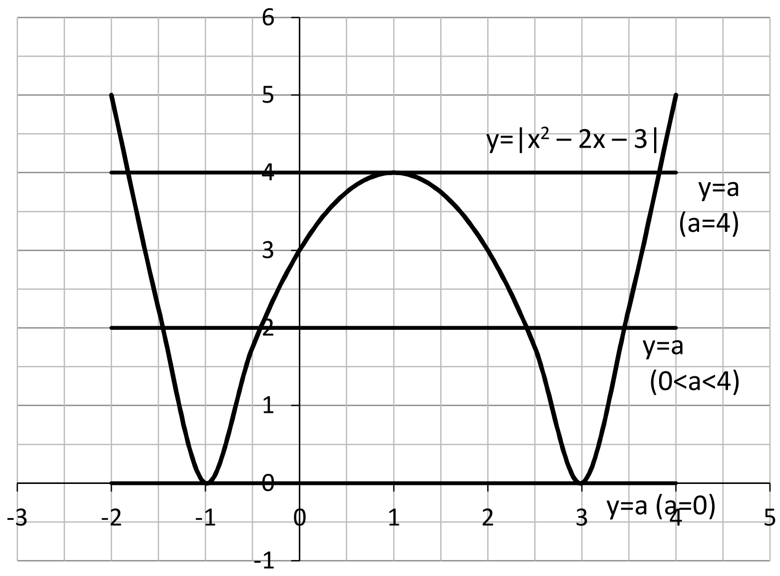


Рисунок 1. Построение графиков в задаче 6

Прямая $y = a$ – прямая, параллельная оси x. Из рисунка 1 видно, что прямая $y = a$ пересекает график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$ в четырех различных точках, если $0 < a < 4$.

Ответ: $0 < a < 4$.

Метод III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Задача 7. Для всех действительных значений параметра a решите уравнение $x^3 - (2 - a)\,x^2 - ax - a\,(a - 2) = 0$.

Решение: Исходное кубическое по x уравнение является квадратным относительно a**.** Поэтому, считая переменную x параметром, перепишем это уравнение в виде стандартного квадратного уравнения относительно a, опуская промежуточные шаги по раскрытию скобок и перегруппировке:

$a^2 - (x^2 - x + 2)\,a - x^3 + 2x^2 = 0.$

Поскольку $x^2 - x + 2 = x^2 + (2 - x)$ и $-x^3 + 2x^2 = x^2(2 - x)$**,** то по обратной теореме Виета $a_1 = x^2$**,** $a_2 = 2 - x$**.**

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $a = x^2$ *и* $a = 2 - x$.

Первое уравнение преобразуется к виду $x^2 = a$, откуда

(1): при $a < 0$ решений нет;

(2): при $a = 0$ единственное решение $x = 0$;

(3): при $a > 0$ два решения $x = \sqrt{a},\ x = -\sqrt{a}$;

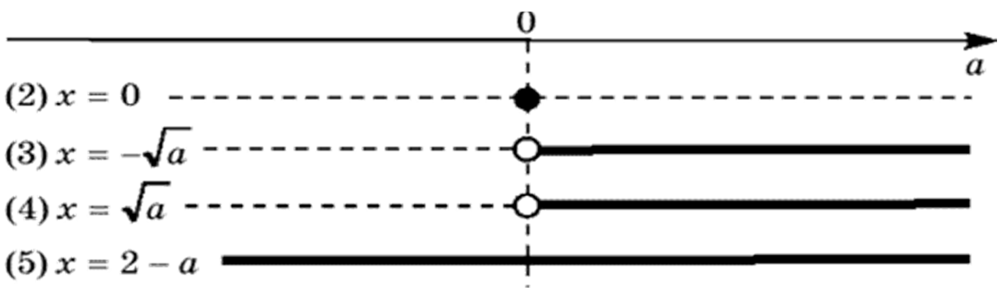
Второе уравнение совокупности имеет единственное решение

(4): $x = 2 - a$ для любого значения параметра a.

Методический комментарий 1. Многие учащиеся, доведя решение до данного момента, испытывают трудности в формировании общего ответа. Приведем удобный прием представления полученных результатов для дальнейшего продвижения в решении задачи. Будем называть данный прием: «разверткой вдоль оси параметра».

Изображаем ось параметра a и отмечаем на ней граничные значения параметра, которые фигурируют в ответах к каждому уравнению совокупности. Все найденные решения уравнений для тех значений параметра a, при которых хотя бы одно решение существует, выписываем в таблице слева (последовательно сверху вниз). Сплошной линией, параллельной оси параметра, указываем те промежутки значений параметра, при которых полученное решение существует. Заметим, что концы промежутков изображаются «светлыми» точками в случае, когда соответствующее решение не существует, а «темными» точками — в противном случае.

Таблица 1



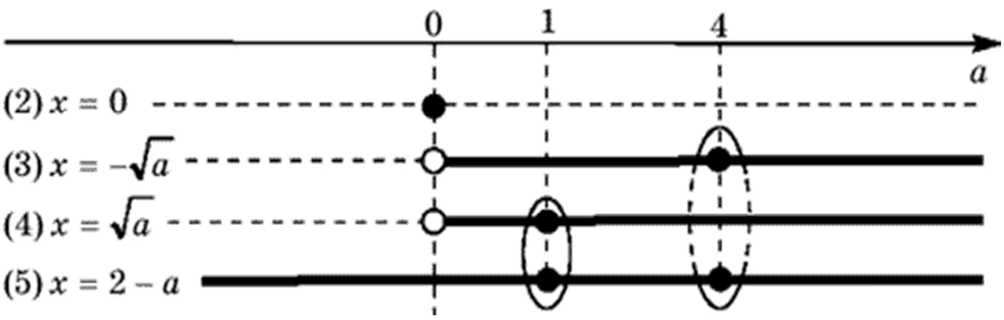
Данная развертка позволяет легко найти все решения исходного уравнения для любого действительного значения параметра: x=2–a при a<0**;** x = 0 или x =2 при a = 0**;** $x = -\sqrt{a}$ или $x = \sqrt{a}$ или x=2– a при a > 0.

Методический комментарий 2. Возникает принципиальный вопрос: является ли приведенный выше ответ окончательным? С одной стороны, для поставленной задачи ответ можно считать окончательным, если допустить возможность повторения в ответе одного и того же решения в различном виде.

Например, при a = 1 равенства $x = \sqrt{a}$ и x = 2 – а определяют одно и то же значение переменной x =1, а при a = 4 равенства $x = -\sqrt{a}$ и x = 2 **–** a аналогично определяют одно значение x = –2. Однако оставлять подобные повторения без внимания обычно не принято, тем более, что при других, особенно популярных в последнее время постановках задач («Укажите количество различных корней данного уравнения в зависимости от параметра a» или «При каких значениях параметра a уравнение имеет одно решение?») игнорирование указанного обстоятельства приводит к неверному ответу.

Полученные равенства (2)–(4) могут при некоторых значениях параметра a определять одно и то же значение переменной x. Найдем указанные значения параметра. Поскольку значения$\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$– различны для всех a > 0, осталось выяснить, при каких значениях a выполняются равенства$\sqrt{a}$ = 2 − a и –$\sqrt{a}$ = 2 − a. Пусть $\sqrt{a} = t$ тогда первое уравнение приводится к виду $t^2 + t - 2 = 0$**,** откуда t =1 и t = –2 (не подходит, так как $t = \sqrt{a} > 0$ при a > 0), т. е.$\sqrt{a} = 1$, a = 1. Аналогично решая второе уравнение, находим a = 4**.**

Таблица 2



Полученный результат в таблице 2 проиллюстрирован следующим образом: линии равенства (4) и (5) «сливаются» при a=1, линии (3) и (5) «сливаются» при a = 4.

Методический комментарий 3: При практическом использовании «развертки по параметру» таблицу 2 рекомендуем не воспроизводить, а полученные «слияния» изображать в таблице 1.

Для изолированных значений параметра естественно приводить числовые значения корней.

Используя таблицу 2, формулируем окончательный ответ задачи.

Ответ: $x = 2 - a$ при $a < 0$;

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ при $a = 0$;

$x_{1,2} = \pm\sqrt{a}, x_3 = 2 - a$ при $0 < a < 1$, $1 < a < 4$, $a > 4$;

$x_{1,2} = \pm 1$ при $a = 1$; $x_{1,2} = \pm 2$ при $a = 4$.

Решение задач с параметрами с использованием компьютерной графики

Решение задач с параметрами в компьютерной программе "Живая математика"

«Живая геометрия» - это русская версия американской программы по геометрии (Geometer's SketchPad), разработанной фирмой Key Curriculum Press. Компьютерное средство для работы с геометрическими изображениями. «Живая геометрия» - это набор инструментов, который предоставляет все необходимые средства для построения чертежей и их исследования. Программа позволяет создавать интерактивные чертежи на основе изменения положения исходных точек.

Программа включает панель инструментов для выделения или построения геометрических объектов, расположенную в левой части экрана, горизонтальное меню для действий с геометрическими объектами и окно для создания чертежа (см. рисунок 2).

Меню представлено такими пунктами как: «Файл», «Редактор», «Вид», «Построения», «Преобразование», «Измерения», «График», «Окно» и «Справка».

