Подписано электронной подписью:
Вержицкий Данил Григорьевич
Должность: Директор КГПИ ФГБОУ ВО «КемГУ»
Дата и время: 2024-02-21 00:00:00
471086fad29a3b30e244c728abc3661ab35c9d50210dcf0e75e03a5b6fdf6436

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Кемеровский государственный университет»

Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики

Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.В. Решетникова

Теория R-функций

Методические указания к выполнению лабораторных работ для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий»

Новокузнецк

2020

УДК [378.147.88:517.95](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.161.6я73
Р47

Решетникова Е.В.

Р 47 Теория R-функций: Методические указания к выполнению лабораторных работ для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» / Е.В. Решетникова; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 74 с.

Методические указания содержат индивидуальные задания для лабораторных работ и указания к их выполнению; список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для наиболее рациональной организации аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов.

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 7 от 21.02.2020

Заведующий каф. МФММ
_____ / Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 7 от 12.03.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ
_____ / Г.Н. Бойченко

УДК [378.147.88:517.95](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.161.6я73
Р47

© Решетникова Елена Васильевна
© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кемеровский государственный университет», Новокузнецкий институт (филиал), 2020

Текст представлен в авторской редакции

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ 6
1 Системы R-функций. Свойства систем 8
1.1. Лабораторная работа № 1 «Построение R-предикатов простейших чертежей. Построение линий уровня R-предикатов» 8
1.1.1 Задание к лабораторной работе №1 8
1.1.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 1 11
1.1.3 Содержание отчета и контрольные вопросы по лабораторной работе № 1 13
1.2 Лабораторная работа № 2 «Преобразования *R*-функций средствами компьютерной аналитики» 15
1.2.1 Задание к лабораторной работе №2 15
1.2.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 2 19
1.2.3 Содержание отчета и контрольные вопросы по лабораторной работе № 2 21
1.3 Лабораторная работа № 3 «Построение непрерывно дифференцируемых *R*-предикатов» 24
1.3.1 Задание к лабораторной работе №3 24
1.3.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 3 25
1.3.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 3 28
2. Уравнение чертежа 30
2.1. Лабораторная работа № 4 «Построение R-предикатов с использованием частичных булевых функций» 30
2.1.1 Задание к лабораторной работе №4 30
2.1.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 4 32
2.1.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 4 35

2.2. Лабораторная работа № 5 «Нормальные уравнения чертежей. Определение расстояний от точки до чертежа.» 36
2.2.1 Задание к лабораторной работе №5 36
2.2.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 5 38
2.2.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 5 41
2.3. Лабораторная работа № 6 «Нормализованные уравнения чертежей». 44
2.3.1 Задание к лабораторной работе №6 44
2.3.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 6 44
2.3.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 6 46
2.4. Лабораторная работа № 7 «Использование свойств симметрии при построении уравнений чертежей» 47
2.4.1 Задание к лабораторной работе №7 47
2.4.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 7 51
2.4.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 7 57
3 Пучки функций. Структурный метод решения краевых задач 58
3.1. Лабораторная работа № 8 «Продолжение внутрь области граничных значений» 58
3.1.1 Задание к лабораторной работе №8 58
3.1.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 8 62
3.1.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 8 65
3.2. Лабораторная работа № 9 «Решение краевых задач» 66
3.2.1 Задание к лабораторной работе №9 66
3.2.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 9 69

3.2.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 9 71
4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА..... 73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания адресованы студентам, получающим квалификацию бакалавр по направлениям подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии» и 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, профиль «Программное и математическое обеспечение информационных технологий» и направлены на оказание помощи студентам в выполнении лабораторных работ по дисциплинам «Теория R-функций» и «Применение R-функций в конструкторской деятельности».

Теория R-функций возникла в 70-е годы XX века усилиями авторского коллектива под руководством советского математика В.Л. Рвачёва, которому принадлежат основополагающие результаты.

В рамках этой теории разработаны методы аналитического представления сложных по форме геометрических фигур, что стало возможным на основе объединения и развития методов теории множеств, алгебры и аналитической геометрии. Теория R-функций послужила основой для решения краевых задач уравнений математической физики в случае областей сложной геометрической формы. Это дало возможность решать многочисленные прикладные задачи расчета реальных технических объектов. Особенностью методов, разработанных В.Л. Рвачёвым и его учениками, является возможность точного выполнения граничных условий. Кроме этого, теория R-функций успешно применяется в задачах геометрического проектирования и оптимизации формы.

Таким образом, данные методические материалы позволяют студенту подготовиться к лабораторным занятиям по соответствующим темам и успешно выполнить индивидуальные лабораторные задания. Методические

указания могут оказаться полезными при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

1 Системы R-функций. Свойства систем

1.1. Лабораторная работа № 1 «Построение R-предикатов простейших чертежей. Построение линий уровня R-предикатов»

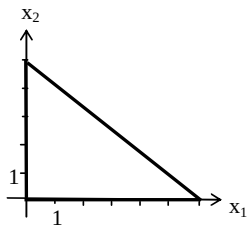
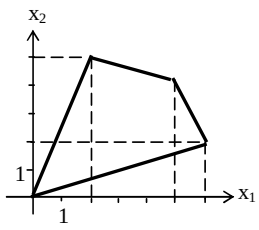
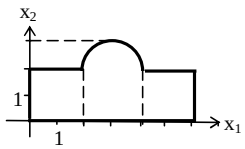
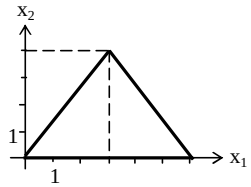
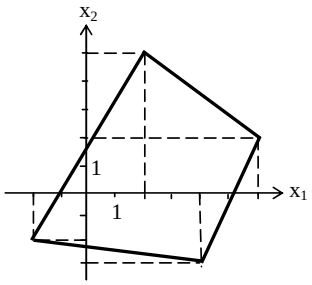
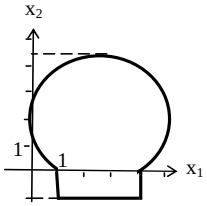
1.1.1 Задание к лабораторной работе №1

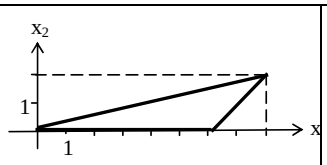
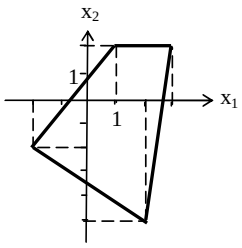
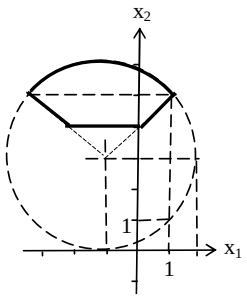
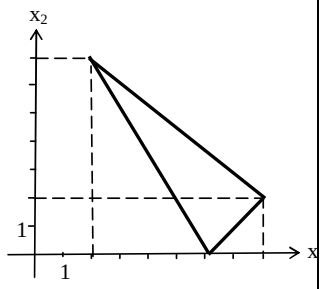
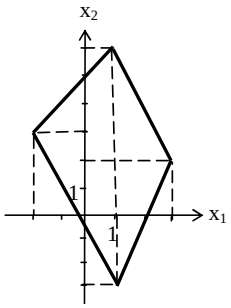
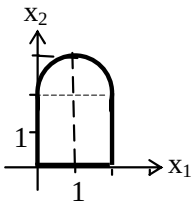
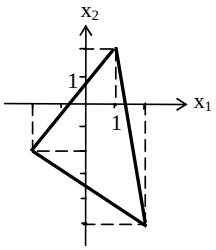
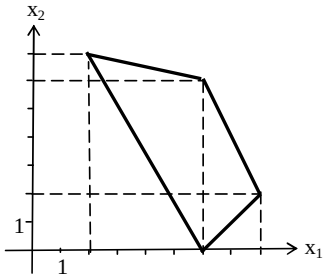
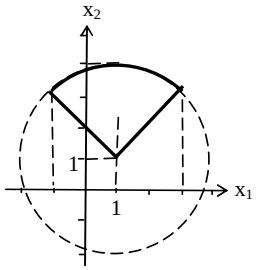
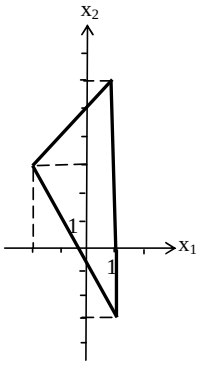
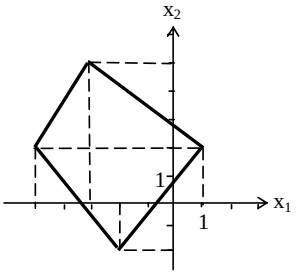
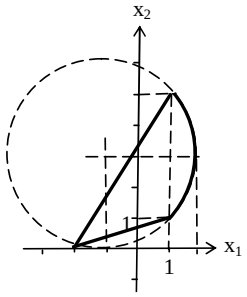
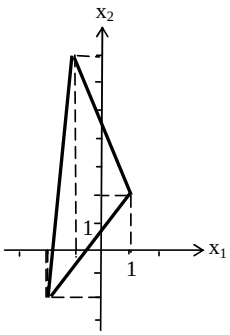
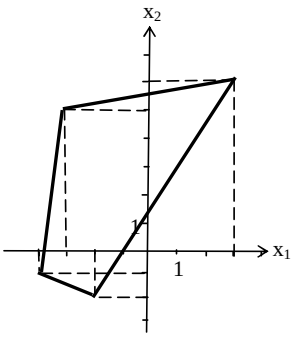
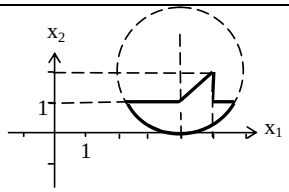
Задание 1. В соответствии с заданным вариантом (см. таблицу 1) выделить опорные области и используя операции алгебры множеств задать области, изображенные на чертежах.

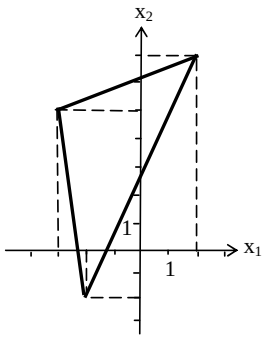
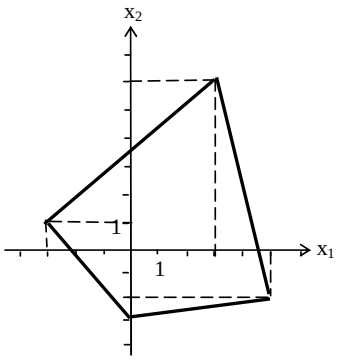
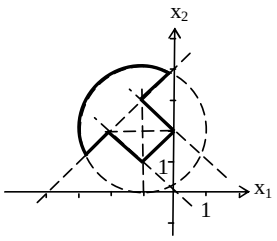
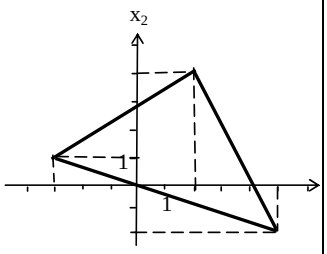
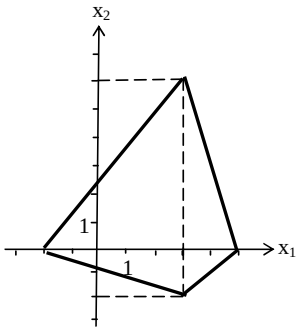
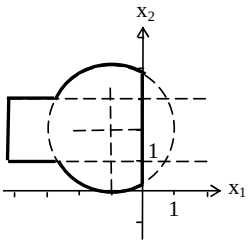
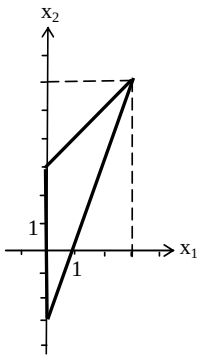
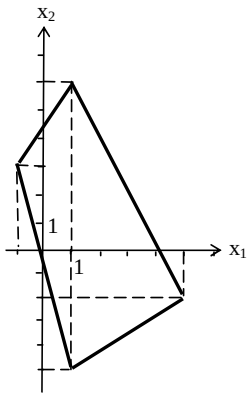
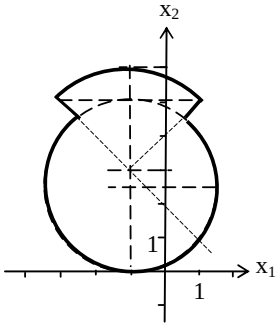
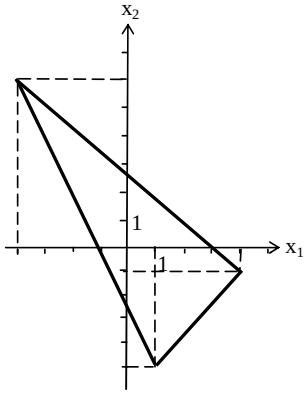
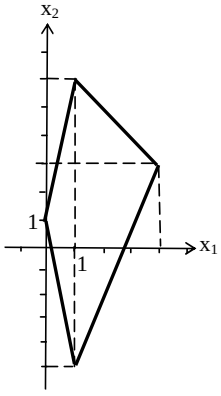
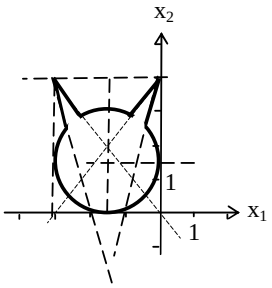
Задание 2. Записать булев предикат для каждой опорной области, полученной в задании 1 и построить булевы предикаты всех чертежей в соответствии с заданным вариантом (см. таблицу 1).