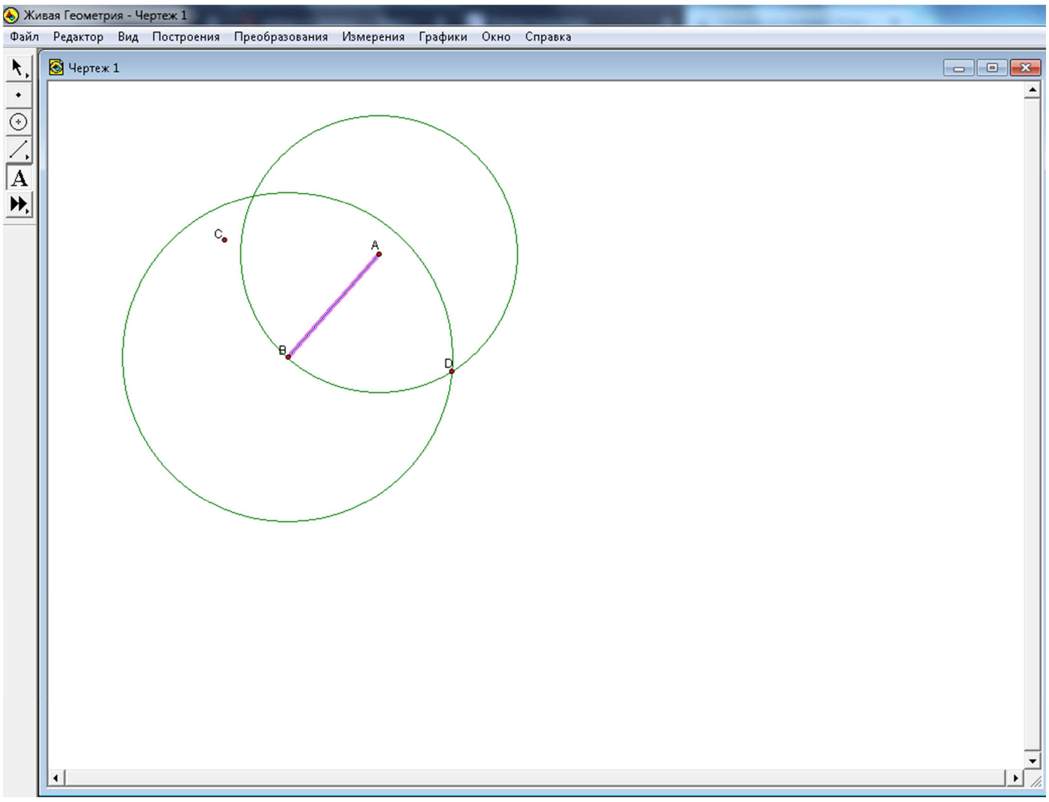


Рисунок 2. Интерфейс программы “Живая геометрия”

Чтобы добавить координатную сетку, пользователю необходимо воспользоваться командой *Графики – Форма сетки – Прямоугольная сетка*, Еще один инструмент, часто применяемый при создании чертежей - это *Текст*, который позволяет добавлять надписи для обозначения буквами, например, центров окружностей и точки (см. рисунок 43). Принцип действия: наводим курсор на точку и щелкаем левой кнопкой мыши.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 1$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение. Рассмотрим функции f(x)=$\left|\frac{5}{x}-3\right|$ и h(x)=ax−1. Исследуем уравнение f(x)= h(x) на промежутке (0; +∞).

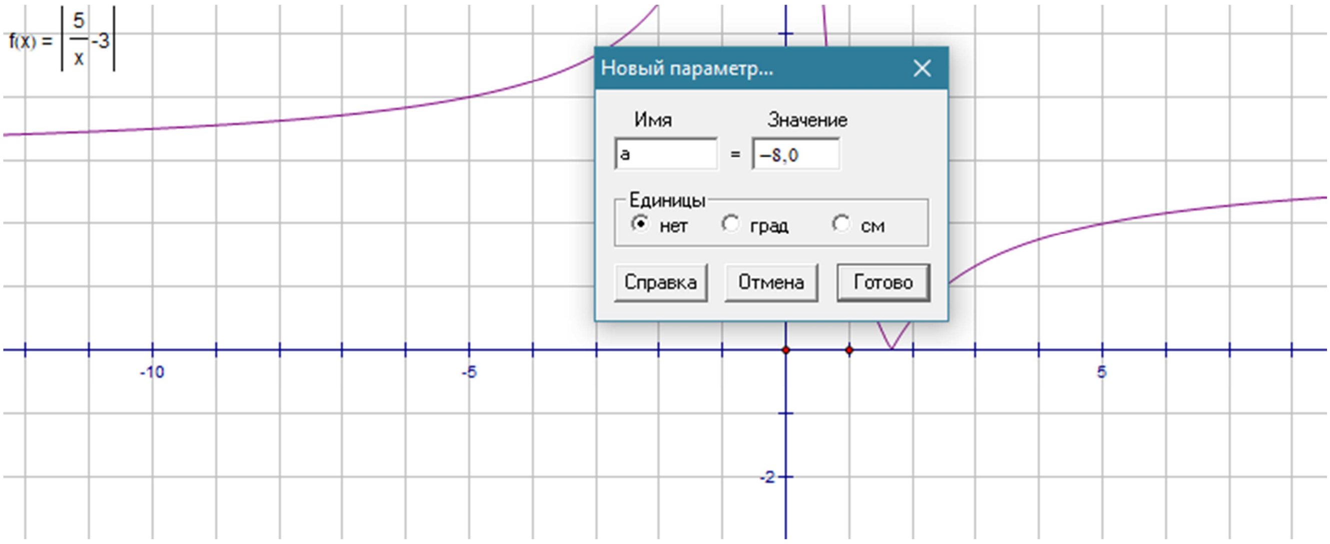
Необходимо построить график f(x)=$\left|\frac{5}{x}-3\right|$ и график функции h(x)=ax−1.

Уравнение h(x)=ax−1 задает прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0; −1). Для построения динамического чертежа выполняем следующие действия:

- на панели инструментов выбираем команду *Графики – Новая функция;* в строке ввода пишем функцию f(x)=abs(5/x-3);

- выделяем функцию и на панели инструментов выбираем команду *Графики – Построить график функции*

- на панели инструментов выбираем команду *Графики – Новый параметр* и



задаем произвольное значение параметра a (рис.3)

Рисунок 3. Ввод параметра

- на панели инструментов выбираем команду *Графики – Новая функция;* в строке ввода пишем функцию g(x)=a*x-1.

При необходимости можно изменить свойства параметра a (рис. 4)

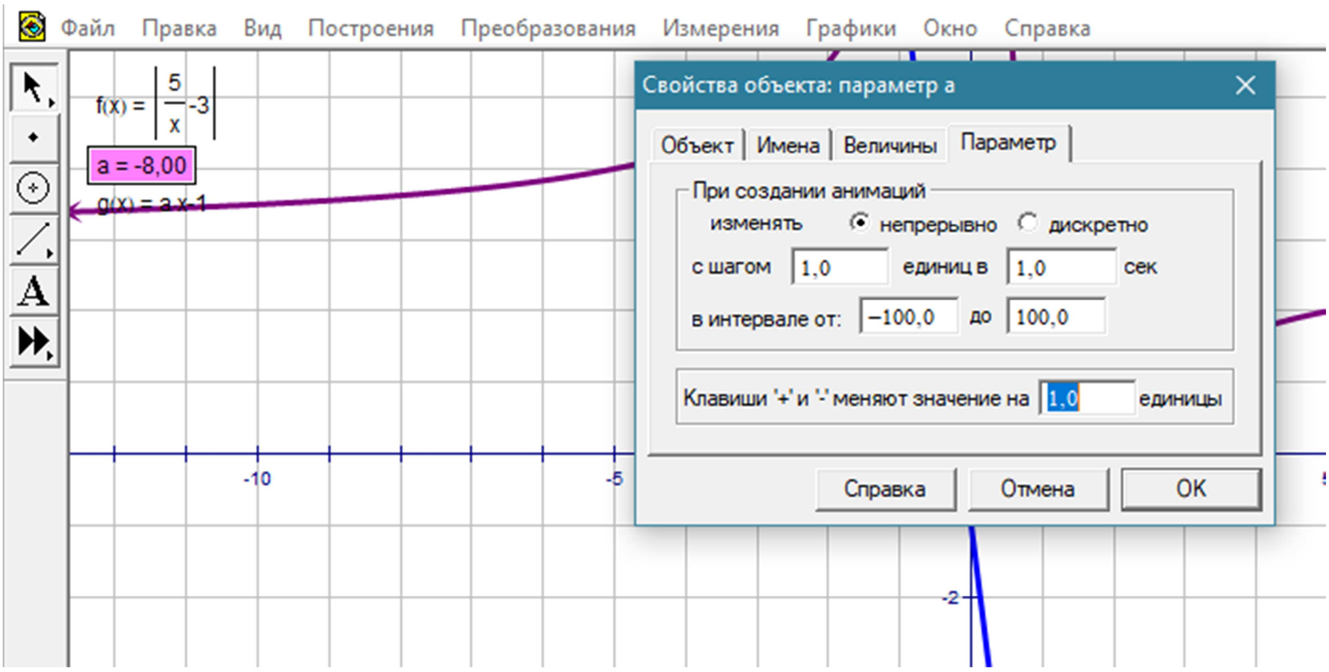
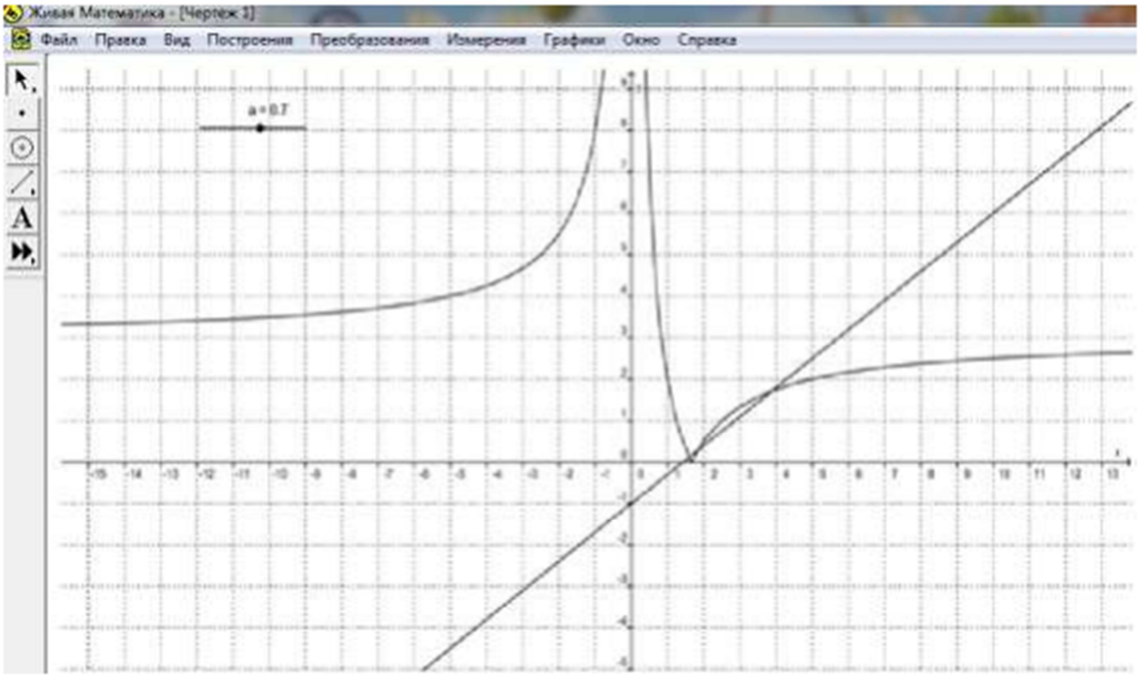


Рисунок 4. Изменение свойства параметра *a*



В результате получаем чертеж (рис. 5).

Рисунок 5. Чертеж к задаче 8

Выделяем параметр и левой кнопкой мыши вызываем команду *Анимация параметра* (рис.6).

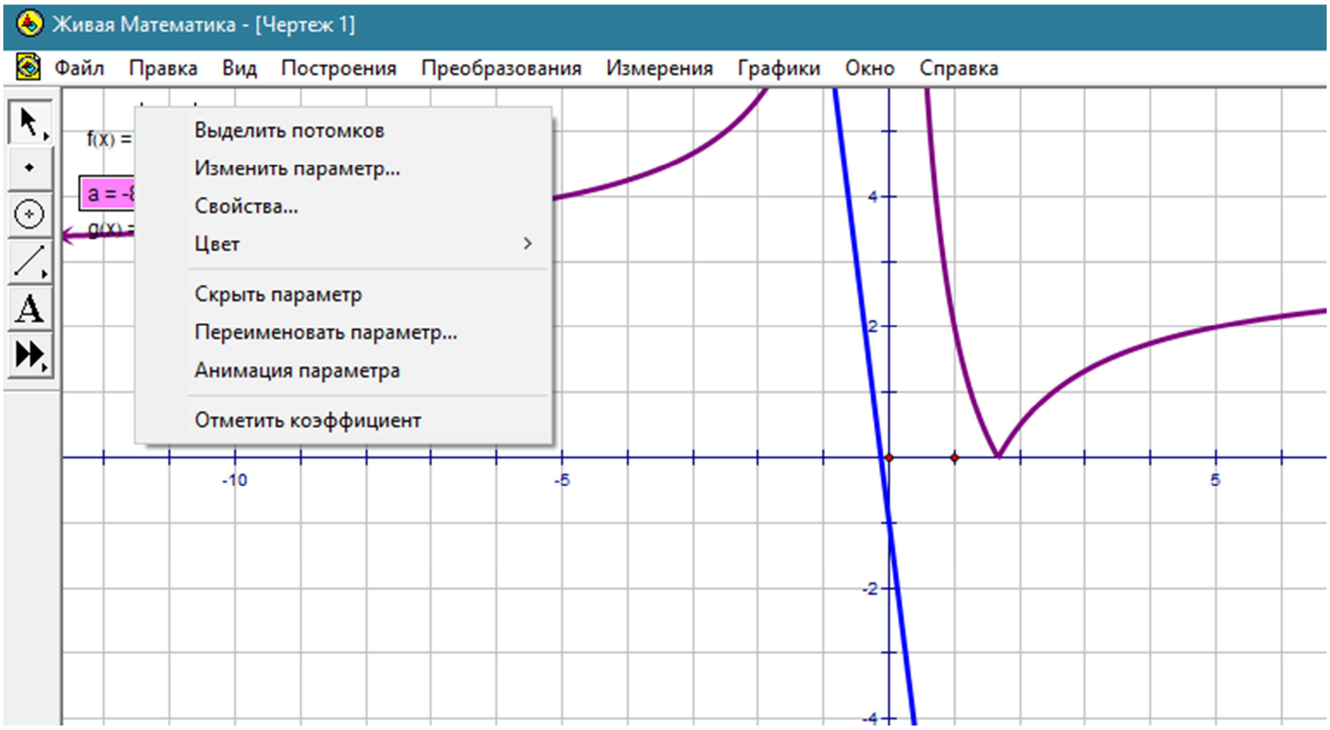
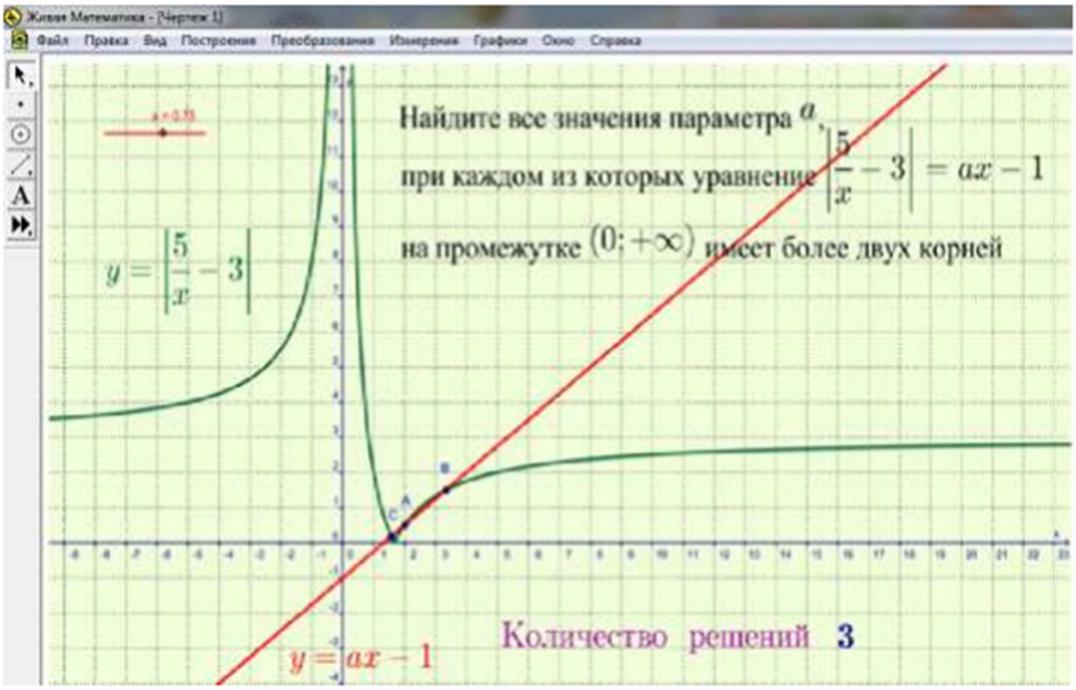


Рисунок 6. Анимация параметра

Живая математика позволяет изменить чертеж, дополняя новыми



элементами, благодаря которым он становится более наглядным (Рис. 7).

Рисунок 7. Наглядный чертеж к задаче 8.

Решение задач с параметрами в компьютерной программе GeoGebra

GeoGebra (Геогебра) — это динамическая математическая программа, которая объединяет геометрию, алгебру и исчисления. Программу можно скачать и установить на ПК с официального сайта http://www.geogebra.org, также разработчики предлагают online использование программы http://static.geogebra.org/.

При запуске GeoGebra открывается окно программы, представленное на рисунке 8.

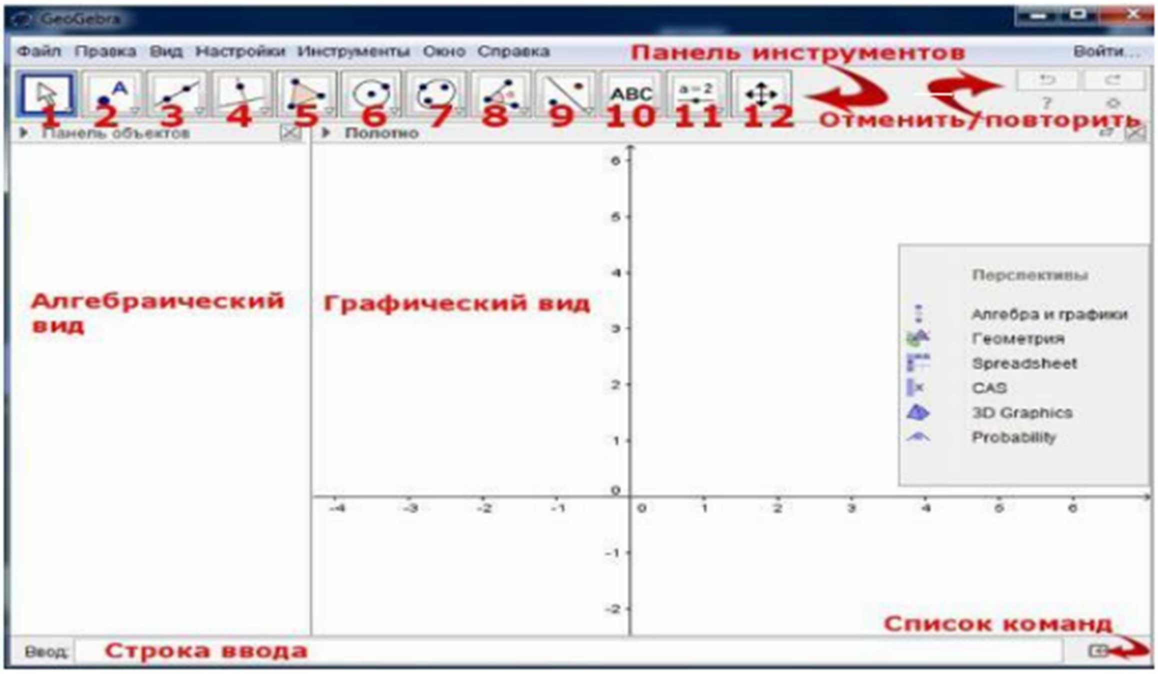


Рисунок 8. Окно программы GeoGebra

Главное меню – основное меню окна, как и во многих приложениях, выполняет все основные функции программы. В данной программе содержит: Файл, Правка, Вид, Настройки, Инструменты, Окно, Справка. В разделе справка имеется руководство по использованию инструментов и перспектив.