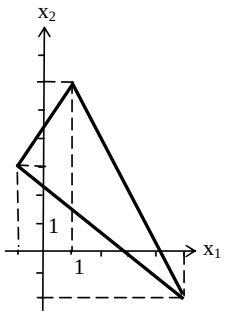
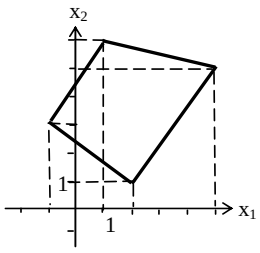
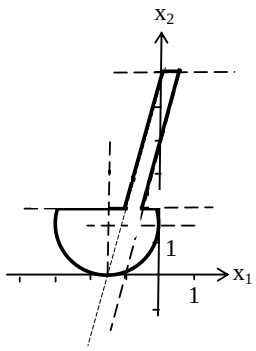
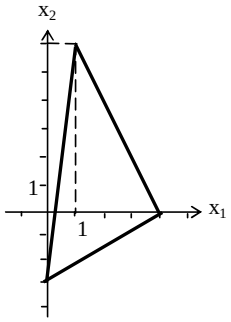
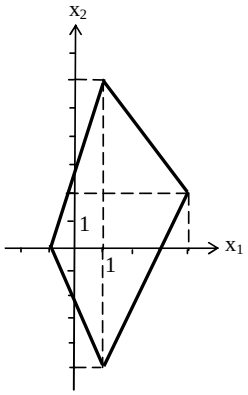
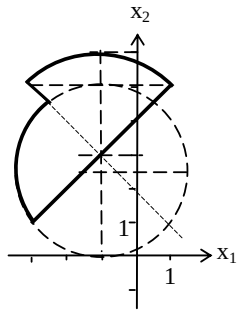
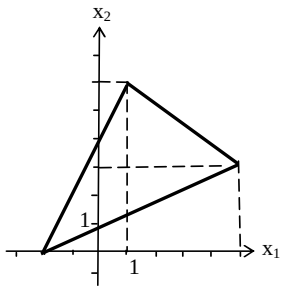
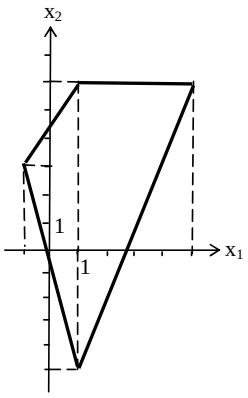
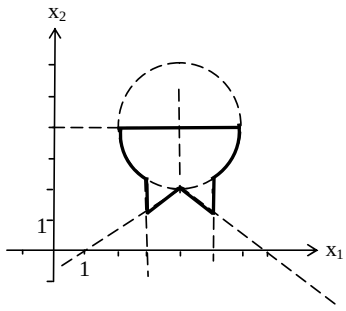
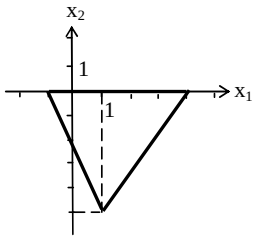
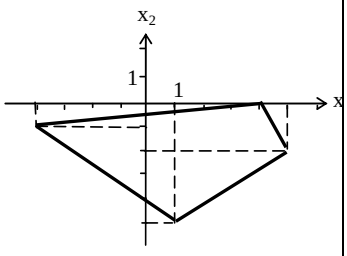
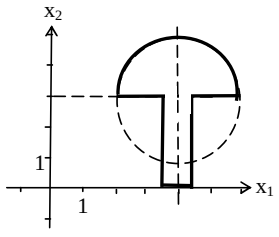
Задание 3. В среде пакета Mathcad задать R-предикаты чертежей в соответствии с заданным вариантом (см. таблицу 1) в системе R_0. Построить графики R-предикатов и их нулевую линию уровня.

Таблица 1 – Индивидуальные задания по вариантам к лабораторной работе №1

№ Варианта	Чертежи для выполнения индивидуальных заданий		
1.			
2.			

3.	x2 1 1 x	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1
4.	x2 1 1 x	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1
5.	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1
6.	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1
7.	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1	x2 1 1 x1

8.	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1
9.	x2 1 1	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1
10.	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1
11.	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1	x2 x1 1 1

12.			
13.			
14.			
15.			

1.1.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 1

Построим R-предикат области Ω, изображенной на рисунке 1.

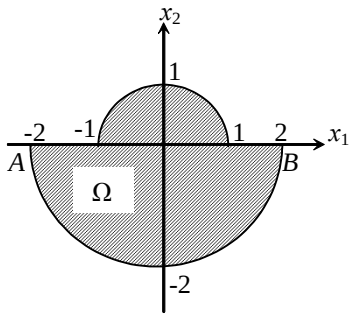


Рисунок 1

Задание 1. Разобьем Ω на следующие опорные области:

Ω_1 – круг радиуса два с центром в начале координат;

Ω_2 – круг радиуса один с центром в начале координат;

Ω_3 – верхняя полуплоскость.

Построим область Ω с помощью операций над множествами из опорных областей Ω_1, Ω_2 и Ω_3:

$$\Omega = \Omega_1 \cap \left(\Omega_2 \cup \overline{\Omega_3}\right).$$

Задание 2. Запишем булевы предикаты опорных областей:

Ω_1: $S_1 \equiv \left(4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\right)$;

Ω_2: $S_2 \equiv \left(1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\right)$;

Ω_3: $S_3 \equiv \left(x_2 \geq 0\right)$,

тогда булев предикат области Ω: $S = S_1 \wedge \left(S_2 \vee \overline{S_3}\right)$.

Задание 3. Используя, систему R-функций $R_{\square}$, построим R-предикат области Ω. Построение графика проведем в среде пакета MathCAD.

Зададим R-предикаты опорных областей:

$$S1(x1, x2) := 4 - x1^2 - x2^2;$$

$$S2(x1, x2) := 1 - x1^2 - x2^2;$$

$$S3(x1, x2) := x2.$$

Используя основные функции, системы R_0:

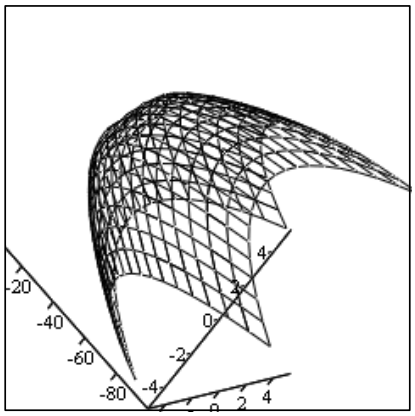
$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ и $x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$,

зададим *R*-предикат области **Ω**:

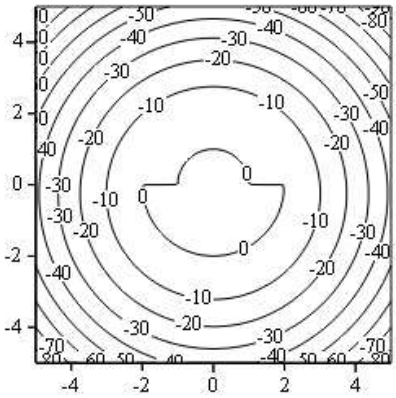
$$f0(x1, x2) := S1(x1, x2) + \left(S2(x1, x2) + \left(-S3(x1, x2)\right) + \sqrt{\left(S2(x1, x2)\right)^2 + \left(-S3(x1, x2)\right)^2} \right) -$$

$$- \sqrt{\left(S1(x1, x2)\right)^2 + \left(S2(x1, x2) + \left(-S3(x1, x2)\right) + \sqrt{\left(S2(x1, x2)\right)^2 + \left(-S3(x1, x2)\right)^2} \right)^2}.$$

На рисунке 2 изображены график построенного *R*-предиката (рисунок 2а) и его линии уровня (рисунок 2б).



а) f0



б) f0

Рисунок 2 – *R*-предикат области с рисунка 1

а) график поверхности; б) линии уровня предиката

1.1.3 Содержание отчета и контрольные вопросы по лабораторной работе № 1

Отчет по лабораторной работе №1 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Основная часть по заданию 3.
- Выводы.

Основная часть по заданию 1 должна содержать

1) Описание опорных областей. Для удобного описания областей рекомендуется обозначить заглавными латинскими буквами угловые точки чертежей. Описание опорных областей формулировать как, например,

- «нижняя полуплоскость относительно прямой *AB*»;

- «круг радиуса *R*»;

- «прямоугольник *ABCD*»;

и т.п.

2) Формулы теории множеств, задающие области внутри чертежей из индивидуального задания.

Основная часть по заданию 2 должна содержать

1) Булевы предикаты опорных областей, записанные в виде неравенств типа: $S(x, y) = [\omega(x, y) \geq 0]$.

2) Булевы предикаты чертежа из индивидуального задания.

Основная часть по заданию 3 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать

1) *R*-предикаты опорных областей.

2) *R*-предикат чертежей из индивидуальных заданий.

3) Графики поверхностей, соответствующих построенным *R*-предикатам.

4) Графики линий нулевого уровня для каждой поверхности.

В выводах по работе необходимо привести сравнение заданных чертежей и чертежей, построенных в среде пакета Mathcad. Сравнение рекомендуется проводить с использованием координат угловых точек чертежей из таблицы 1 (в соответствии с вариантом) и угловых точек нулевых линий уровня на графиках.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. В чем отличие прямой и обратной задач аналитической геометрии?

2. Как построить булев предикат заданной области?

3. Дайте определение *R*-функции (*R*-отображения), используя знак функции.

4. Какая булева функция называется сопровождающей для данного R-отображения?

5. Дайте определение *R*-функции (*R*-отображения), используя диаграмму.

6. Запишите *R*-предикаты основных систем *R*-функций.

7. Как восстановить *R*-функцию, если известна таблица истинности сопровождающей функции?

1.2 Лабораторная работа № 2 «Преобразования *R*-функций средствами компьютерной аналитики»

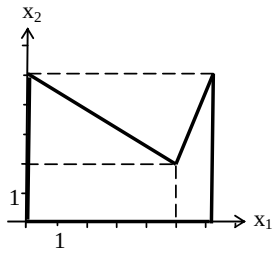
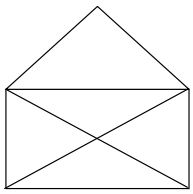
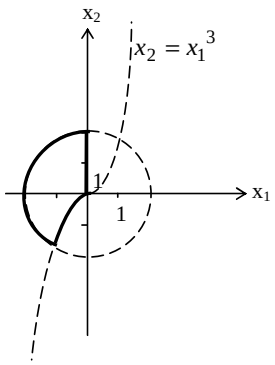
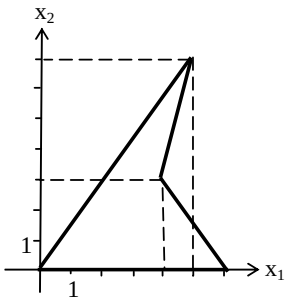
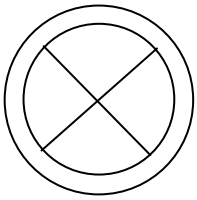
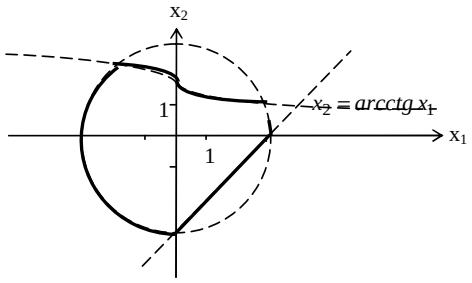
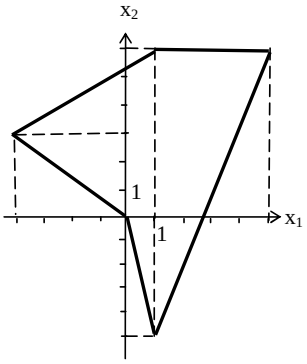
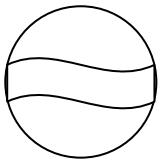
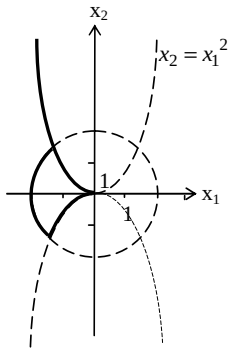
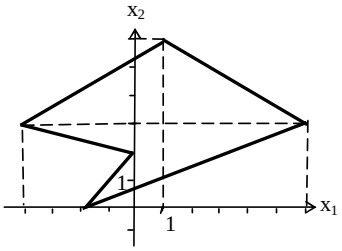
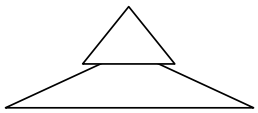
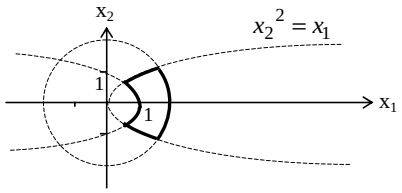
1.2.1 Задание к лабораторной работе №2

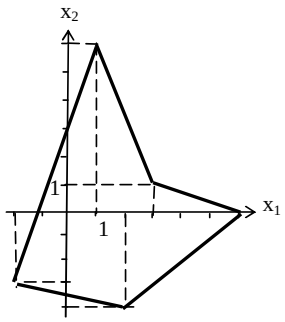
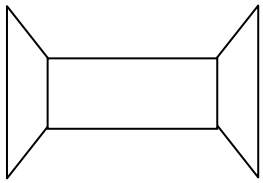
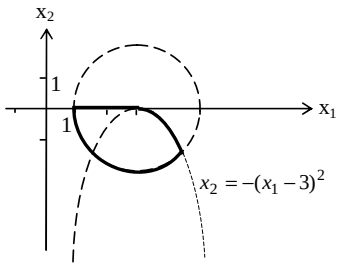
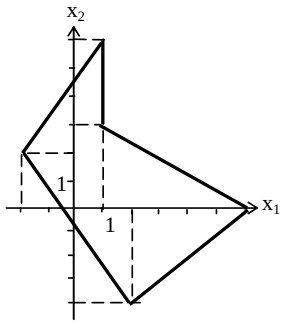
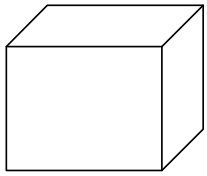
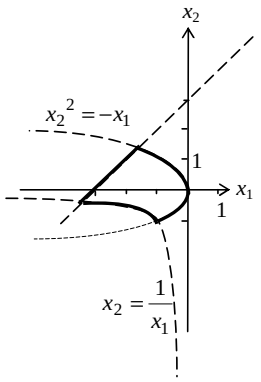
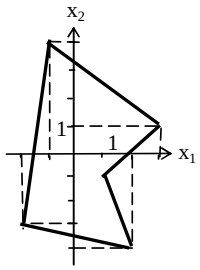
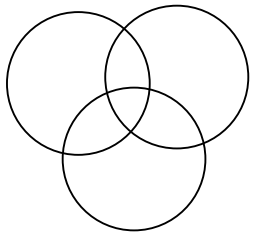
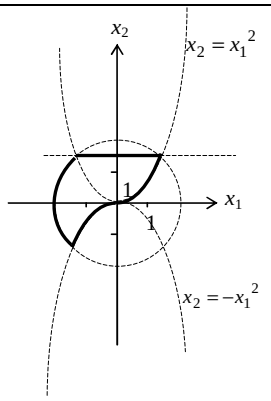
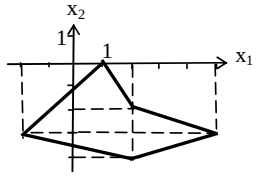
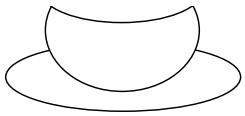
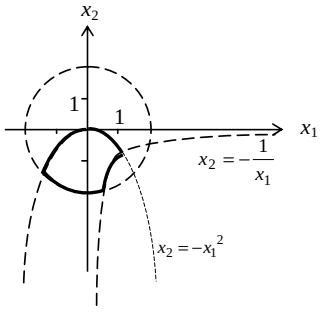
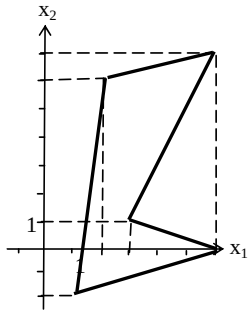
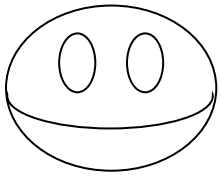
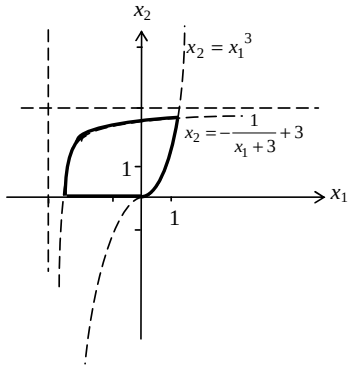
Задание 1. В соответствии с заданным вариантом (см. таблицу 2) построить булевы предикаты чертежей.