Панель инструментов – на этой панели расположены все основные инструменты, которые позволяют выполнять построения при помощи мыши. Достаточно выбрать интересующий вас объект и нажать на графическое представление.

Отменить/Повторить – две кнопки, левая позволяет отменить последние действия, правая повторить отменённое действие.

Область графического представления – основная область, в которой будут выполняться все построения.

Панель объектов (Область алгебры) – область в которой будут записаны все математические формулы, описывающие построенные объекты.

Строка ввода – данная область позволяет вводить различные формулы, функции, уравнения, которые сразу отобразятся в панели объектов и в графическом представлении.

Помощь по строке ввода – позволяет просмотреть весь список команд для строки ввода.

Область перспективы – позволяет выбрать необходимую область для построения.

GeoGebra обладает богатым набором инструментов. Рассмотрим каждую из групп инструментов.

Первая группа – движение, группа инструментов позволяет изменять положение или отслеживать движение объектов. В данную группу входит: перемещать; движение относительно точки.

Вторая группа – точки, является основной группой элементов любого построения на плоскости. В данную группу входят: точка; точка на объекте; прикрепить/снять точку; пересечение двух объектов; середина или центр; комплексное число; экстремумы и корни.

Третья группа – прямые линии. В данную группу входят: прямая; отрезок; отрезок с фиксированной длинной; луч; ломаная; вектор; отложить вектор.

Четвёртая группа – специальные линии, куда входят: перпендикулярная прямая; параллельная прямая; срединный перпендикуляр; биссектриса угла; касательная; поляра и диаметр; аппроксимация; локус.

Пятая группа – многоугольники, куда входят инструменты: многоугольник; правильный многоугольник; жёсткий многоугольник; векторный многоугольник.

Шестая группа – окружности и дуги, с инструментами: окружность по центру и точке; окружность по центру и радиусу; циркуль; окружность по трём точкам; полуокружность по двум точкам; дуга по центру и двум точкам; дуга по трём точкам; сектор по центру и двум точкам; сектор по трём точкам.

Седьмая группа – конические сечения, такие как: эллипс; гипербола; парабола; коника по пяти точкам.

Восьмая группа – измерения, обладающая инструментами: угол; угол заданной величины; расстояние или длина; площадь; наклон прямой; создать список.

Девятая группа – преобразования, в которую входят: отражение относительно прямой; отражение относительно точки; отражение относительно окружности; поворот вокруг точки; параллельный перенос по вектору; гомотетия относительно точки.

Десятая группа – специальные объекты: надпись; вставить изображение; карандаш; фигура от руки; отношения объектов; исследователь функций.

Одиннадцатая группа – действия над объектами: ползунок; флажок отображения/скрытия объектов; кнопка; окно ввода.

Двенадцатая группа – общие: переместить чертёж; увеличить; уменьшить; показать/скрыть объект; показать/скрыть обозначения; копировать стиль; удалить объект.

Для того чтобы работать с инструментами в GeoGebra, необходимо активировать инструмент, нажав на кнопку с соответствующей иконкой сверху экрана и выбрать необходимый инструмент из этой панели инструментов.

GeoGebra предоставляет много возможностей для работы в различных областях. Для этого необходимо нажать левой кнопкой мыши в область перспектив, или же перезапустить приложение, для открытия окна перспектив. Рабочая область “Алгебра и графики” представлена на рисунке 9.

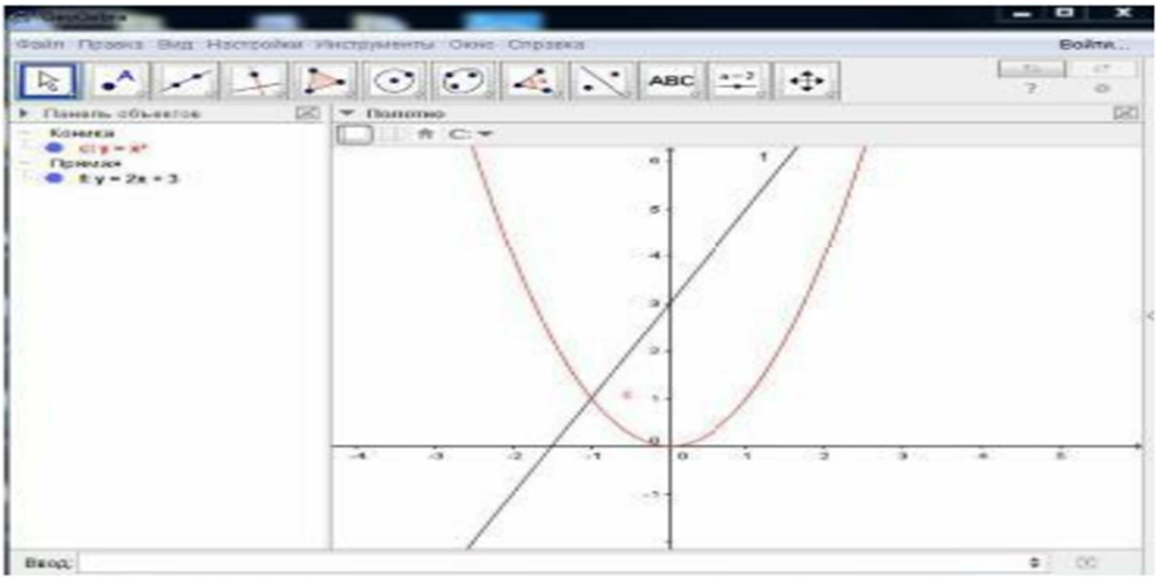


Рисунок 9. Рабочее окно перспективы “Алгебра и графики”

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система не имеет решений.

$$\begin{cases} ((x-3)^2+(y-3)^2-1)((x-1)^2+y^2) \le 0 \\ y-2=ax \end{cases}$$

Решение. В первом неравенстве дано произведение двух выражений. Первое из них описывает окружность с центром в точке (3;3) и радиусом 1, а второе—точку (1;0). Т. к. само неравенство меньше нуля, то его решением будет объединение внутренней части окружности и точки. Уравнение в системе — это семейство прямых: $y - 2 = ax$. Для того, чтобы данная система не имела решений, необходимо отсутствие пересечения прямой с окружностью, а также прохождения через точку. Выполним построения в компьютерной среде GeoGebra и найдем значения параметра, при которых данная ситуация будет выполняться.

1. Запустим программу GeoGebra. Появится окно, похожее на графический редактор (рис. 10).

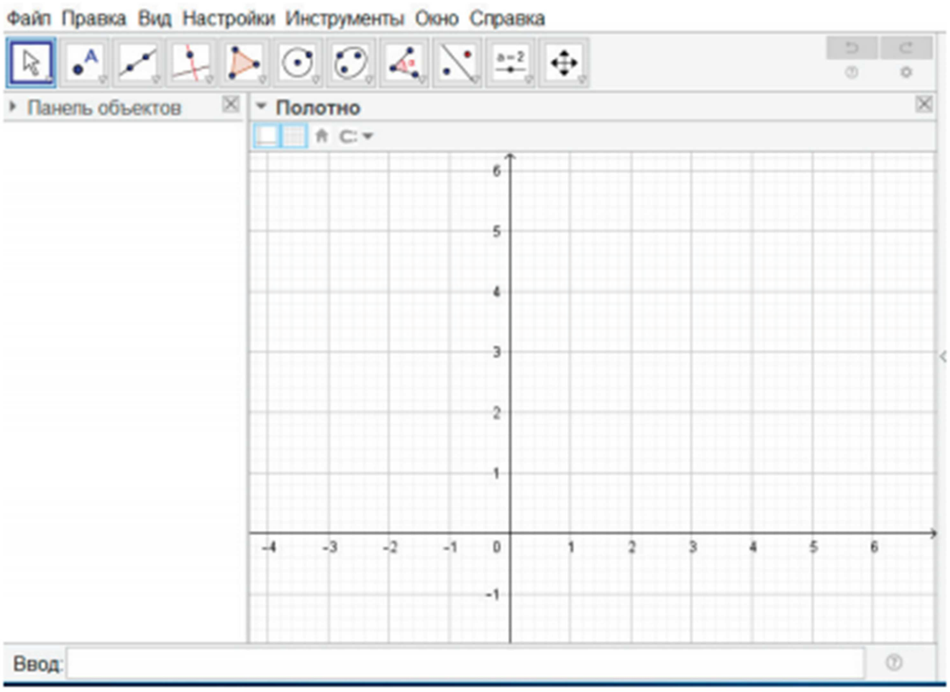
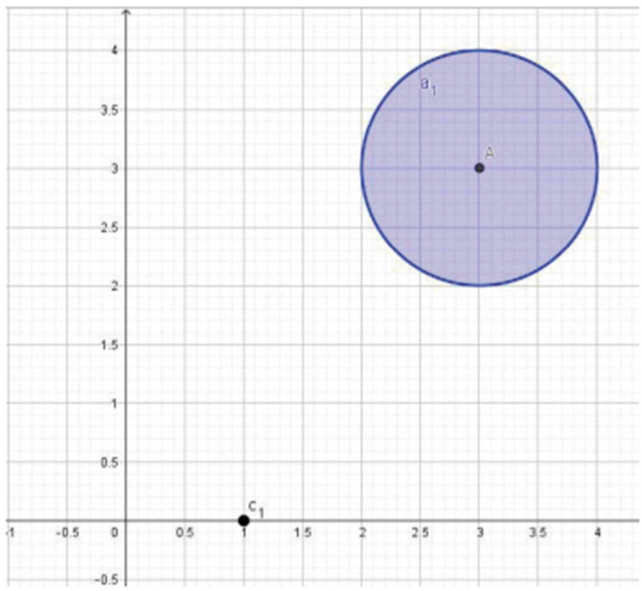


Рисунок 10. Интерфейс программы GeoGebra

2. Строим объекты для неравенства. Для этого в строке ввода делаем запись: (x-3)^2+(y-3)^2=1. Можно записать и неравенством, тогда будет выделена и внутренняя область окружности. Определим центр данной окружности. Для этого вводим команду: центр («conic»), где вместо объекта



прописываем букву, которой будет назван построенный объект в панели объектов. Точно также строим точку, для которой задано уравнение: $(x-1)^2+y^2=0$ (рис.11).

Рисунок 11. Второй шаг решения задачи 9

3. Построим теперь график функции с параметром. Для этого находим в панели инструментов «ползунок» и создаем его на полотне. Название параметра оставим a, шаг для начала выберем 0,5. Далее вводим в строку ввода $y = 2+ax$. Чтобы было удобно передвигать ползунок при помощи клавиатуры, выделим его правой клавишей мыши и дальнейшее изменение параметра будет управляться стрелками (рис. 12).

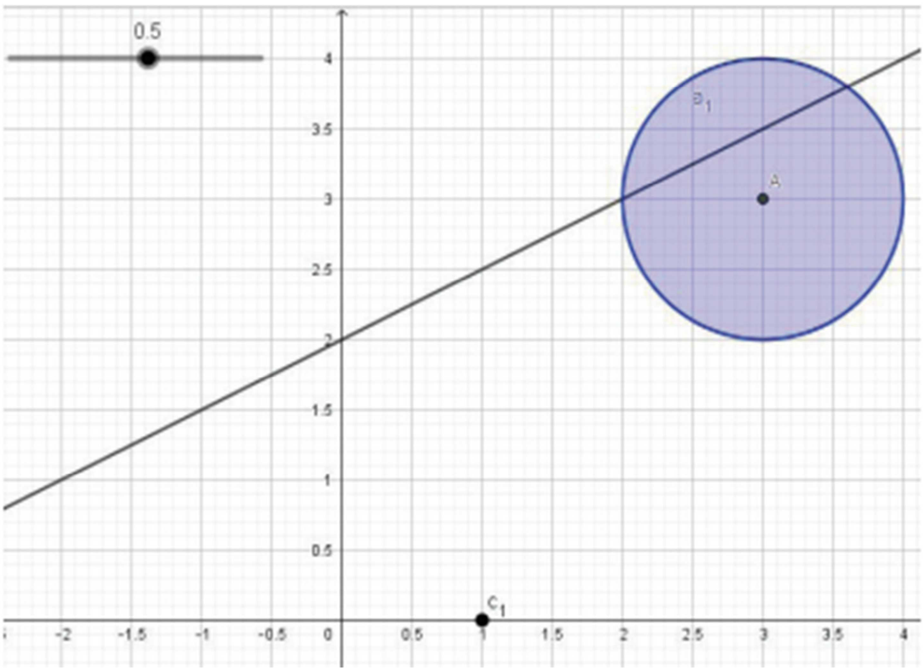


Рисунок 12. Результат третьего шага решения задачи 9.

4. Первые точки, которые нам нужны — это точки касания прямой с окружностью. Т. к. мы пока не знаем устроит ли нас выбранный шаг для параметра, попробуем поискать получается ли точка пересечения с одной

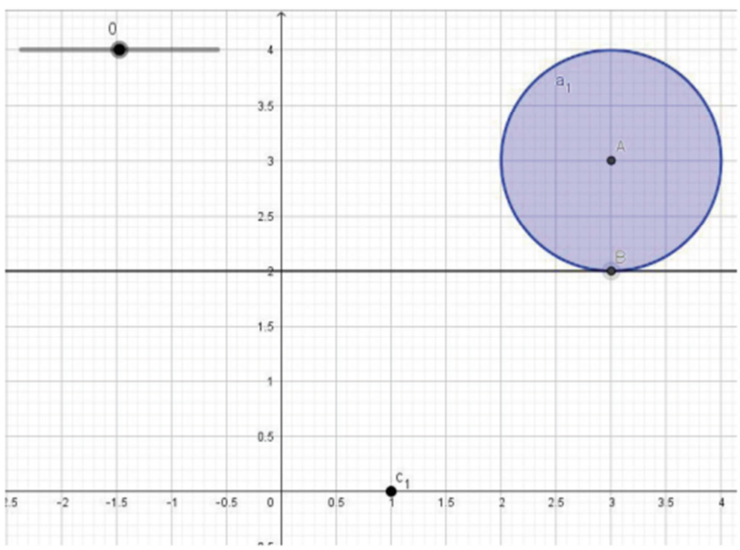
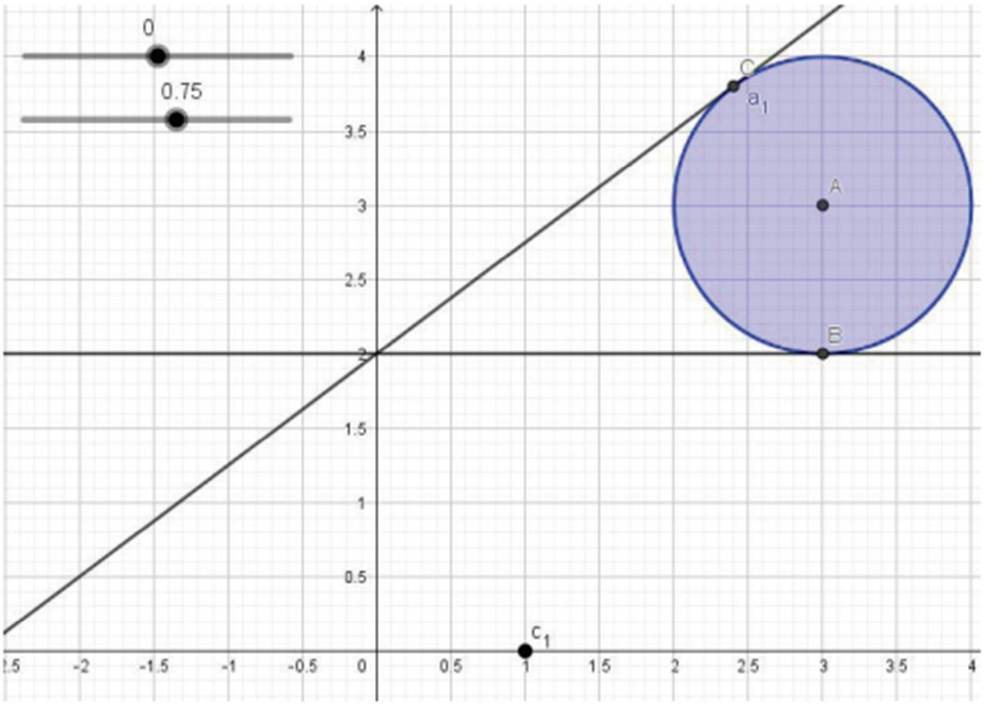


Рисунок 13. Результат четвертого шага решения задачи 9

или с другой стороны окружности. Точка появится при параметре равном 0. Отметим полученную точку пересечения, используя инструмент «точка пересечения». (рис. 13)

5. Для поиска второй точки, создадим еще один ползунок, уменьшив шаг до 0,1. При этом прямая будет строиться заново, т.к. ползунок имеет уже другое имя. Таким образом, повторим этап построения прямой, заменив в уравнении букву параметра. Чтобы не путаться с именами ползунков, можно в свойствах объекта поставить - "показывать только значение". Определим вторую точку касания, она появится при значении - 0,75. Т. е., получаем, что значения между 0 и 0,75=3/4 необходимо исключить, т.к. в этом случае прямая пересекает



окружность (рис. 14).

Рисунок 14. Результат пятого шага решения задачи 9

6. Осталось найти значение параметра, при котором прямая будет проходить через точку (1;0). Создадим еще один ползунок и снова построим прямую. Приблизим её к точке пересечения. Для того, чтобы

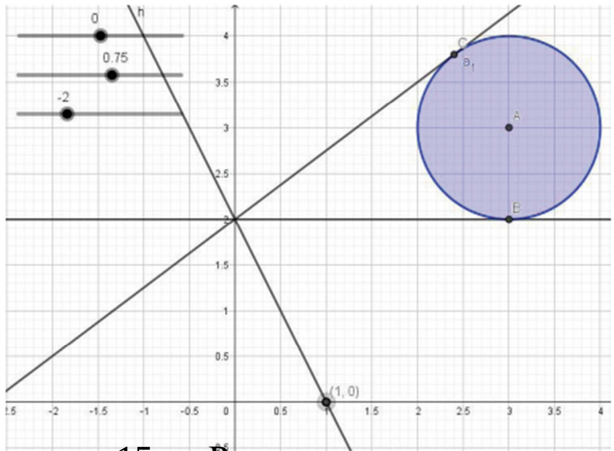


Рисунок 15. Результат шестого шага решения задачи 9

увидеть, попадает ли прямая в точку пересечения, выполним пересечение прямой с осью Ох чуть раньше и будем изменять значение параметра, пока значение точки не станет (1;0) (рис. 15).

7. Для того, чтобы показать, что все значения параметра между найденными будут являться решением задачи - создадим еще один ползунок. Введём уравнение прямой и сделаем анимацию данного объекта. Для этого выберем в свойствах объекта «анимировать». Скорость движения можно изменять при необходимости (рис. 16).