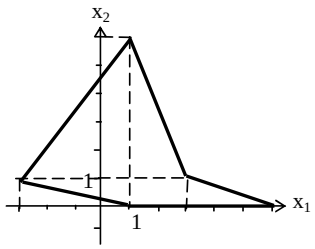
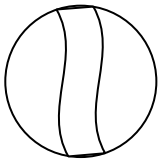
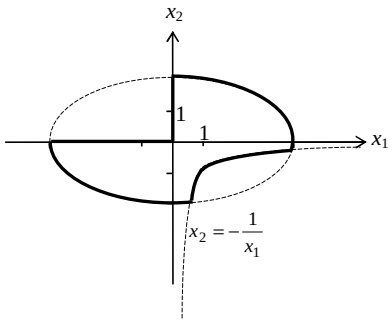
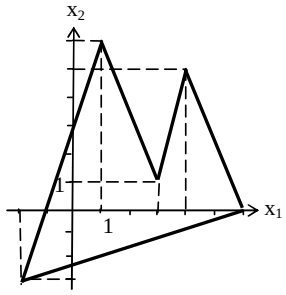
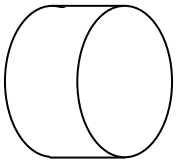
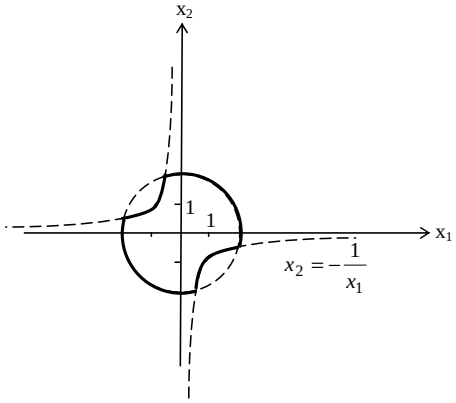
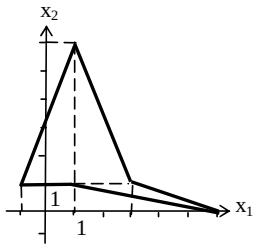
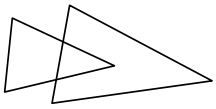
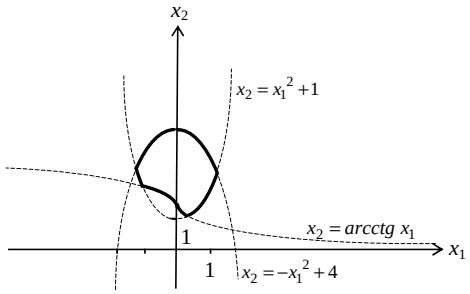
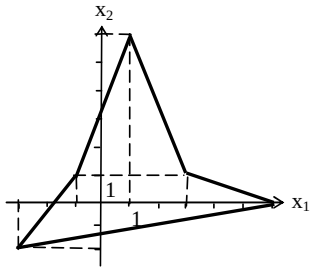
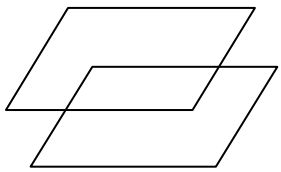
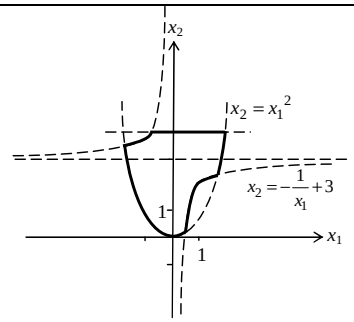
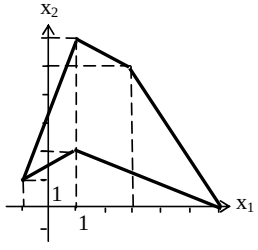
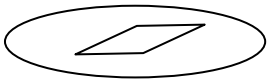
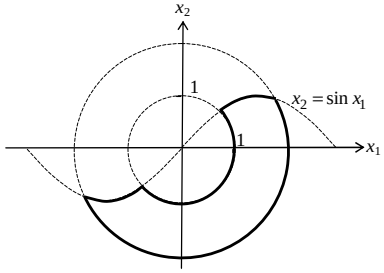
Задание 2. В среде пакета Mathcad задать *R*-предикаты функций (*R*-отрицание, *R*-конъюнкцию и *R*-дизъюнкцию) основных систем R_0, R_1, R_0^m. Задать уравнения чертежей в соответствии с заданным вариантом (см. таблицу 2) в системах R_0, R_1, R_0^m, как суперпозиции функций этих систем. Построить графики *R*-предикатов и их нулевую линию уровня. Проанализировать различия предикатов одного и того же чертежа, построенных в разных системах *R*-функций.

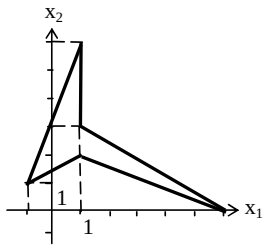
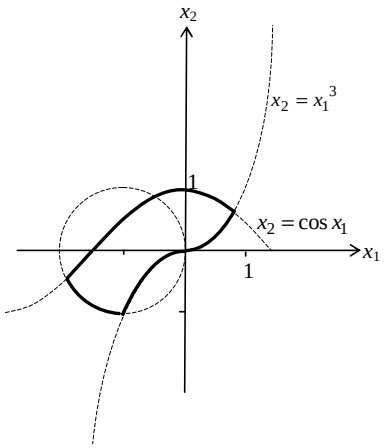
Задание 3. Придумать собственный рисунок и построить его чертеж в среде пакета Mathcad. (Например, первая буква Вашего имени или фамилии).

Таблица 2 - Индивидуальные задания по вариантам к лабораторной работе №2

№ Варианта	Чертежи для выполнения индивидуальных заданий		
1.			
2.			
3.			
4.			

5.	x2 x1 1 1		x2 x1 1 1 $x_2 = -(x_1 - 3)^2$
6.	x2 x1 1 1		x_2 $x_2^2 = -x_1$ 1 x_1 1 $x_2 = \frac{1}{x_1}$
7.	x2 x1 1 1		x_2 $x_2 = x_1^2$ 1 x_1 1 $x_2 = -x_1^2$
8.	x2 x1 1 1		x_2 1 1 x_1 $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ $x_2 = -x_1^2$
9.	x2 x1 1		x_2 $x_2 = x_1^3$ $x_2 = -\frac{1}{x_1 + 3} + 3$ 1 x_1 1

10.	x2 x1 1 1		x2 x1 1 1 x2 = −1/x1
11.	x2 x1 1 1		x2 x1 1 1 x2 = −1/x1
12.	x2 x1 1 1		x2 x2 = x1² +1 x2 = arcctg x1 x1 1 1 x2 = −x1² +4
13.	x2 x1 1 1		x2 x2 = x1² x2 = −1/x1 +3 x1 1 1
14.	x2 x1 1 1		x2 x2 = sin x1 x1 1 1

15.			

1.2.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 2

Построим *R*-предикат области Ω, изображенной на рисунке 3.

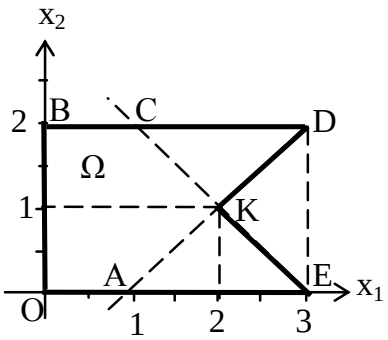


Рисунок 3 – Чертеж для построения R-предиката

Задание 1.

1) Разобьем область Ω на следующие опорные области:

Ω_1 – четырехугольник *AOBD*;

Ω_2 – четырехугольник *BCEO*;

Построим область Ω с помощью операций над множествами из опорных областей Ω_1 и Ω_2: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

2) Составим булевы предикаты опорных областей:

$S_1 \equiv \left(x_1 \wedge x_2 \wedge (2 - x_2) \wedge (x_2 - x_1 + 1) \geq 0\right)$;

$S_2 \equiv \left(x_1 \wedge x_2 \wedge (2 - x_2) \wedge (-x_2 - x_1 + 3) \geq 0\right)$.

Булев предикат области Ω: $S = S_1 \vee S_2$.

Задание 2. В среде пакета Mathcad зададим основные функции системы R_α:

$$K(x,y,\alpha) := \frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha}\right)$$

$$D(x,y,\alpha) := \frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha}\right)$$

и R-предикаты опорных областей:

$$w1(x1,x2) := x1$$

$$w2(x1,x2) := x2$$

$$w3(x1,x2) := 2-x2$$

$$w4(x1,x2) := -x1+x2+1$$

$$w5(x1,x2) := -x1-x2+3.$$

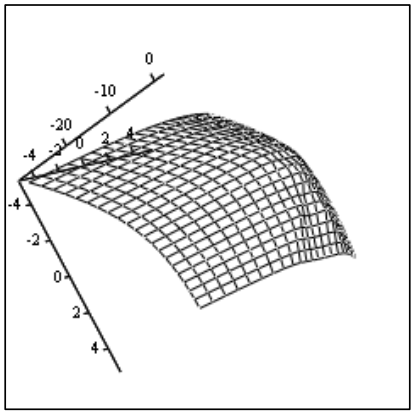
Тогда *R*-предикат области Ω в системе R_0 задается как:

$$f0(x1,x2) := D(K(K(K(w1(x1,x2),w2(x1,x2),0),w3(x1,x2),0),w4(x1,x2),0),$$
$$K(K(K(w1(x1,x2),w2(x1,x2),0),w3(x1,x2),0),w5(x1,x2),0),0),$$

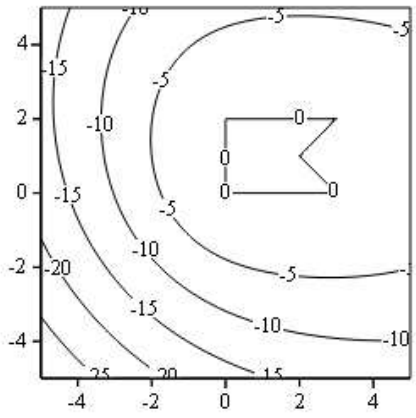
а в системе R_1:

$$f1(x1,x2) := D(K(K(K(w1(x1,x2),w2(x1,x2),1),w3(x1,x2),1),w4(x1,x2),1),$$
$$K(K(K(w1(x1,x2),w2(x1,x2),1),w3(x1,x2),1),w5(x1,x2),1),1),$$

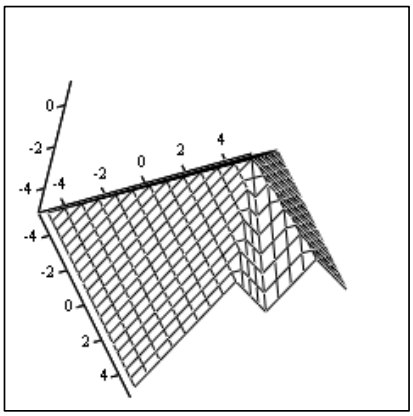
Графики построенных *R*-предикатов и их линии уровня изображены на рисунке 4.



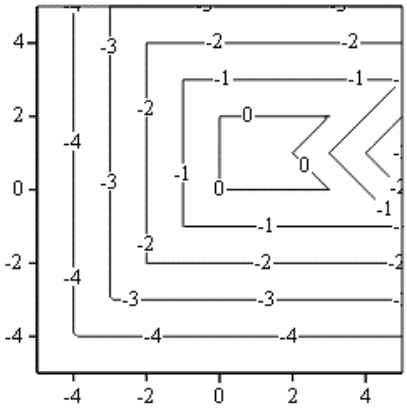
а) f0



б) f0



в) f1



г) f1

Рисунок 4 – *R*-предикаты области с рисунка 3 и их линии уровня в разных системах *R*-функций – в системе R_0 (а,б) и в системе R_1 (в,г)

1.2.3 Содержание отчета и контрольные вопросы по лабораторной работе № 2

Отчет по лабораторной работе №2 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Основная часть по заданию 3.
- Выводы.

Основная часть по заданию 1 должна содержать

1) Описание опорных областей.

Замечание: чертежи, не помещенные в систему координат, для оцифровки необходимо расположить в декартовой системе координат, выбрав ее начало и масштаб, ориентируясь на простоту составления предикатов опорных областей.

2) Формулы теории множеств, задающие области внутри чертежей из индивидуального задания.

3) Булевы предикаты опорных областей, записанные в виде неравенств типа: $S(x, y) = [\omega(x, y) \geq 0]$.

4) Булевы предикаты чертежей из индивидуального задания.

Замечание: при построении предикатов чертежей иногда не требуется предварительно воспользоваться формулами теории множеств (например, для отсечения части прямой областью). В этом случае можно сразу задавать R-предикат основного чертежа минуя пункты 2) и 4) задания 1.

Основная часть по заданию 2 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать

1) *R*-предикаты функций (*R*-отрицание, *R*-конъюнкцию и *R*-дизъюнкцию) основных систем R_0, R_1, ${R_0}^m$.

2) *R*-предикаты опорных областей.

3) *R*-предикат чертежей из индивидуальных заданий в системах R_0, R_1, ${R_0}^m$.

4) Графики поверхностей, соответствующих построенным *R*-предикатам.

5) Графики линий нулевого уровня для каждой поверхности.

6) Анализ различий предикатов одного и того же чертежа, построенных в разных системах *R*-функций.

Замечание: При построении *R*-предикатов чертежей из опорных областей обратите внимание на алгебро-логические свойства *R*-конъюнкции и *R*-

дизъюнкции, а именно в каких случаях эти функции равны 0, а значит задают границу чертежа.

Основная часть по заданию 3 должна содержать

1) Чертеж, выбранный для построения R-предиката, расположенный в декартовой системе координат.

2) Описание опорных областей.

3) Формулу теории множеств, задающую область внутри чертежа.

4) Булевы предикаты опорных областей.

5) Булев предикат чертежа.

6) Программа в среде пакета Mathcad, содержащая

6.1) *R*-предикаты опорных областей и *R*-предикат чертежа (систему *R*-функций выбрать по своему усмотрению).

6.2) График поверхности и линии нулевого уровня, соответствующие построенному *R*-предикату.

В выводах по работе необходимо привести сравнение *R*-предикатов чертежей, построенных в среде пакета Mathcad. Сравнить свойства полученных поверхностей и линий уровня.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Какие логические свойства булевых функций выполняются также и для R -функций основных систем?

2. Какие новые алгебро-логические свойства появляются у *R*-функций основных систем по сравнению с булевыми функциями?

3. Сформулируйте условия, при которых *R*-конъюнкция равна 0 (то есть задает границу чертежа).

4. Сформулируйте условия, при которых *R*-дизъюнкция равна 0 (то есть задает границу чертежа).

5. Какие недостатки свойственны *R*-функциям основных систем?

6. В каких случаях уравнения чертежей называются непрерывным, дифференцируемым, аналитическим?

7. Какие чертежи называются полуалгебраическими?

8. Как заменить систему неравенств одним неравенством?

9. Как заменить систему уравнений одним уравнением?

10. Как записать уравнение чертежа заданное системой неравенств и уравнений?

11. Как записать уравнение чертежа, состоящего из системы чертежей?

12. Как записать уравнение части чертежа, выделенной некоторой областью?

1.3 Лабораторная работа № 3 «Построение непрерывно дифференцируемых *R*-предикатов»

1.3.1 Задание к лабораторной работе №3

Задание 1. В среде пакета Mathcad найти производные по направлению нормали к границам чертежей из таблиц 1,2 (см. лабораторные работы №1 и №2) в соответствии с заданным вариантом. построить графики полученных производных в точках границы.

Задание 2. Исследовать возможность применения теорем о первой производной *R*-конъюнкции и первой производной *R*-дизъюнкции для вычисления производной в точках всех границ заданных чертежей. Указать участки границ, к которым неприменимы теоремы о первой производной, и пояснить причины этого.

Задание 3. В среде пакета Mathcad рассчитать производные по направлению нормали к границам чертежей из таблиц 1,2 (см. лабораторные работы №1 и №2) в соответствии с заданным вариантом, используя теоремы о первой производной *R*-конъюнкции и первой производной *R*-дизъюнкции. Построить графики полученных производных в точках границы и сравнить с

результатами задания 1. Выявить на графиках различия в вычислениях для участков границ, в которых условия теоремы не выполняются.

1.3.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 3

Задание 1. Найдем производные по направлению вектора нормали ν к границам чертежа с рисунка 3.

В лабораторном занятии №2 было получено при помощи *R*-функций уравнение границы этого чертежа в системе R_0:

$$f0(x1,x2) := D\big(K\big(K\big(K\big(w1\big(x1,x2\big),w2\big(x1,x2\big),0\big),w3\big(x1,x2\big),0\big),w4\big(x1,x2\big),0\big),$$
$$K\big(K\big(K\big(w1\big(x1,x2\big),w2\big(x1,x2\big),0\big),w3\big(x1,x2\big),0\big),w5\big(x1,x2\big),0\big),0\big),\ .$$

Так как производная по направлению вектора нормали ν к границе чертежа $\partial\Omega$ в точках этой границы равна модулю вектора-градиента:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \left|\nabla f\right|\Big|_{\partial\Omega},$$

то для выполнения задания найдем длину вектора-градиента:

$$\left|\nabla f0(x1,x2)\right|.$$

В среде пакета MathCAD зададим компоненты вектора $\nabla f0(x1,x2)$ – частные производные $\frac{\partial f0(x1,x2)}{\partial x1}$ и $\frac{\partial f0(x1,x2)}{\partial x2}$:

$$d1(x1,x2) := \frac{d}{dx1} f0(x1,x2),$$

$$d2(x1,x2) := \frac{d}{dx2} f0(x1,x2).$$

Длина вектора-градиента будет рассчитываться по формуле:

$$D0(x1,x2) := \sqrt{\big(d1(x1,x2)\big)^2 + \big(d2(x1,x2)\big)^2}\ . \qquad (1)$$

Для построения производной по направлению вектора нормали к границе чертежа *KE* вместо компоненты $x2$ подставим в формулу (1) ее значение на этой границе $x2 = 3 - x1$.

На рисунке 5 изображена производная по направлению нормали в точках границы *KE*.

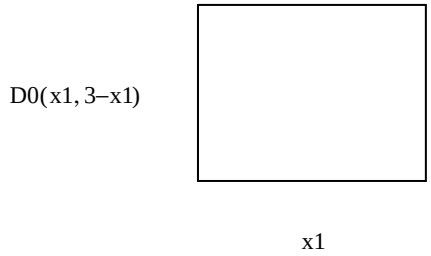


Рисунок 5 – Производная по направлению вектора нормали в точках границы *KE*

Для построения производной по направлению вектора нормали к границе чертежа *OE* вместо компоненты $x2$ подставим в формулу (1) ее значение на этой границе $x2 = 0$. На рисунке 6 представлен график производной по направлению вектора нормали к границе чертежа *OE* в точках этой границы.

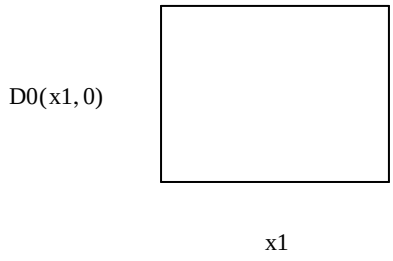


Рисунок 6 – Производная по направлению вектора нормали к границе *OE*

Задание 2. Исследуем возможность применения теорем о первой производной R-дизъюнкции и первой производной *R*-конъюнкции для вычисления производных на границах чертежа *KE* и *OE*.

Область получена объединением опорных четырехугольников: *AOBD* и *BCEO*. В точках границы *KE* *R*-предикат, задающий четырехугольник *BCEO* равен 0, а *R*-предикат, задающий четырехугольник *AOBD* отрицателен, следовательно на границе *KE* условия теоремы о первой производной *R*-

дизъюнкции выполняются. Следовательно, можно заменить вычисление производной от *R*-предиката всего чертежа на вычисление производной от *R*-предиката четырехугольника *BCEO*. Аналогично рассуждая, убеждаемся в выполнении условий теоремы о первой производной R-конъюнкции для границы *KE* четырехугольника *BCEO*.

Рассмотрим условия теоремы о производной *R*-дизъюнкции применительно к точкам границы *OE*. Для точек отрезка *AE*, составляющего часть границы *OE* условия теоремы выполняются, но для второй части границы *OE* – точек отрезка *OA* условия теоремы нарушены, так как оба *R*-предиката в этих точках обращаются в 0.

Задание 3. Как показали исследования, проведенные в задании 2, условия теорем о первой производной *R*-дизъюнкции и первой производной *R*-конъюнкции выполняются на границе *KE*. Следовательно, нормальную производную на границе *KE* можно вычислить, используя только *R*-предикат самой границы:

$$w5(x1, x2) := -x1 - x2 + 3;$$

$$d11(x1, x2) := \frac{d}{dx1} w5(x1, x2),\ d21(x1, x2) := \frac{d}{dx2} w5(x1, x2).$$

Длина вектора градиента будет рассчитываться по формуле:

$$D3(x1, x2) := \sqrt{\left(d11(x1, x2)\right)^2 + \left(d21(x1, x2)\right)^2}.$$

На рисунке 7 представлена производная по направлению нормали в точках границы чертежа *KE*, полученная с использованием теорем.

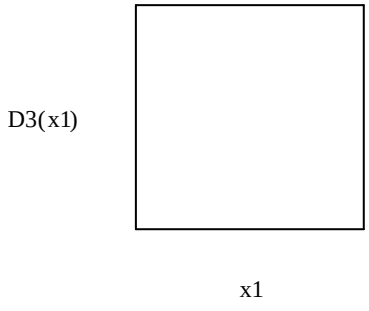


Рисунок 7 – Производная по направлению вектора нормали к границе *KE*, полученная с использованием теорем о первой производной *R*-дизъюнкции и *R*-конъюнкции

Сравнение рисунков 5 и 7 подтверждает правильность применения теорем.

Согласно исследованиям, проведенным в задании 2 для точек отрезка *AE*, составляющего часть границы *OE* условия теоремы выполняются, но для второй части границы *OE* – точек отрезка *OA* условия теоремы нарушены. Поэтому попытка применить теорему к вычислению производной на границе *OE* приводит к неверным вычислениям производной на части граница – в точках отрезка *OA*, что можно наблюдать на рисунке 8.

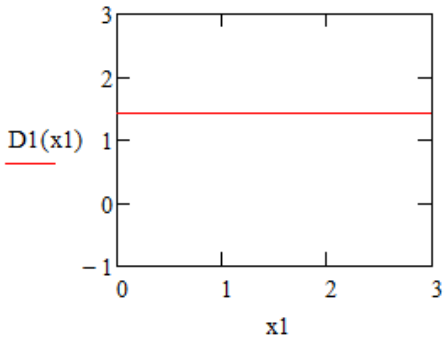


Рисунок 8 – Производная по направлению вектора нормали к границе *OE*, полученная с использованием теорем о первой производной *R*-дизъюнкции и *R*-конъюнкции

1.3.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 3

Отчет по лабораторной работе №3 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Основная часть по заданию 3.

- Выводы.

Основная часть по заданию 1 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

1) *R*-предикаты функций (*R*-отрицание, *R*-конъюнкцию и *R*-дизъюнкцию) одной из основных систем R_0, R_1 или R_0^m (на усмотрение студента). *R*-предикаты опорных областей. *R*-предикат чертежей из индивидуальных заданий.

2) Функции, являющиеся производными по нормали к заданным *R*-предикатам.

3) Графики производных в точках каждой из границ заданных чертежей.

Основная часть по заданию 2 должна содержать проверку выполнения условий теорем о первой производной *R*-конъюнкции и первой производной *R*-дизъюнкции для каждой границы заданных чертежей. Необходимо выделить участки границ, на которых условия теорем не выполняются.

Основная часть по заданию 3 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

1) R-предикаты функций (*R*-отрицание, *R*-конъюнкцию и *R*-дизъюнкцию) одной из основных систем R_0, R_1 или R_0^m (на усмотрение студента). *R*-предикаты опорных областей. *R*-предикат чертежей из индивидуальных заданий.

2) Функции, являющиеся производными по нормали к заданным *R*-предикатам, вычисленные с использованием теорем о первой производной R-конъюнкции и первой производной *R*-дизъюнкции.

3) Графики полученных производных в точках каждой из границ заданных чертежей.

В выводах по работе необходимо привести сравнение графиков производных, рассчитанных без применения и с применением теорем о первой производной *R*-конъюнкции и первой производной *R*-дизъюнкции.

Указать участки границ, в точках которых условия терем не выполняются. Пояснить при выполнении какой из операций в формуле R-предиката нарушается условие теоремы и почему.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Сформулируйте и докажите теорему о первой производной R-конъюнкции.

2. Сформулируйте и докажите теорему о производной R-функции с единственным вхождением аргумента.

3. Сформулируйте и докажите лемму о второй производной.

4. Сформулируйте и докажите теорему о второй производной R-конъюнкции.

5. Проверьте условия леммы и теоремы о второй производной для функций из основных систем R_α и R_0^m.

2. Уравнение чертежа

2.1. Лабораторная работа № 4 «Построение R-предикатов с использованием частичных булевых функций»

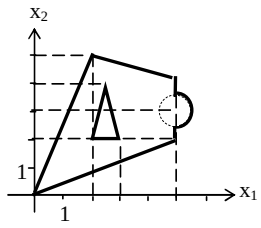
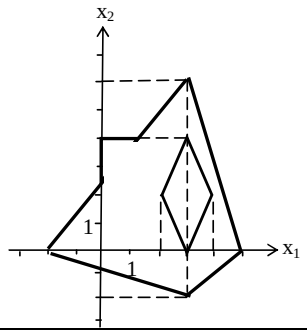
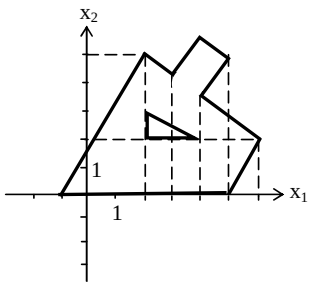
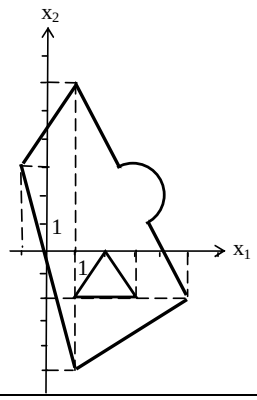
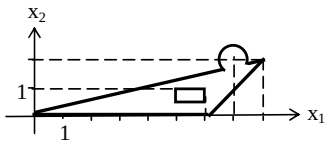
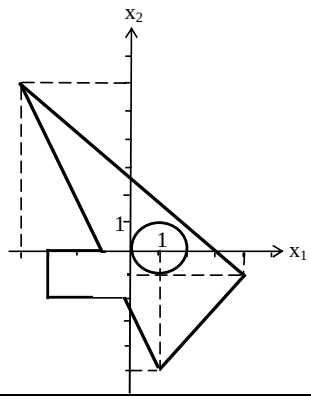
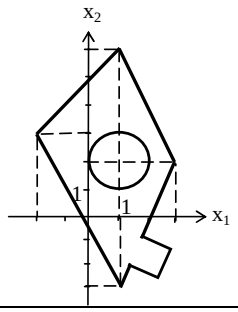
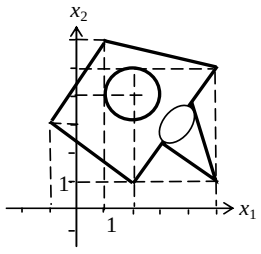
2.1.1 Задание к лабораторной работе №4

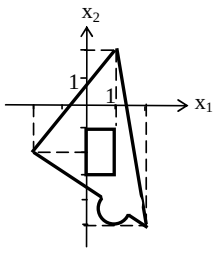
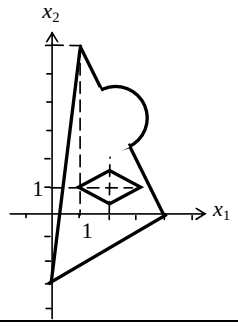
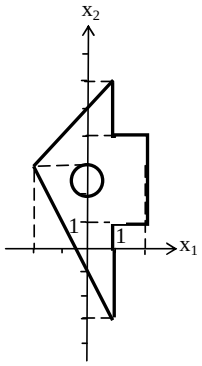
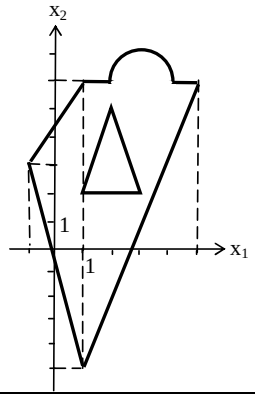
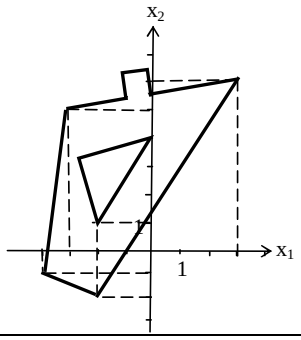
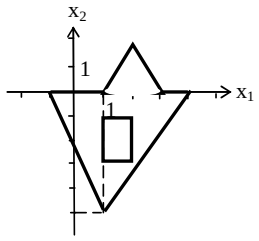
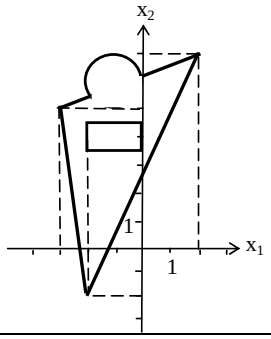
Задание 1. Для заданного чертежа (см. таблицу 3) построить R-функцию.