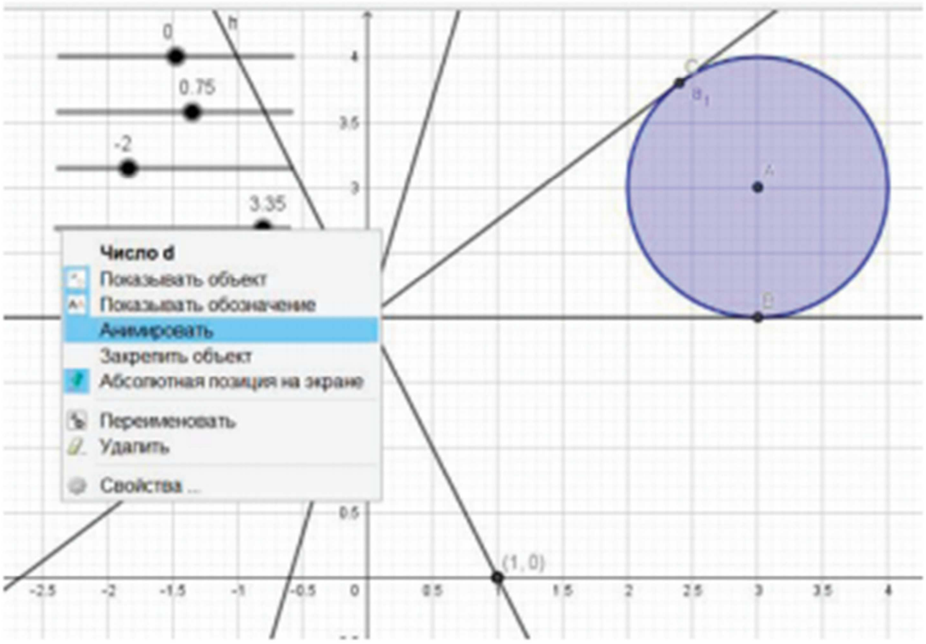


Рисунок 16. Результат седьмого шага решения

8. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (\frac{3}{4};\ +\infty)$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ “УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ”

Особенности и балльно-рейтинговая система оценивания домашней контрольной работы

Домашняя контрольная работа является промежуточной формой контроля знаний студентов и представляет собой письменное выполнение определенных заданий. Она предназначена для проверки знаний студентов по учебной дисциплине “Решение задач с параметрами”, а также служит для закрепления полученных знаний, умений и навыков. В контрольной работе студентам предлагаются задачи, сформулированные на основании материала, изложенного в лекциях, проработанного на практических занятиях или самостоятельно изученного студентами.

Домашняя контрольная работа направлена на решение следующих задач:

- закрепление, расширение знаний и умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий по дисциплине;
- развитие навыков самоорганизации и самоконтроля;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие математической культуры, логики рассуждений;
- оценка сформированности профессиональных компетенций и умений самостоятельной учебной и поисковой деятельности.

В работе представлено 10 вариантов заданий контрольной работы, которые предполагают индивидуальную форму работы над ними. В каждом из десяти вариантов содержится четыре задачи.

Перед тем как приступить к контрольной работе, студентам следует ознакомиться с теоретическим материалом и разобраться с примерами решения задач, представленных в первой главе данных методических рекомендаций.

В первом задании требуется решить задачу с параметрами, применяя аналитические методы. Во втором задании предлагается решить задачу с параметром методом симметричных корней или функциональным методом. Для успешного выполнения задания студенту рекомендуется изучить литературу [1] (основная); [1], [2] (дополнительная).

В третьем задании необходимо решить задачу с параметром графическим методом и построить чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra. Полезным при выполнении этого задания будет материал параграфа “решение задач с параметрами с помощью компьютерной графики”, образец решения варианта контрольной работы данных методических рекомендаций, а также учебные пособия [1], [2] (основная), [2] (дополнительная).

В четвертом задании предлагается спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса, задачи подобрать самостоятельно. Помощь в выполнении задания может оказать учебное пособие [3] (дополнительная), образец выполнения варианта контрольной работы, представленный в данных методических рекомендациях, а также статья: Как увлечь школьников исследовательской деятельностью [Текст] / Е. В. Баранова, М. И. Зайкин // Математика в школе. - 2004. - № 2. - С. 7-10.

За правильное выполнение первого и второго заданий выставляется по три балла. Третье и четвертое задания оцениваются в четыре балла.

Система оценивания заданий контрольной работы представлена в таблице 3.

Таблица 3. Оценивание домашней контрольной работы в БРС

№ задания	Характеристика задания	Критерии оценивания	Баллы
1	Решить задачу с параметром аналитическим методом	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ	2
		Основная идея решения найдена верно. Имеются ошибки в последовательности выполнения действий. Решение недостаточно обоснованно	1
2	Решить задачу с параметром методом симметричных корней или функциональным методом	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ	2

		Основная идея решения найдена верно. Имеются ошибки в последовательности выполнения действий. Решение недостаточно обоснованно	1
3	Решить задачу с параметром графическим методом. Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra	Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ. Выполнен наглядный чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra	4
		Логично и последовательно выполнены все шаги решения, рассуждения имеют четкое обоснование, получен верный ответ. Но не выполнен чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или “GeoGebra”	3
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ. Выполнен наглядный чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra	2
		Ход решения задачи верный, но решение недостаточно обоснованно или из-за вычислительной ошибки получен неверный ответ. Чертеж в компьютерной программе не выполнен.	1
4	Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса	Структура учебно-исследовательской карты спроектированы верно, в соответствии с логикой учебного исследования. Определены виды деятельности и формы работы учащихся. Методически грамотно спроектирована дозированная помощь в решении исследовательской задачи. Подробно отражена необходимая экспериментальная деятельность; имеются необходимые иллюстрации. Учебно-исследовательская карта представлена	4

		в двух вариантах (карта для ученика и заполненный вариант). Представлено математически верное, подробное решение задачи с параметрами	
		Структура учебно-исследовательской карты спроектированы верно, в соответствии с логикой учебного исследования. Определены виды деятельности и формы работы учащихся. В проектировании дозированной помощи имеются методические ошибки. Подробно отражена необходимая экспериментальная деятельность; имеются необходимые иллюстрации. Учебно-исследовательская карта представлена в двух вариантах (карта для ученика и заполненный вариант). Представлено математически верное, подробное решение задачи с параметрами	3
		Структура учебно-исследовательской карты спроектированы верно, в соответствии с логикой учебного исследования. Определены виды деятельности и формы работы учащихся. В проектировании дозированной помощи имеются методические ошибки. Необходимая экспериментальная деятельность учащихся не отражена (отражена недостаточно подробно, не иллюстрирована). Учебно-исследовательская карта представлена в двух вариантах (карта для ученика и заполненный вариант). Представлено математически верное, подробное решение задачи с параметрами	2
		Структура учебно-исследовательской карты спроектированы верно, в соответствии с логикой учебного исследования. Определены виды деятельности и формы работы учащихся. В проектировании дозированной помощи имеются	1

		методические ошибки. Необходимая экспериментальная деятельность учащихся не отражена (отражена недостаточно подробно, не иллюстрирована). Учебно-исследовательская карта представлена в двух вариантах (карта для ученика и заполненный вариант). В решении задачи с параметром присутствуют ошибки математического характера	
ИТОГО			максимум 14

Требования к выполнению и оформлению домашней контрольной работы

1. Контрольная работы выполняется на отдельных листах, которые должны быть скреплены, или в отдельной тетради синими чернилами, оставляются поля для замечаний рецензента (преподавателя).

2. В начале первого листа (или на обложке тетради) должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, название факультета, номер курса и группы студента, название дисциплины, номер варианта контрольной работы.

Например:

Контрольная работа по дисциплине “Решение задач с параметрами”

студентки факультета информатики, математики и экономики

5 курса группы МИ-15 Ивановой Татьяны Александровны

Вариант 1

3. Условия задач должны быть полностью переписаны в тетрадь. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера заданий следует указывать перед условием. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы.

4. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять следующие требования:

а) соблюдать абзацы, всякое новое высказывание следует начинать с красной строки, в конце выполнения задания записывается ответ;

б) формулы, определения, теоремы нужно выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;

в) необходимо правильно употреблять математические символы.

5. Решение задачи нужно сопровождать формулами, ссылками на соответствующие утверждения и теоремы, развернутыми расчетами и пояснениями к ним, для наглядности – иллюстрациями.

6. Задачи № 1 и № 2 оцениваются в 3 балла, задачи № 3 и № 4 оцениваются в 4 балла. Таким образом, максимально за контрольную работу можно набрать 14 баллов. Если набрано менее 7 баллов (выполнено верно меньше половины работы), то работу необходимо переделать.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в срок в соответствии с учебным планом – графиком.

8. Работу можно выполнять в электронном или рукописном вариантах. Если работа выполняется в рукописном варианте, чертеж к задаче № 3 выполняется в отдельном файле и высылается на электронную почту преподавателя (можно сделать скриншот и распечатать).

Варианты домашней контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

$$\sqrt{4x-3}\ln(2x-a)=\sqrt{4x-3}\ln(3x+a)$$

(Применить аналитический метод)

2. Найдите все значения a, при которых система имеет ровно одно решение

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3, \\ x=(a+2)y^2-(2a+1)y+a-3 \end{cases}$$

(Применить метод симметричных корней)

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственный корень.

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 2

1. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_{x+1}(4a+x-6)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$. (Применить аналитический метод)

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение: $-4x^2+a\cos(sinx)-2a^2=0$. (Применить метод симметричных корней)

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} y^2+xy-4x-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами для 9 класса). Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 3

1. При каждом a решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x}=32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a}+\sqrt{x^2+a^2-6x+9}=\sqrt{5}. \end{cases}$$

(Применить аналитический метод)

2. Найти все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение: $\begin{cases}(3-2\sqrt{2})^y+(3+2\sqrt{2})^{-y}-3a=x^2+6x+5\\ y^2-(a^2-5a+6)x^2=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}$

(Применить метод симметричных корней)

3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения

$$\begin{cases}\dfrac{xy^2-xy-4y+4}{\sqrt{x+2}}=0,\\ y=x+a\end{cases}$$

.