Задание 2. Найти область, отсутствующую на чертеже и заменить в таблице истинности сопровождающей булевой функции значение на этом наборе аргументов на противоположное. Получить другую R-функцию для оцифровки заданного чертежа.

Задание 3. В среде пакета Mathcad построить графики полученных R-отображений и их линии уровня.

Таблица 3 - Индивидуальные задания по вариантам к лабораторной работе №4

№ Варианта	Чертеж к заданию	№ Варианта	Чертеж к заданию
1.		9.	
2.		10.	
3.		11.	
4.		12.	

5.		13.	
6.		14.	
7.		15.	
8.			

2.1.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 4

Задание 1. В качестве демонстрационного примера использования частичных булевых функций рассмотрим чертеж, изображенный на рисунке 9.

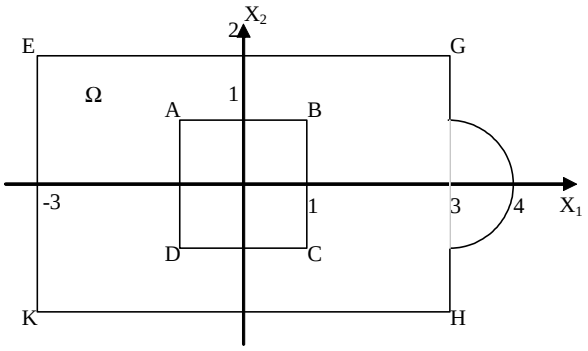


Рисунок 9 – Чертеж для применения частичных булевых функций

Область, изображенная на рисунке 9, представляет собой объединение прямоугольника и полукруга с квадратным вырезом. Зададим булевы предикаты трех опорных областей:

квадрата *ABCD*: $S_1 \equiv ((1-x_1^2) \wedge (1-x_2^2) \geq 0)$,

прямоугольника *EGHK*: $S_2 \equiv ((9-x_1^2) \wedge (4-x_2^2) \geq 0)$,

круга радиуса 1 с центром в точке (3, 0): $S_3 \equiv ((1-(x_1-3)^2-x_2^2) \geq 0)$.

Булев предикат области $S \equiv (\neg S_1 \wedge S_2) \vee S_3$. После замены булевых операций соответствующими *R*-функциями, приравнивая *R*-предикат к нулю, получаем уравнение чертежа с рисунка 9:

$$w = (-w_1 \wedge_0 w_2) \vee_0 w_3 =$$
$$= \left\{-\left[(1-x_1^2) \wedge_0 (1-x_2^2)\right] \wedge_0 \left[(9-x_1^2) \wedge_0 (4-x_2^2)\right]\right\} \vee_0 \left[1-(x_1-3)^2-x_2^2\right] = 0.$$

Задание 2. Заметим, что построенный предикат определен не на всех наборах аргументов. Поскольку внутренность квадрата *ABCD* не имеет общих точек с внешностью прямоугольника *EGHK*, то на этом наборе *R*-предикат может быть определен произвольным образом. Например, при выполнении задание 1 для построения предиката была выбрана конъюнкция $-w_1 \wedge_0 w_2 = -\left[(1-x_1^2) \wedge_0 (1-x_2^2)\right] \wedge_0 \left[(9-x_1^2) \wedge_0 (4-x_2^2)\right]$, то есть неопределенное значение заменено на 0. Если в качестве неопределенного значения взять 1, то конъюнкция может быть заменена

выражением $-w1(x1,x2)\cdot w2(x1,x2)$, принимающим те же значения в непустых областях чертежа. В результате получим новое уравнение границы области Ω в более простом виде:

$$w=(-w_1\cdot w_2)\vee_0 w_3=$$
$$=\left\{-\left[(1-x_1^2)\wedge_0(1-x_2^2)\right]\cdot\left[(9-x_1^2)\wedge_0(4-x_2^2)\right]\right\}\vee_0\left[1-(x_1-3)^2-x_2^2\right]=0.$$

Задание 3. Зададим в среде пакета MathCAD основные функции:

$$K(x,y,\alpha):=\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha}\right);$$

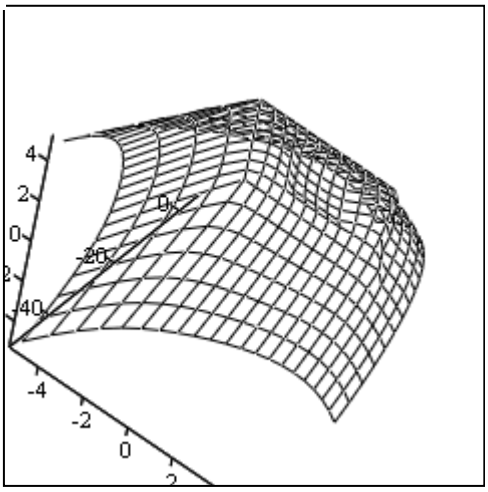
$$D(x,y,\alpha):=\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha}\right).$$

Предикаты области Ω в системе R_0:

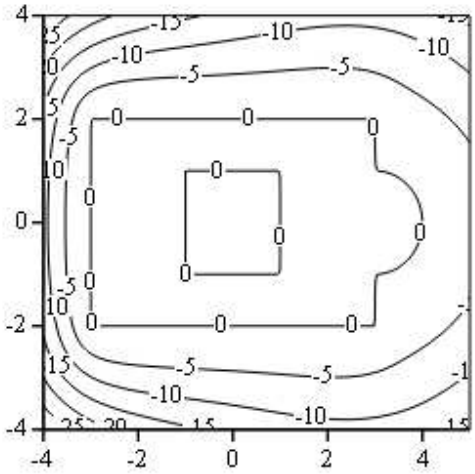
$$w(x1,x2):=D(K(-w1(x1,x2),w2(x1,x2),0),w3(x1.x2),0).$$

$$ww(x1,x2):=D(-w1(x1,x2)\cdot w2(x1,x2),w3(x1,x2),0)$$

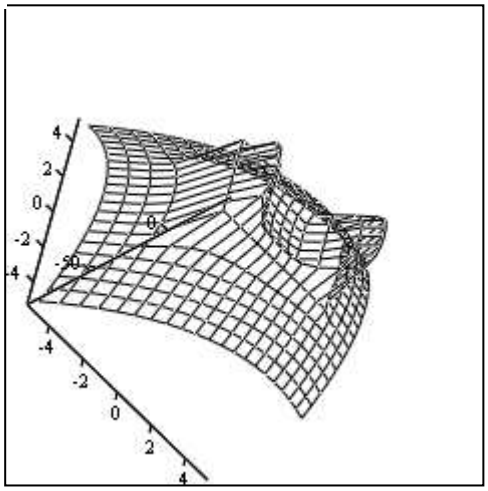
На рисунке 10 изображены графики и линии уровня построенных *R*-предикатов.



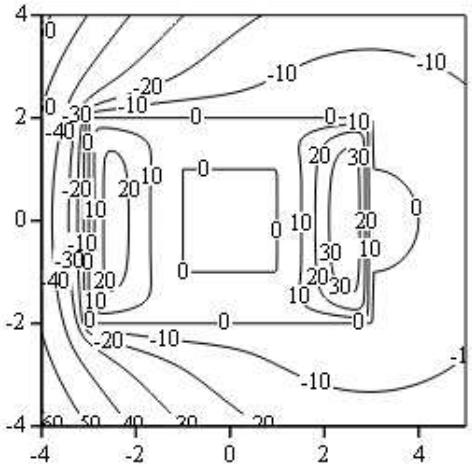
а) w



б) w



в) ww



г) ww

Рисунок 10 – *R*-предикаты чертежа с рисунка 9, построенные без использования (а,б) и с использованием (в,г) частичных булевых функций.

2.1.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 4

Отчет по лабораторной работе №4 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Основная часть по заданию 3.
- Выводы.

Основная часть по заданию 1 должна содержать

1) Булевы предикаты опорных областей.

2) Булев предикат заданного чертежа.

3) *R*-предикат заданного чертежа.

Основная часть по заданию 2 должна содержать

1) Таблицу истинности сопровождающей булевой функции, с указанием набора аргументов, для которого функция неопределена.

2) Булев предикат, доопределенный другим способом.

3) *R*-предикат, построенный по новой сопровождающей функции.

Основная часть по заданию 3 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

1) *R*-предикаты функций (*R*-отрицание, *R*-конъюнкцию и *R*-дизъюнкцию) одной из основных систем R_0 (на усмотрение студента). *R*-предикаты опорных областей.

2) *R*-предикаты чертежа из индивидуального задания, построенные по разным сопровождающим функциям.

3) Графики поверхностей и линий нулевого уровня для каждой поверхности, соответствующих построенным *R*-предикатам.

В выводах по работе необходимо проанализировать сложность каждого из построенных *R*-предикатов.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Сколько различных областей можно описать для произвольного расположения *m* опорных областей?

2. В чем причина появления булевых предикатов, которым соответствуют отсутствующие на чертеже области?

3. Какая булева функция называется частичной?

4. Как следует доопределять частичную булеву функцию?

2.2. Лабораторная работа № 5 «Нормальные уравнения чертежей. Определение расстояний от точки до чертежа.»

2.2.1 Задание к лабораторной работе №5

Задание 1. В среде пакета Mathcad задать векторную нормальную функцию чертежа, состоящего из двух окружностей (O_1, R_1) и (O_2, R_2) из таблицы 4, в соответствии с заданным вариантом. Используя эту функцию

найти расстояние от точки *K* из таблицы 4 в соответствии с заданным вариантом до чертежа и координаты точки противостояния.

Задание 2. В среде пакета Mathcad задать векторную нормальную функцию ломаной *ABCD* (см. таблицу 4 в соответствии с заданным вариантом). Используя построенную функцию найти расстояние до этого чертежа от точки *K* (см. таблицу 4 в соответствии с заданным вариантом) и координаты точки противостояния.

Задание 3. Найти расстояние между окружностями (см. таблицу 4 в соответствии с заданным вариантом), используя их нормальные функции. Проверить результаты аналитическими вычислениями.

Задание 4. Найти размеры наибольшего эллипса с соотношением полуосей $\frac{a}{b}=2$, который можно вписать в треугольник из таблицы 1 лабораторной работы №1, в соответствии с заданным вариантом.

Задание 5. В среде пакета Mathcad построить графики всех полученных в заданиях 1-4 *R*-отображений и их нулевые линии уровня.

Таблица 4 - Индивидуальные задания по вариантам к лабораторной работе №5

1.	*O*1(1;2); *R*1=1; *O*2(-3;1); *R*2=2; *K*(1;-1).	*A*(-2;-4); *B*(5;-3); *C*(2;-4); *D*(6;-5).
2.	*O*1(-1;5); *R*1=1; *O*2(3;7); *R*2=2; *K*(1;3).	*A*(-2;-2); *B*(-5;-1); *C*(-3;1); *D*(4;2).
3.	*O*1(-2;-3); *R*1=3; *O*2(-3;3); *R*2=1; *K*(2;2).	*A*(2;5); *B*(-1;6); *C*(5;7); *D*(3;4).
4.	*O*1(2;-2); *R*1=2; *O*2(0;2); *R*2=1; *K*(-3;3).	*A*(-4;2); *B*(-7;4); *C*(-1;5); *D*(-3;6).
5.	*O*1(0;3); *R*1=1; *O*2(2;5); *R*2=1; *K*(-3;2).	*A*(-4;1); *B*(-5;5); *C*(-1;6); *D*(-3;4).
6.	*O*1(1;-1); *R*1=2; *O*2(4;2); *R*2=2; *K*(1;4).	*A*(5;3); *B*(6;-1); *C*(3;-3); *D*(7;-2).
7.	*O*1(2;3); *R*1=1; *O*2(5;5); *R*2=2; *K*(4;-4).	*A*(5;-2); *B*(2;-3); *C*(1;1); *D*(6;2).
8.	*O*1(-1;4); *R*1=3; *O*2(5;7); *R*2=2; *K*(6;1).	*A*(6;3); *B*(1;-2); *C*(3;4); *D*(7;5).
9.	*O*1(1;3); *R*1=2; *O*2(2;7); *R*2=2; *K*(6;5).	*A*(-1;-3); *B*(1;-2); *C*(6;3); *D*(8;4).
10.	*O*1(0;-4); *R*1=1; *O*2(3;-1); *R*2=2; *K*(4;3).	*A*(4;4); *B*(6;3); *C*(5;-2); *D*(8;1).
11.	*O*1(-1;-1); *R*1=3; *O*2(2;2); *R*2=2; *K*(1;-3).	*A*(-4;3); *B*(-1;5); *C*(1;2); *D*(1;-1).

12.	*O*1(-2;2); *R*1=2; *O*2(2;-4); *R*2=2; *K*(3;3).	*A*(-4;-1); *B*(-1;-2); *C*(1;0); *D*(2;-1).
13.	*O*1(-2;-1); *R*1=2; *O*2(-1;-5); *R*2=1; *K*(3;3).	*A*(-4;-2); *B*(2;-3); *C*(1;0); *D*(2;2).
14.	*O*1(1;-4); *R*1=2; *O*2(0,5;2); *R*2=1; *K*(-3;-2).	*A*(-2;1); *B*(1;-2); *C*(3;1); *D*(5;-1).
15.	*O*1(3;2); *R*1=2; *O*2(5;1); *R*2=1; *K*(-3;-2).	*A*(2;-1); *B*(-1;1); *C*(2;1); *D*(3;-4).

2.2.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 5

Задание 1. Для получения векторной нормальной функции окружности $L_1\left(O_1\left(x_1, y_1\right), R_1\right)$ необходимо воспользоваться теоремой, согласно которой векторная нормальная функция чертежа во всех точках Дирихле равна произведению скалярной нормальной функции на её антиградиент: $\overline{f(x, y)} = -f(x, y) \cdot \operatorname{grad} f(x, y)$.

Нормальное уравнение окружности L_1:

$$f_1\left(x, y\right) = \sqrt{\left(x - x_1\right)^2 + \left(y - y_1\right)^2} - R_1.$$

Для построения нормального уравнения соединения чертежей требуется использовать следующее свойство нормальной функции чертежа: «*Если* $f_i(x)$ *– нормальные функции конечного числа чертежей* L_i, *то* $u(x)=f_1(x)\wedge^1\ldots\wedge^1 f_m(x)$ *– нормальная функция соединения чертежей* L_i»

Нормальная функция чертежа по определению задает расстояние до чертежа для каждой точки Дирихле, поэтому для нахождения расстояния достаточно подставить координаты точки в нормальную функцию.

Зная векторную нормальную функцию, для любой точки Дирихле можно найти ее точку противостояния. Для этого достаточно сложить радиус-вектор точки со значением векторной нормальной функции в данной точке.

Задание 2. Построим нормальное уравнение отрезка *AB*, изображенного на рисунке 11.