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами для 9 класса”. Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 4

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases}(x-2)(2x-4-y)=|x-2|^3,\\ y=x+a\end{cases}$$

(Применить аналитический метод)

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение: $x+\frac{1}{x}+\frac{a}{1+\left|x-\frac{1}{x}\right|}=a^2$.

(Применить метод симметричных корней)

3. Найдите все значений a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения.

$$\begin{cases}(y^2-xy+x-3y+2)\sqrt{x+3}=0,\\ a-x-y=0\end{cases}$$

Построить чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “решение задач с параметрами для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 5

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1]: $\sqrt{3x-2}\ln(x-a) = \sqrt{3x-2}\ln(2x+a)$

(Применить аналитический метод).

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственный корень: $x^2 + (a-4)^2 = |x-a+4| + |x+a-4|$. (Применить метод симметричных корней).

3. Найдите все значения a, при каждом из которых система имеет ровно два различных решения.

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3, \\ x + y = a \end{cases}$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 6

1. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет ровно два решения.

$$(\log_2(x+a) - \log_2(x-a))^2 - 3a(\log_2(x+a) - \log_2(x-a)) + 2a^2 - a - 1 = 0$$

(Применить аналитический метод)

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно два решения: $(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = cos\frac{18\pi}{a}$. (Применить функциональный метод)

3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - xy - 4y + 4}{\sqrt{x+2}} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая геометрия” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 7

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$\frac{2a - x^2 + 3x}{x - a^2} = 0$$

(Применить аналитический метод).

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет более одного корня: $27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 - 6x = -3a$. (Применить функциональный метод)

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственный корень.

$$-ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 8a + 2$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая геометрия” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно.

Вариант 8

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1]: $x^2 + (x - 1)\sqrt{3x - a} = x$. (Применить аналитический метод)

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше чем (-24). (Применить функциональный метод)

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно два решения.

$$\begin{cases} (y+2x)(2y+x) \leq 0, & (1) \\ \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}} & (2) \end{cases}$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая геометрия” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно

Вариант 9

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре решения.

$$\begin{cases} x^4+y^2=a^2, \\ x^2+y=|a+1| \end{cases}$$

(Применить аналитический метод)

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых отрезок [-3; -1] целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3a}{a-2x} < 0$. (Применить функциональный метод)

3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения.

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая геометрия” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно

Вариант 10

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(2y-x)a=1+2a-4a^2, \\ x^2+y^2+4(x-y)a=4+4a-7a^2. \end{cases}$$

(Применить аналитический метод)

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство выполняется для любого x: $|x+1|+2|x+a|>3-2x$. (Применить функциональный метод).

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы два решения.

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-5y+x+4)\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-y}}=0, \\ a=x+y-2. \end{cases}$$

Сделать чертеж в компьютерной программе “Живая геометрия” или GeoGebra.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Решение задач с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно

Образец решения варианта контрольной работы

Вариант 0

1. Найти, при каких значениях параметра a уравнение $\cos 2x+2\cos x-2a^2-2a+1=0$ имеет ровно одно решение на промежутке $0\le x\le 2\pi$. (Решить аналитическим методом)

Решение:

Преобразуем уравнение к виду

$\cos^2 x+\cos x-a^2-a=0.$ (1)

Получили квадратное уравнение относительно $\cos x$.

Заметим, что если $\cos x \neq \pm 1$, то на промежутке, равном периоду, это простейшее тригонометрическое уравнение имеет два решения. Отсюда делаем вывод, что возможны только два случая $\cos x = 1$ или $\cos x = -1$.

1. Подставим в (1) $\cos x = 1$ и получим уравнение

$a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2. \end{array}\right.$

Проверим полученные значения a : действительно ли при данных a уравнение (1) имеет одно решение.

При $a = 1$ уравнение (1) превращается в уравнение

$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -2. \end{array}\right.$

И уравнение имеет один корень: $\cos x = 1$.

При $a = -2$ получаем то же уравнение и делаем тот же вывод, что уравнение имеет один корень.

2. Подставим в (1) $\cos x = -1$ и получим уравнение

$a^2 + a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1. \end{array}\right.$

При полученных a уравнение (1) превратится в уравнение

$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = 0, \end{array}\right.$

и оно в нужном промежутке имеет три решения.

Ответ: $a = 1$, $a = -2$.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sin(x - 3a) + sin\frac{x^2-6x+7a}{2} = 4x - x^2 - a$ (2) не имеет действительных корней. (Применить функциональный подход)

Решение:

Введем обозначение $y = \frac{x^2-6x+7a}{2} \Rightarrow x^2 = 2y + 6x - 7a.$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\sin(x - 3a) + siny = 4x - 2y - 6x + 6a$$

$$\sin(x-3a)+siny=-2x-2y+6a$$

$$\sin(x-3a)+2(x-3a)=-siny-2y$$

Так как $siny$ – нечетная функция, то $\sin(-y)=-siny$

$\sin(x-3a)+2(x-3a)=\sin(-y)+2(-y)$ (3)

Введем в рассмотрение функцию $f(t)=sint+2t$

Тогда уравнение (3) примет вид: $f(x-3a)=f(-y)$ (4)

Исследуем функцию $f(t)=sint+2t$ на монотонность.

$f'(t)=cost+2>0$ для любого t, следовательно, функция $f(t)=sint+2t$ возрастает на всей числовой прямой.

Тогда уравнение (4) равносильно уравнению $x-3a=-y$

Вернемся к замене: $x-3a=\frac{-x^2+6x-7a}{2}$

$$2x-6a=-x^2+6x-7a$$

$$x^2-4x+a=0$$

Квадратное уравнение не имеет корней, когда D<0

$\frac{D}{4}=4-a<0\ \Rightarrow a>4$

Ответ: $a\in(4;+\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых график уравнения $\frac{ax^2+2-xy-2(a+2)x}{1-y-2x}=2$ имеет ровно три общие точки со сторонами квадрата ABCD, где A(4, 3), C(-2, 5). Построить чертеж в компьютерной программе “Живая математика” или GeoGebra.

Решение:

Найдем координаты вершин квадрата

Точка S(1; 4) – середина AC. Составим уравнение прямой BD.

$S\in BD$ и $\overrightarrow{AC}\perp BD$

BD: -6(x-1)+2(y-4)=0

BD: 3x-y+1=0

Точки B и D найдем как точки пересечения прямой BD и окружности с центром в точке S и радиусом SA: $(x-1)^2+(y-4)^2=10$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 10 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 18x + 9 = 10$$

$$10x^2 - 20x = 0$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

$$y_1 = 1;\ y_2 = 7$$

Вершины B и D квадрата имеют координаты B(2; 7), D(0; 1).

Преобразуем уравнение:

$$\begin{cases} y \neq 1 - 2x \\ ax^2 + 2 - xy - 2(a+2)x = 2 - 2y - 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1 - 2x \\ (ax^2 - 2ax) - (xy - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1 - 2x \\ ax(x-2) - y(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1 - 2x \\ (ax - y)(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \neq 1 - 2x \\ \left[\begin{array}{l} y = ax \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим чертеж в системе XOY. (Рис. 14).

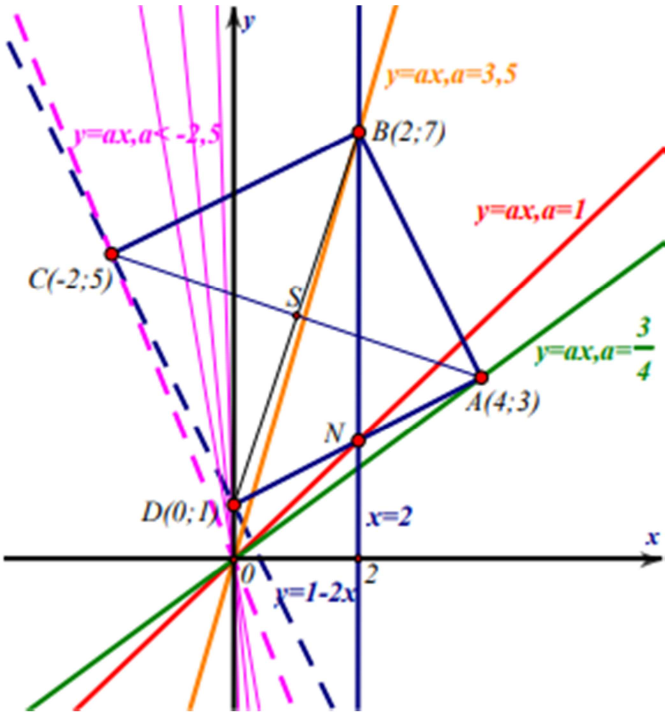


Рисунок 14. Решение задачи графическим методом

Данному уравнению удовлетворяют координаты точек, лежащих на прямой x=2 и на прямых семейства $y = ax$, кроме точек, лежащих на прямой *y=1-2x*. Прямая $x = 2$ пересекает стороны квадрата в двух точках B(2; 7) и N(2; 2). График уравнения будет иметь три общие точки со сторонами квадрата, если прямая из семейства $y = ax$ пересечет сторону квадрата только в одной точке, отличной от точек B и N. Это будет в следующих случаях:

1) Прямая из семейства $y = ax$ проходит через точку $A(4; 3)$. Тогда $4a = 3$, откуда $a = \frac{3}{4}$.

2) Прямая из семейства $y = ax$ проходит через точку $N(2; 2)$. Тогда $2a = 2$, откуда $a = 1$.