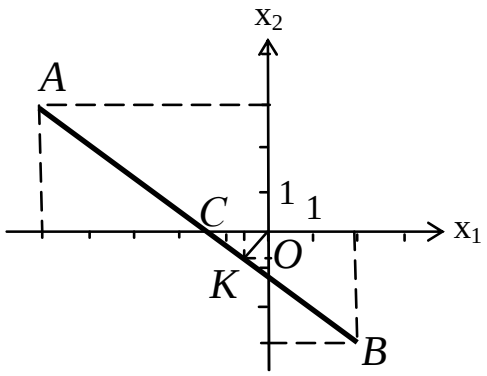


Рисунок 11 – Отрезок *AB* в системе координат

Воспользуемся, например, формулой:

$$\nabla(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, 0) = |\bar{y}| + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(|\bar{x}| - \frac{l}{2}\right)^2 + \bar{y}^2} - |\bar{y}|\right] \cdot \left[1 - sign\left(\frac{l}{2} - |\bar{x}|\right)\right], \qquad (2)$$

в этой формуле:

(x_1, y_1), (x_2, y_2) – координаты концов отрезка;

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2l}\left[(2x - x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_1) + (2y - y_1 - y_2) \cdot (y_2 - y_1)\right],$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2l}\left[(2x - x_1 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) - (2y - y_1 - y_2) \cdot (x_2 - x_1)\right].$$

Чтобы получить нормальную функцию заданного отрезка *AB*, достаточно в формулу (2) подставить координаты концов *A*(-5;3) и *B*(2;-3).

Найдем точку противостояния отрезка *AB* для начала координат точки *O*(0;0):

$$\nabla(0,0,-5,3,2,-3,0) \cdot grad\nabla(0,0,-5,3,2,-3,0) \approx \begin{pmatrix} -0,635 \\ -0,741 \end{pmatrix}.$$

Итак, точка противостояния для *O*(0;0) имеет координаты (-0,635;-0,741), а расстояние до чертежа от начала координат равно: $\left|\nabla(0,0,-5,3,2,-3,0)\right| \approx 0,976$.

На рисунке 10 отмечена точка противостояния K(-0,635;-0,741) на отрезке AB для точки O(0;0) –.

Задание 3. Для выполнения задания необходимо найти наименьшее значение нормальной функции одного чертежа в точках другого, то есть решить задачу: $l(L_1, L_2) = \min\limits_{(x,y)\in L_2} f_1(x, y)$,

где L_1 – окружность ($O_1(x_1,y_1)$, R_1);

L_2 – окружность ($O_2(x_2,y_2)$, R_2);

$f_1(x, y) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - R_1$ – нормальная функция окружности L_1.

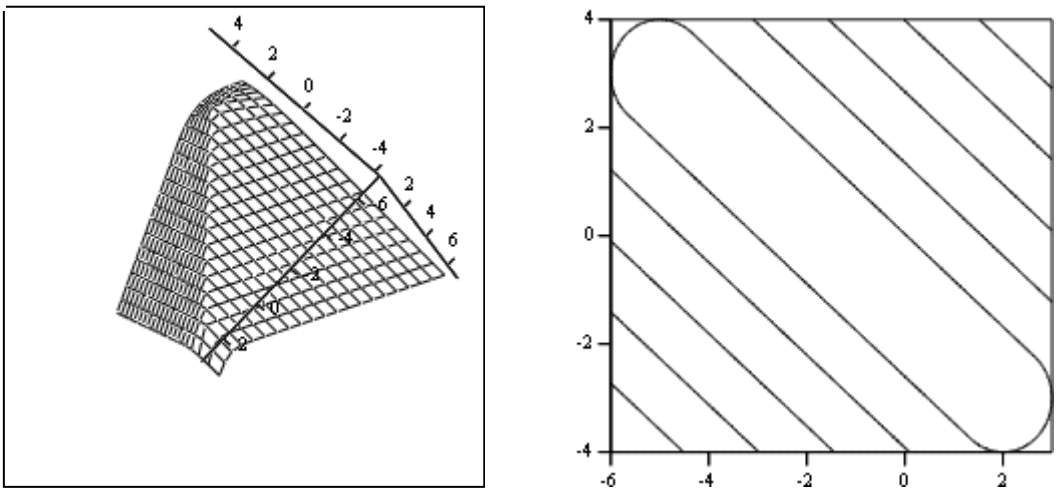
Данная задача приводится к минимизации функции одной переменной. Если чертеж L_2 задать параметрически: $x = x_2 + R_2 \cdot \cos\varphi$, $y = y_2 + R_2 \cdot \sin\varphi$, то функция $f_1(x, y)$ становится функцией одного аргумента $\varphi \in [0;2\pi)$, и

$$l(L_1, L_2) = \min_{(x,y)\in L_2} f_1(x, y) = \min_{\varphi\in[0,2\pi)} f_1(x_2 + R_2\cos\varphi, y_2 + R_2\sin\varphi).$$

Для решения задачи на экстремум рекомендуется использовать любой из изученных методов, реализовав его самостоятельно в среде пакета MathCAD.

Задание 4. При выполнении задания параметры эллипса – большую полуось, координаты центра и угол между большой полуосью и осью абсцисс – следует найти из условия максимума большой полуоси при условии равенства нулю расстояния между эллипсом и треугольником. Рекомендуется использовать встроенные функции пакета MathCAD для решения задачи на экстремум.

Задание 5. Воспользовавшись средствами пакета Mathcad, построим R-функцию отрезка, полученную в рекомендациях к выполнению задания 2 и ее линии уровня (рисунок 11).



а) f б) f

Рисунок 11 – Нормальная функция отрезка *AB* и ее линии уровня

2.2.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 5

Отчет по лабораторной работе №5 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Основная часть по заданию 3.
- Основная часть по заданию 4.
- Основная часть по заданию 5.
- Выводы.

Основная часть по заданию 1 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- Нормальную функцию чертежа, состоящего из двух окружностей (O_1, R_1) и (O_2, R_2), в соответствии с заданным вариантом.

- Векторную нормальную функцию чертежа, состоящего из двух окружностей (O_1, R_1) и (O_2, R_2), в соответствии с заданным вариантом.

- Формулы для вычисления расстояния от точки *K* в соответствии с заданным вариантом до чертежа и координат точки противостояния. Результаты вычисления по этим формулам.

Основная часть по заданию 2 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- Нормальную функцию ломаной *ABCD* в соответствии с заданным вариантом.

- Векторную нормальную функцию ломаной *ABCD* в соответствии с заданным вариантом.

- Формулы для вычисления расстояния от точки *K* в соответствии с заданным вариантом до ломаной и координат точки противостояния. Результаты вычисления по этим формулам.

Основная часть по заданию 3 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- Нормальные функции окружностей, в соответствии с заданным вариантом.

- Функцию для минимизации.

- Процедуру минимизации функции одной переменной, использующую произвольный метод оптимизации.

- Вычисление расстояния с использованием аналитической формулы – длина отрезка.

Основная часть по заданию 4 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- Функцию для минимизации.

- Встроенную функцию, реализующую минимизацию.

Основная часть по заданию 5 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- *R*-отображение и нулевую линию уровня соединения двух окружностей из задания 1.

- *R*-отображение и нулевую линию уровня ломаной из задания 2.

- *R*-отображение и нулевую линию уровня эллипса, вписанного в треугольник из задания 4.

В выводах по работе необходимо проанализировать правильность результатов, полученных в заданиях 1-3. Анализ можно провести путем выполнения аналитических расчетов тех же величин или изучения построенных графиков.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Что называется расстоянием от точки до чертежа?
2. Какая точка чертежа называется точкой противостояния данной точки?
3. Какие точки называются точками Дирихле?
4. Какое множество точек называется областью Дирихле?
5. Какие точки называются точками раздела? Какое множество точек называется чертежом раздела?
6. Как размерность области Дирихле характеризует форму чертежа в окрестности точки?
7. Дайте определение нормальной функции. Дайте определение нормального уравнения чертежа.
8. Какими свойствами обладает нормальная функция чертежа?
9. Как найти расстояние между чертежами, используя нормальные уравнения?
10. Запишите нормальные функции прямой, гиперплоскости, окружности, эллипса.
11. Запишите нормальные функции отрезка прямой и дуги окружности.

12. Нормальное уравнение чертежа, состоящего из дуг окружностей и отрезков прямых.

13. Дайте определение векторной нормальной функции чертежа.

14. Как найти точку противостояния с использованием векторной нормальной функции?

15. Как составить нормальную функцию соединения чертежей?

2.3. Лабораторная работа № 6 «Нормализованные уравнения чертежей»

2.3.1 Задание к лабораторной работе №6

Задание 1. В среде пакета Mathcad построить нормализованные уравнения чертежей из таблицы 1 лабораторной работы №1 в соответствии с вариантом и найти производные по направлению нормали к границам чертежей. Построить графики полученных *R*-отображений и их нулевую линию уровня, а также графики их производных.

Задание 2. В среде пакета Mathcad построить нормализованные уравнения чертежей из таблицы 2 лабораторной работы №2 в соответствии с вариантом и найти производные по направлению нормали к границам чертежей. Построить графики полученных *R*-отображений и их нулевую линию уровня, а также графики их производных.

2.3.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 6

Построим нормализованную функцию чертежа, изображенного на рисунке 1. В лабораторной работе №1 были получены R-предикаты опорных областей:

$$S1(x1, x2) := 4 - x1^2 - x2^2;\ S2(x1, x2) := 1 - x1^2 - x2^2;\ S3(x1, x2) := x2.$$

Зададим основные функции:

$$K(x,y,\alpha) := \frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha} \right);$$

$$D(x,y,\alpha) := \frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha} \right).$$

и *R*-предикат области Ω в системе *R*-функций R_0 :

$$f0(x_1,x_2) = K(S1(x_1,x_2), D(S2(x_1,x_2),(-S3(x_1,x_2)),0),0).$$

Для построения нормализованной функции используем теорему о нормализованности до первого порядка и замечания 1 и 2 к ней. Запишем нормализованные до первого порядка уравнения опорных областей:

$$w1(x1,x2) := \frac{4 - x1^2 - x2^2}{4};$$

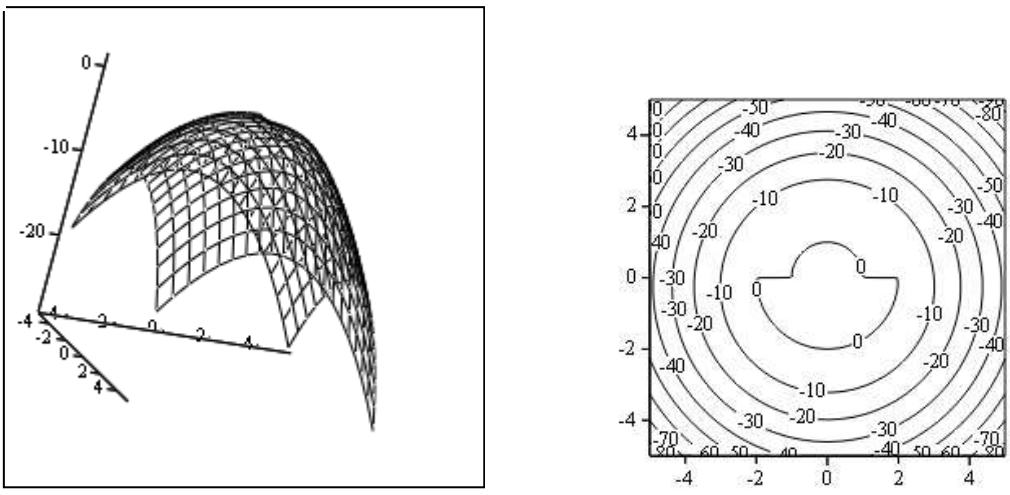
$$w2(x1,x2) := \frac{1 - x1^2 - x2^2}{2};$$

$$w3(x1,x2) := x2.$$

Нормализованное до первого порядка уравнение данного чертежа:

$$W0(x_1,x_2) = K(w1(x_1,x_2), D(w2(x_1,x_2),(-w3(x_1,x_2)),0),0).$$

График полученного *R*-отображения и его линии уровня приведены на рисунке 12.



а) W б) f0

Рисунок 12– Нормализованная *R*-функция и ее линии уровня.

Построим производную по направлению вектора нормали к границе чертежа *AB*, представляющей собой полукруг радиуса 2:

$$DW(x1,x2) := \sqrt{\left(\frac{d}{dx1}W(x1,x2)\right)^2 + \left(\frac{d}{dx2}W(x1,x2)\right)^2}.$$

На рисунке 13 представлен график производной в точках границы *AB*.

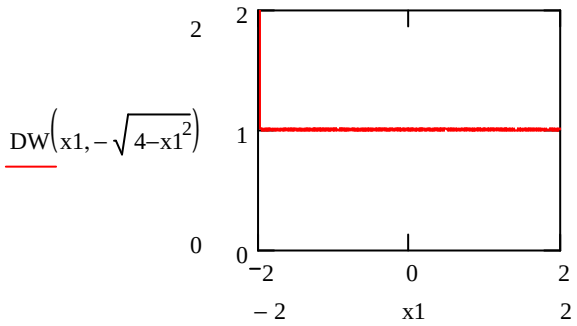


Рисунок 13 – Нормальная производная к границе чертежа, заданного нормализованной функцией

2.3.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 6

Отчет по лабораторной работе №6 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Основная часть по заданию 3.
- Основная часть по заданию 4.
- Основная часть по заданию 5.
- Выводы.

Основные части по заданиям 1 и 2 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- Нормализованные функции чертежей, в соответствии с вариантом.
- Графики построенных *R*-отображений и их нулевую линию уровня.
- Графики нормальных производных к границам чертежей.

Выводы по работе должны содержать анализ построенных производных.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Дайте определение нормали к чертежу.
2. Какие точки чертежа называются регулярными?
3. Дайте определение функции, нормализованной до порядка n.
4. Сформулируйте теорему о нормализованности до первого порядка.
5. Сформулируйте теорему о нормализованности до 1-го порядка уравнений элементов границ.

2.4. Лабораторная работа № 7 «Использование свойств симметрии при построении уравнений чертежей»

2.4.1 Задание к лабораторной работе №7

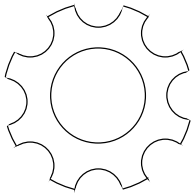
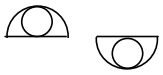
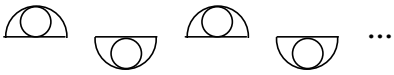
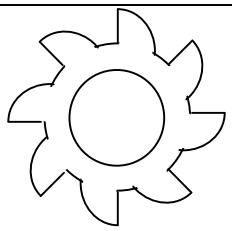
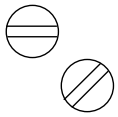
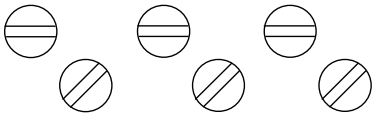
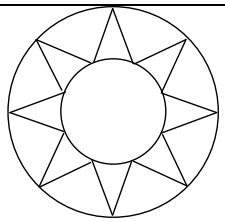
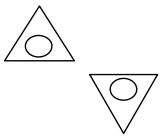
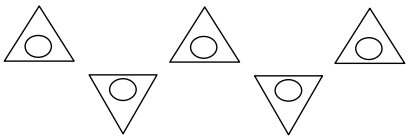
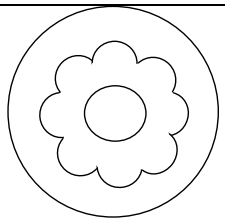
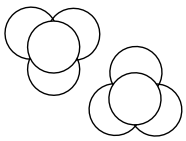
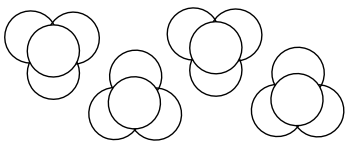
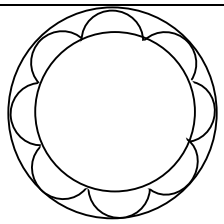
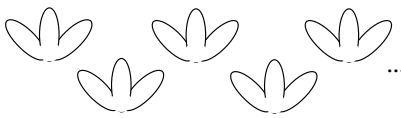
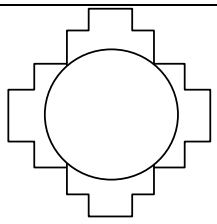
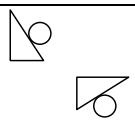
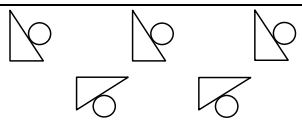
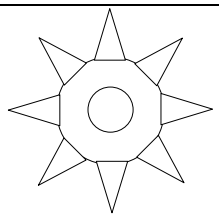
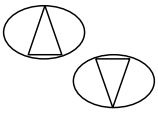
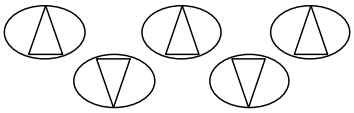
Задание 1. Составить нормализованные и обладающие соответствующим типом симметрии уравнения чертежей (см. таблицу 5 в соответствии с заданным вариантом).

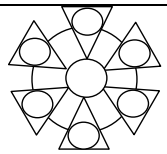
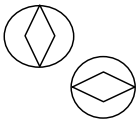
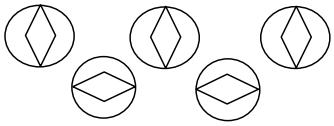
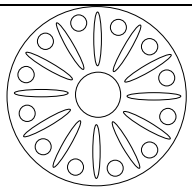
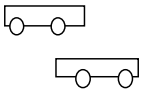
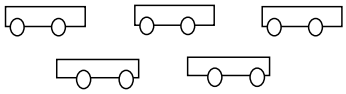
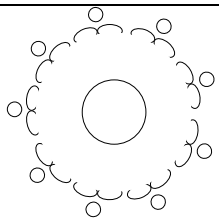
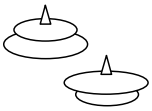
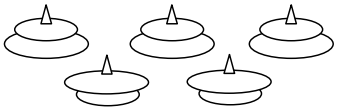
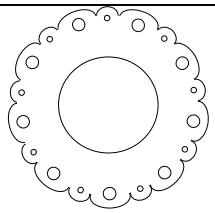
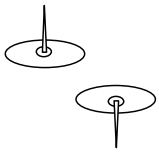
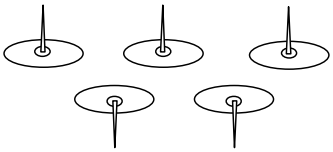
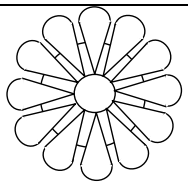
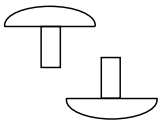
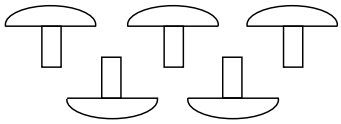
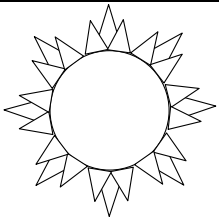
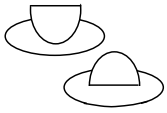
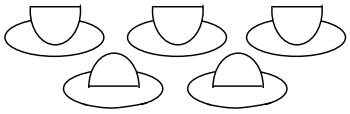
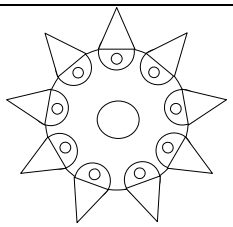
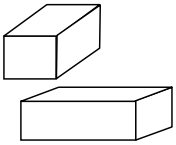
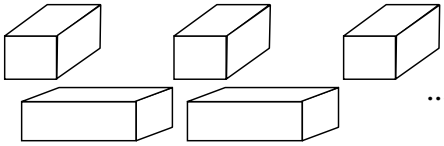
Задание 2. Написать нормализованное уравнение границы чертежа (см. таблицу 6 в соответствии с заданным вариантом). Число повторяющихся объектов равно n ($n \geq 1$ – целое, n должно войти в уравнение чертежа, как параметр.

Задание 3. В среде пакета Mathcad построить графики R-функций, полученных в заданиях 1-2 и их нулевую линию уровня.

Таблица 5 - Индивидуальные задания по вариантам к заданию 1 лабораторной работы №7

№ варианта	Задание 1

1.			...  ...
2.			...  ...
3.			...  ...
4.			...  ...
5.			...  ...
6.			...  ...
7.			...  ...

8.			...  ...
9.			...  ...
10.			...  ...
11.			...  ...
12.			...  ...
13.			...  ...
14.			...  ...

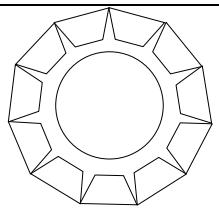
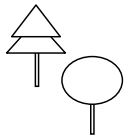
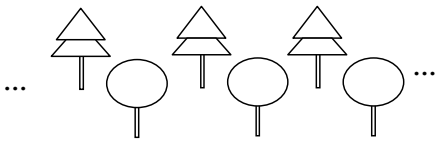
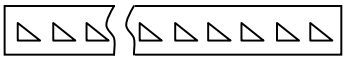
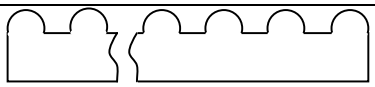
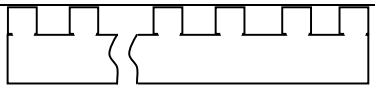
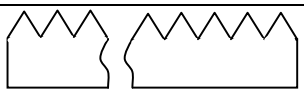
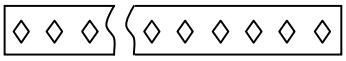
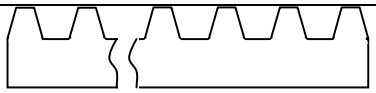
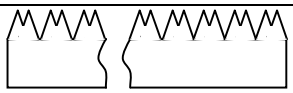
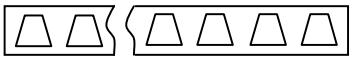
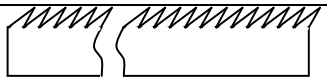
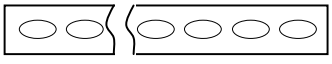
15.			

Таблица 6 - Индивидуальные задания по вариантам к заданию 2 лабораторной работы №7

№ варианта	Задание 2
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	

2.4.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 7

Задание 1. Составим уравнение чертежа, изображенного на рисунке 14 и обладающего точечной симметрией относительно начало координат.

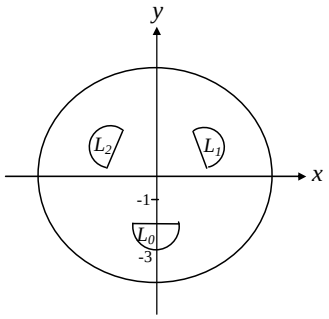


Рисунок 14 – Чертеж, обладающий точечной симметрией относительно начало координат

Порядок симметрии равен трем, $\alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$. Составим уравнение чертежа L_0, представляющего собой соединение половины окружности единичного радиуса, с центром в точке (0,-2) и отрезка прямой:

$$\omega_0(x, y) = \left(1 - x^2 - (y+2)^2\right) \wedge^* (-y-2).$$

Используя преобразование симметрии, построим уравнение чертежа L_1, $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$:

$$\omega_1(x,y)=\left(1-\left(x\cos\frac{2}{3}\pi+y\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2-\left[\left(-x\sin\frac{2}{3}\pi+y\cos\frac{2}{3}\pi\right)+2\right]^2\right)\wedge^*$$

$$\wedge^*\left[-\left(-x\sin\frac{2}{3}\pi+y\cos\frac{2}{3}\pi\right)-2\right]=$$

$$=\left[1-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2-\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)+2\right]^2\right]\wedge^*\left[-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)-2\right]=$$

$$=\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x\right)^2-\left[2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right]^2\right]\wedge^*\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-2\right]=0.$$

Аналогично получим уравнение чертежа L_2, $\alpha_2=\frac{2\cdot 2\pi}{3}$:

$$\omega_2(x,y)=\left(1-\left(x\cos\frac{4}{3}\pi+y\sin\frac{4}{3}\pi\right)^2-\left[\left(-x\sin\frac{4}{3}\pi+y\cos\frac{4}{3}\pi\right)+2\right]^2\right)\wedge^*$$

$$\wedge^*\left[-\left(-x\sin\frac{4}{3}\pi+y\cos\frac{4}{3}\pi\right)-2\right]=$$

$$=\left[1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2-\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2\right]^2\right]\wedge^*\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-2\right]=0.$$

Тогда уравнение чертежа L:

$$\omega(x,y)=\omega_0(x,y)\vee^*\omega_1(x,y)\vee^*\omega_2(x,y)\vee^*(x^2+y^2-25)=0.$$

Построим R-предикат бесконечной системы домиков, изображенной на рисунке 15.

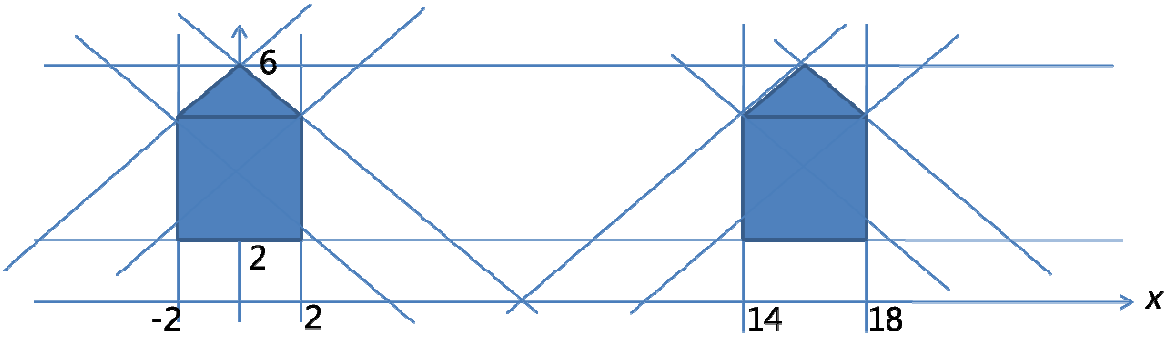


Рисунок 15 – Симметричный чертеж трансляционного типа

За опорные области выберем:

- систему вертикальных полос a_1=2, h_1=16:

$$\Sigma_1 \equiv \left[\frac{h_1}{2\pi \sin\frac{2\pi a_1}{h_1}} \left(\cos\frac{2\pi x_1}{h_1} - \cos\frac{2\pi a_1}{h_1} \right) \geq 0 \right] = \left[\frac{8}{\pi \sin\frac{\pi}{4}} \left(\cos\frac{\pi x_1}{8} - \cos\frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \right] =$$

$$= \left[\frac{16}{\pi\sqrt{2}} \left(\cos\frac{\pi x_1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \geq 0 \right];$$

- систему наклонных полос, параллельных биссектрисе первого и третьего координатных углов $a_2=3\sqrt{2}$, $h_2=8\sqrt{2}$:

$$\Sigma_2 = \Sigma_{\frac{\pi}{4}} \equiv \left[\frac{h_2}{2\pi \sin\frac{2\pi a_2}{h_2}} \left(\cos\frac{2\pi}{h_2} \left(x_1 \cos\frac{\pi}{4} + x_2 \sin\frac{\pi}{4} \right) - \cos\frac{2\pi a_2}{h_2} \right) \geq 0 \right] =$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi \sin\frac{3\pi}{4}} \left(\cos\frac{\pi}{8}(x_1 + x_2) - \cos\frac{3\pi}{4} \right) \geq 0 \right] = \left[\frac{8}{\pi} \left(\cos\frac{\pi}{8}(x_1 + x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \geq 0 \right];$$

- систему наклонных полос, параллельных биссектрисе второго и четвертого координатных углов $a_2=3\sqrt{2}$, $h_2=8\sqrt{2}$:

$$\Sigma_3 = \Sigma_{-\frac{\pi}{4}} \equiv \left[\frac{h_2}{2\pi \sin\frac{2\pi a_2}{h_2}} \left(\cos\frac{2\pi}{h_2} \left(x_1 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + x_2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) - \cos\frac{2\pi a_2}{h_2} \right) \geq 0 \right] =$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi \sin\frac{3\pi}{4}} \left(\cos\frac{\pi}{8}(x_1 - x_2) - \cos\frac{3\pi}{4} \right) \geq 0 \right] = \left[\frac{8}{\pi} \left(\cos\frac{\pi}{8}(x_1 + x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \geq 0 \right];$$

- горизонтальную полосу, заключенную между прямыми x_2=2 и x_2=6: $\Sigma_4 \equiv \left[\frac{1}{6}(x_2-2)(6-x_2)\geq 0\right]$.

Булев предикат области запишем в виде логической формулы: $\Sigma = \Sigma_1 \wedge (\Sigma_2 \wedge \Sigma_3) \wedge \Sigma_4$.

Соответствующее уравнение границы получаем в виде

$$\omega \equiv \frac{16}{\pi\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi x_1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\wedge^*$$

$$\wedge^*\left\{\frac{8}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{8}(x_1+x_2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\wedge^*\frac{8}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{8}(x_1-x_2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\wedge^*\left(\frac{1}{6}(x_2-2)(6-x_2)\right).$$

Замечание. Для построения *R*-предикатов чертежей трансляционного типа можно воспользоваться формулой**:** $\omega(x_1,x_2)\equiv\omega_0\left[\mu_n(x_1,a,h),x_2\right]=0$, где

$$\mu_n(x_1,a,h)\equiv\frac{h}{\pi}\arcsin\left\{\sin\frac{\pi x_1}{h}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a\pi}{2h}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a\pi}{2h}\right)+\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a\pi}{2h}\right)\right]\tau_n\left(x_1-\frac{h}{2},\frac{h}{2}-a\right)\right]^{-1}\right\},$$

$$\tau_n(x_1,q)=\left[\frac{\cos\frac{2\pi x_1}{h}-\cos\frac{2\pi q}{h}+\left|\cos\frac{2\pi x_1}{h}-\cos\frac{2\pi q}{h}\right|}{2\left(1-\cos\frac{2\pi q}{h}\right)}\right]^{n+1},$$

Задание 2. Рекомендуется для начала построить уравнение бесконечного чертежа трансляционного типа. Нужное количество элементов выделить пересечением с дополнительным чертежом (прямоугольником или вертикальной полосой), размеры которого ввести в программу в виде изменяемого параметра.