3) Прямая из семейства $y = ax$ проходит через точку $B(2; 7)$. Тогда $2a = 7$, откуда $a = 3{,}5$.

4) Координаты точки $C(-2; 5)$ не удовлетворяют данному уравнению. Прямая семейства, проходящая через точку C имеет угловой коэффициент $a = -2{,}5$. При $a \in (-\infty; -2{,}5)$ прямые из семейства пересекают стороны квадрата в одной точке и эти значения удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a \in (-\infty; -2{,}5) \cup \left\{\frac{3}{4}; 1; 3{,}5\right\}$.

4. Спроектировать учебно-исследовательскую карту по теме “Уравнения с параметрами” для 9 класса. Задачи подобрать самостоятельно.

Задачи с параметрами ***Исследовательская работа “Количество корней уравнений, сводимых к квадратным”***
При каком значении параметра ***a*** уравнение $\dfrac{x^2+2x+a}{x-2}=0$ имеет единственное решение? При каком значении параметра ***c*** уравнение $\dfrac{(1-c)x^2-6x+2}{x^2-x-6}=0$ имеет единственное решение?
Вспоминаем, рассуждаем, исследуем… • *Если дано дробно-рациональное уравнение, то сначала необходимо найти*_____________________________________ • *Квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант D*_____________ *ИЛИ* • *Квадратное уравнение* $ax^2+bx+c=0$ *имеет единственное решение, если выражение в левой части – квадрат суммы или разности.* ***Решение:*** ____ ____
При каком значении параметра ***m*** уравнение $\dfrac{x^2-4x}{x^2+2x+m}=0$ имеет два решения?

Вспоминаем, рассуждаем, исследуем… • *Если дано дробно-рациональное уравнение, то сначала необходимо найти*_________________________________ • *Графиком функции* $y=x^2+2x+m$ *является*_____________________ • *Если* $x^2+2x+m\neq 0$, *то парабола расположена*____________________ ***Решение:***

Вывод:	

При каких значениях параметра ***а*** уравнение $\boldsymbol{x^3 - x^2+ax=0}$ имеет ровно два корня? Для каждого найденного значения параметра ***а*** укажите соответствующие ему два корня уравнения.
Вспоминаем, рассуждаем, исследуем… • *Пусть а=0, тогда*_______________ • *Выражение* $\boldsymbol{x^3 - x^2+ax}$ *содержит общий множитель*_______ • *Квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант D*_______________ *ИЛИ* • *Квадратное уравнение ax2+bx+c=0 имеет единственное решение, если выражение в левой части – квадрат суммы или разности.*
Решение:

Приведем заполненный вариант такой карты:

Задачи с параметрами ***Исследовательская работа “Количество корней уравнений, сводимых к квадратным”***
При каком значении параметра ***а*** уравнение $\frac{x^2+2x+a}{x-2}=0$ имеет единственное решение? При каком значении параметра ***с*** уравнение $\frac{(1-c)x^2-6x+2}{x^2-x-6}=0$ имеет единственное решение?
Вспоминаем, рассуждаем, исследуем… *Если дано дробно-рациональное уравнение, то сначала необходимо найти <u>область допустимых значений</u>*

Квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант D_=0 ИЛИ Квадратное уравнение ax2+bx+c=0 имеет единственное решение, если выражение в левой части – квадрат суммы или разности. ***Решение:*** 1) $\frac{x^2+2x+a}{x-2}=0$ *x≠2* $x^2+2x+a=0$ *D=1-a=0* *a=1* *Найдем значение корня при a=1:* $x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1\neq 2$ *Ответ: при a=1 уравнение имеет единственное решение x=-1* 2) $\frac{(1-c)x^2-6x+2}{x^2-x-6}=0$ $x^2-x-6=0$ $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-6 \end{cases} \Rightarrow x_1=3, x_2=-2$ *ОДЗ: x≠3, x≠-2* $(1-c)x^2-6x+2=0$ • $1-c=0$, $c=1 \Rightarrow -6x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \in$ *ОДЗ* • $c\neq 1$, $(1-c)x^2-6x+2=0$ $D=9-2(1-c)=7+2c=0 \Rightarrow c=-\frac{7}{2}$ *Найдем корень уравнения при* $c=-\frac{7}{2}$*:* $9x^2-12x+4=0$ *D=0* $x=\frac{2}{3}\in$ *ОДЗ* *Ответ: при c=1,* $c=-\frac{7}{2}$ *уравнение имеет единственное решение.*
При каком значении параметра ***m*** уравнение $\frac{x^2-4x}{x^2+2x+m}=0$ имеет два решения?

Вспоминаем, рассуждаем, исследуем…

Если дано дробно-рациональное уравнение, то сначала необходимо найти *<u>область допустимых значений</u>*

Графиком функции $y=x^2+2x+m$ *является* *<u>парабола, ветви направлены вверх, $x=-1$ – абсцисса вершины параболы</u>*

Если $x^2+2x+m\neq 0$*, то парабола расположена* *<u>выше оси OX.</u>*

Решение:

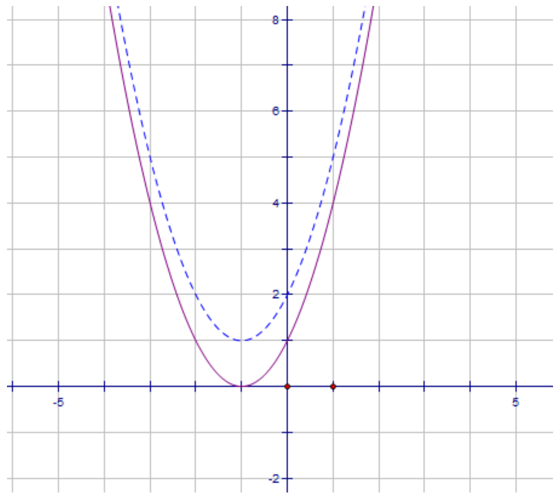
Найдем ОДЗ: $x^2+2x+m\neq 0$

$y=x^2+2x+m$ – парабола. Так как $x^2+2x+m\neq 0$, то парабола расположена выше оси OX $\Rightarrow y_в>0$

$x_в=-1 \Rightarrow y_в=m-1>0 \Rightarrow m>1$

$x^2-4x=x(x-4)=0$

$x_1=0$, $x_2=4$



Вывод: *При m>1 уравнение имеет два корня*

При каких значениях параметра ***a*** уравнение $\boldsymbol{x^3 - x^2 + ax = 0}$ имеет ровно два корня? Для каждого найденного значения параметра ***a*** укажите соответствующие ему два корня уравнения.

Вспоминаем, рассуждаем, исследуем…

Пусть $a=0$*, тогда* <u>$x^3-x^2=0$</u>

Выражение $\boldsymbol{x^3 - x^2 + ax}$ *содержит общий множитель* <u>x</u>

Квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант <u>$D=0$</u> *ИЛИ*

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ *имеет единственное решение, если выражение в левой части – квадрат суммы или разности.*

Решение:

$a=0$, тогда $x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1$

$x(x^2-x+ ax)=0 \Rightarrow x=0$ или $x^2-x+a=0$

Квадратное уравнение имеет один корень, если $D=0$

$D=1-4a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

Найдем корень при $a=\frac{1}{4}$:

$x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Ответ: При $a=0$, $a=\frac{1}{4}$ *уравнение имеет два корня.*

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Горбачев В.И. Элементы теории и общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами : учебное пособие / В.И. Горбачев. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 263 с. – ISBN 978-5-16-107747-4. - URL: http://znanium.com/catalog/product/1022625 (дата обращения: 07.11.2019). – Текст : электронный.

2. Ларин, С. В. Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде geogebra : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. —Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 233 с. ISBN 978-5-534-08929-5. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/441296 (дата обращения 07.11.2019). – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи : учебное пособие / А.И. Козко, В.С. Панфёров, И.Н. Сергеев, В.Г. Чирский. — Москва : МЦНМО, 2016. — 229 с. — ISBN 978-5-4439-3000-8. - URL: https://e.lanbook.com/book/71860 (дата обращения: 06.11.2019). — Текст : электронный.

2. Кожухов С.К. Уравнения и неравенства с параметром: учебно-методическое пособие для учителей математики, студентов математических специальностей педагогических вузов, абитуриентов / С.К. Кожухов. – Орел, 2013. – 70 с. — URL: http://alexlarin.net/ege/2015/skk.html (дата обращения 07.11.2019). – Текст : электронный.

3. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер. - Москва : Юрайт, 2019. - 460 с. – ISBN 978-5-534-09597-5. – URL: https://www.biblio-online.ru/viewer/metodika-obucheniya-matematike-poiskovo-issledovatelskaya-deyatelnost-uchaschihsya-434657#page/2 (дата обращения 07.11.2019). – Текст: электронный.

Электронные ресурсы

1. Дистанционное образование в МГУ : интернет-портал Московского государственного университета. - Москва, 1997 - 2019. – URL: http://www.msu.ru/study/dist-learn.html (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

1. Открытый класс. Коллекция ЦОР : сетевые образовательные сообщества. – [Б. м.], 2008–2019. – URL: http://www.openclass.ru, (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

2. ПЕДСОВЕТ.ORG : медиатека, включающая ЦОР и методические разработки. – [Б. м.], 2012-2019. – URL: http://pedsovet.org/ (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

3. Российский образовательный портал. Коллекция ЦОР – [Б. м.], 2015-2019. - URL: http://www.school.edu.ru, (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

4. Сеть творческих учителей. Библиотека методик проведения уроков и готовых учебных проектов : портал. – [Б. м.], 2007-2015. – URL: http://it-n.ru.ourssite.com (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов / ФЦИОР. – Москва, 2015-2019. – URL: http://fcior.edu.ru/ (дата обращения: 30.09.2019). – Текст : электронный.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Общероссийский математический портал (информационная система) - http://www.mathnet.ru/
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - http://www.window.edu.ru.