Задание 3. Построим чертеж с рисунка 14 в среде пакета Mathcad. Зададим основные функции:

$$K(x,y,\alpha) := \frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha}\right);$$

$$D(x,y,\alpha) := \frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2xy\alpha}\right).$$

R-предикат чертежа L_0, представляющего собой соединение половины окружности единичного радиуса, с центром в точке (0,-2) и отрезка прямой определим в системе R_0 следующим образом:

$$w00(x,y) := \left(K\left(1-x^2-(y+2)^2\right),(-y-2),0\right).$$

Используя преобразование симметрии, построим *R*-предикат чертежа L_1:

$$w10(x,y) = K\left(\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x\right)^2-\left[2-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right]^2\right],\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-2\right],0\right)$$ и

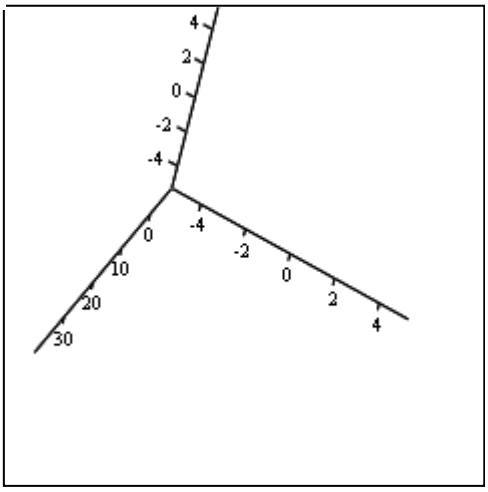
R-предикат чертежа L_2:

$$w20(x,y) := \left(\left[1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2-\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2\right]^2\right],\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-2\right],0\right).$$

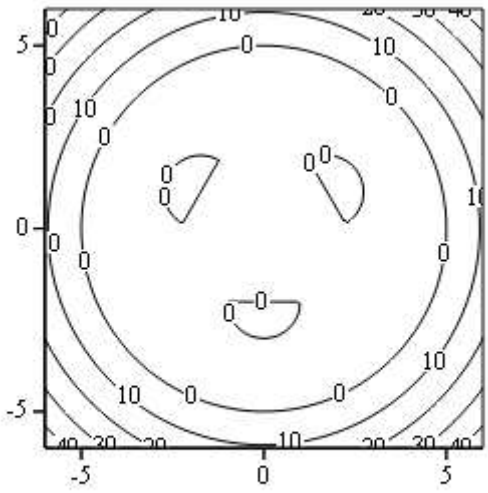
Тогда *R*-предикат чертежа *L* в системе R_0:

$$w0(x,y) := D\left(w00(x,y),D\left(w10(x,y),D\left(w20(x,y),(x^2+y^2-25),0\right),0\right),0\right)=0.$$

На рисунке 16 изображены построенные *R*-отображения и их линии уровня.



а) w0



б) w1

Рисунок 16 – *R*-отображение чертежа, обладающего симметрией точечного типа и его линии уровня

Построим чертеж с рисунка 15 в среде пакета Mathcad.

Зададим *R*-предикаты опорных областей:

$S1(x1,x2) := \frac{16}{\pi\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi\cdot x1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – система вертикальных полос;

$S2(x1,x2) := \frac{8}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{8}(x1+x2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – система наклонных полос,

параллельных биссектрисе первого и третьего координатных углов;

$S3(x1,x2) := \frac{8}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{8}(x1-x2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – система наклонных полос,

параллельных биссектрисе второго и четвертого координатных углов;

$S4(x1,x2) := \frac{1}{6}(x2-2)(6-x2)$ – горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $x2=2$ и $x2=6$;

Итак, *R*-предикат границы чертежа в системе R_0:

$w(x1,x2) := K(K(S1(x1,x2),K(S2(x1,x2),S3(x1,x2),0),0),S4(x1,x2),0)$.

Его график и линии уровня показаны на рисунке 17.

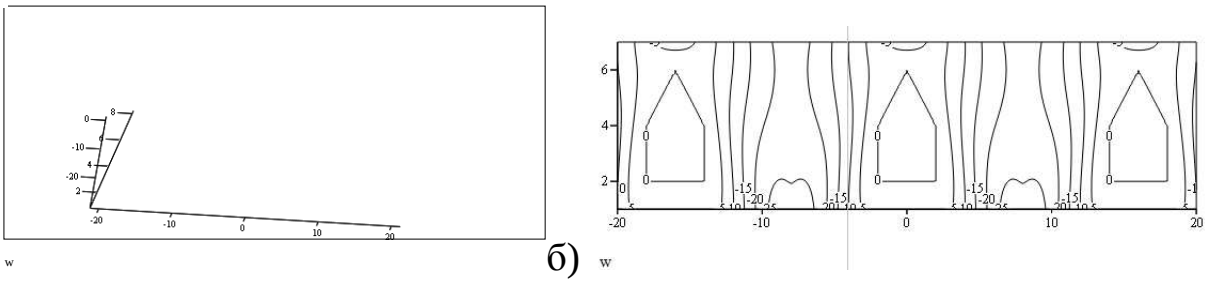


Рисунок 17 – *R*-предикат и его линии уровня бесконечной системы домиков

2.4.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 7

Отчет по лабораторной работе №7 должен содержать:

- Задания.

- Основная часть по заданию 1.

- Основная часть по заданию 2.

- Основная часть по заданию 3.

- Выводы.

Основная часть по заданию 1 должна содержать:

- *R*-предикаты опорных областей для построения части симметричного чертежа.

- Нормализованные *R*- функции чертежей, в соответствии с вариантом, построенные с использованием заданного типа симметрии.

Основная часть по заданию 2 должна содержать:

- *R*-предикаты опорных областей для построения части симметричного чертежа.

- Нормализованную *R*- функцию бесконечного чертежа, в соответствии с вариантом.

Основная часть по заданию 3 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- Нормализованные функции всех чертежей из заданий 1-2, в соответствии с вариантом.

- Графики построенных *R*-отображений и их нулевые линии уровня.

- Параметр для изменения количества элементов в чертеже из задания 2.

Выводы по работе должны содержать анализ типов симметрии чертежей из индивидуальных заданий в соответствии с вариантом.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Какие преобразования называются точечной симметрией?
2. Какие преобразования называются симметрией трансляционного типа?
3. Как построить симметричное и кососимметричное уравнение чертежа?
4 Какие существуют точечные типы симметрии?
5. Как построить матрицы симметричных преобразований разного типа?

3 Пучки функций. Структурный метод решения краевых задач

3.1. Лабораторная работа № 8 «Продолжение внутрь области граничных значений»

3.1.1 Задание к лабораторной работе №8

Задание 1. На границах области Ω заданы граничные функции (см. таблицу 7 в соответствии с заданным вариантом). Построить склеивающую функцию, используя формулы:

$$\varphi = \frac{\varphi_1\omega_1^0 + \ldots + \varphi_m\omega_m^0}{\omega_1^0 + \ldots + \omega_m^0}, \qquad (3)$$

где $\omega_k^0(x)=0$ на всех элементах чертежа, кроме L_k

$$\varphi = \frac{\varphi_1\tau_1 + \ldots + \varphi_m\tau_m}{\tau_1 + \ldots + \tau_m}, \qquad (4)$$

где $\tau_i = \omega_i^{-1},\ L_i \equiv (\omega_i = 0)$.

Задание 2. Построить склеивающую функцию путем последовательного добавления граничных значений, по формуле:

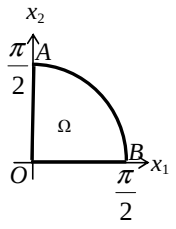
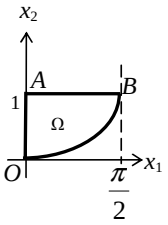
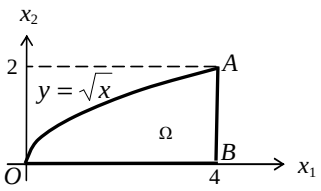
$$\varphi_{12}(x,y)=\varphi_1(x,y)+\frac{\omega_1(x,y)}{\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y)}(\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)). \qquad (5)$$

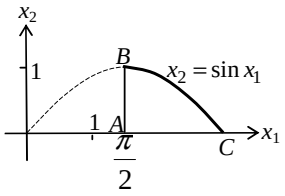
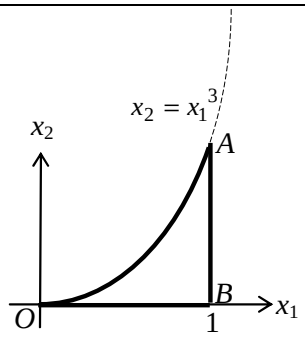
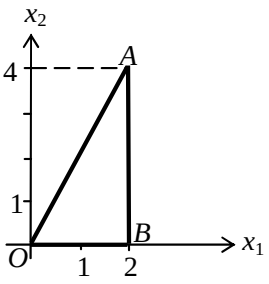
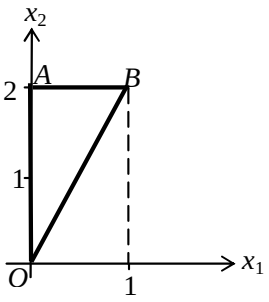
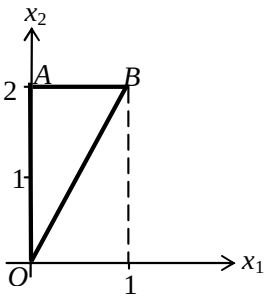
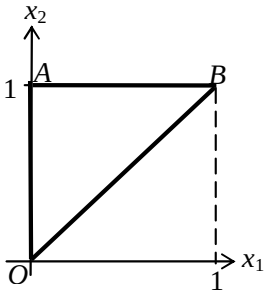
Задание 3. Построить склеивающую функцию, дифференцируемую до первого порядка, используя формулу:

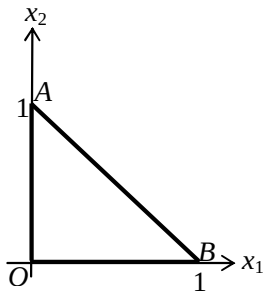
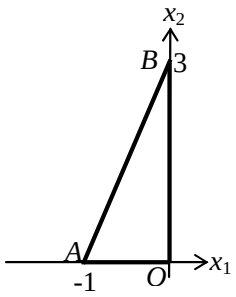
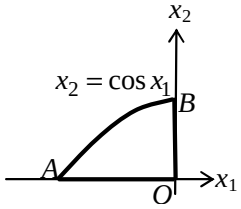
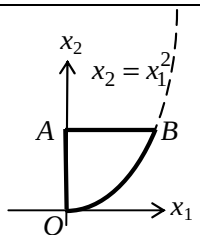
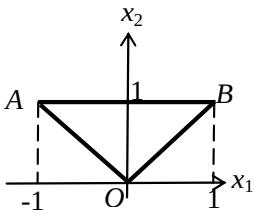
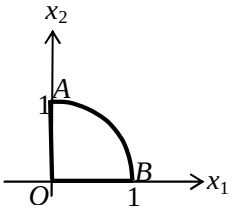
$$\varphi=\frac{\varphi_1\tau_1^{k_1}+\ldots+\varphi_m\tau_m^{k_m}}{\tau_1^{k_1}+\ldots+\tau_m^{k_m}} \qquad (6)$$

Задание 4. В среде пакета Mathcad построить графики и линии уровня всех функций из заданий 1-3. Проанализировать различия в поведении склеивающих функций. Построить производные на границе чертежей

Таблица 7 - Индивидуальные задания по вариантам к лабораторной работы №8

1.	 $u\big\|_{\partial\Omega}=\begin{cases}\cos x_2, x\in OA;\\ \cos x_1, x\in OB;\\ \cos x_1\cdot\sin x_2-\sin x_1\cdot\cos x_2, x_1\in AB.\end{cases}$
2.	 $u\big\|_{\partial\Omega}=\begin{cases}1-x_2, x_1\in OA;\\ \cos x_1, x_1\in OB;\\ 0, x_1\in AB.\end{cases}$
3.	 $u\big\|_{\partial\Omega}=\begin{cases}0, x_1\in OA;\\ x_1^2, x_1\in OB;\\ 16-x_2^4, x_1\in AB.\end{cases}$
4.	

		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_2^2,\ x_1 \in AB; \\ \sin^2 x_1 + \cos x_1,\ x_1 \in BC; \\ \cos x_1,\ x_1 \in CA. \end{cases}$
5.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \sqrt[3]{x_2} - 1 + x_1^6,\ x_1 \in OA; \\ x_2^2,\ x_1 \in AB; \\ x_1 - 1,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
6.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -\frac{3}{4}x_2^2,\ x_1 \in OA; \\ 4 - x_2^2,\ x_1 \in AB; \\ x_1^2,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
7.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} e^{x_2},\ x_1 \in OA; \\ e^{x_1+2},\ x_1 \in AB; \\ e^{3x_1},\ x_1 \in OB. \end{cases}$
8.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0,\ x_1 \in OA; \\ 3x_1^3,\ x_1 \in AB; \\ 2x_1^4 + x_1^3,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
9.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_2^2 + 1,\ x_1 \in OA; \\ 2 + x_1^2,\ x_1 \in AB; \\ 2x_1^2 + 1,\ x_1 \in OB. \end{cases}$

10.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_2^3,\ x_1 \in OA; \\ 1-2x_1,\ x_1 \in AB; \\ -x_1,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
11.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_1^2,\ x_1 \in OA; \\ \left(\dfrac{x_2}{3}-1\right)e^{(x_1+1)},\ x_1 \in AB; \\ 0,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
12.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0,\ x_1 \in OA; \\ x_2 e^{x_1},\ x_1 \in AB; \\ x_2,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
13.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_2^2,\ x_1 \in OA; \\ \cos x_1,\ x_1 \in AB; \\ x_1^2 \cos x_1,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
14.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_2^2+1,\ x_1 \in OA; \\ 2x_1^2,\ x_1 \in AB; \\ x_1^2+x_2^2,\ x_1 \in OB. \end{cases}$
15.		$u\big\|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x_2^2,\ x_1 \in OA; \\ 1-x_1^2+x_1,\ x_1 \in AB; \\ x_1,\ x_1 \in OB. \end{cases}$

3.1.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 8

Задание 1. Построим склеивающую функцию, продолжающую внутрь области, изображенной на чертеже с рисунка 18 граничные условия:

$$u|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \varphi_1(x,y) = 0,\ x \in AB; \\ \varphi_2(x,y) = \dfrac{x+1}{2},\ x \in BC; \\ \varphi_3(x,y) = y^2,\ x \in COD; \\ \varphi_4(x,y) = \dfrac{x(x+1)}{2},\ x \in DA. \end{cases} \qquad (7)$$

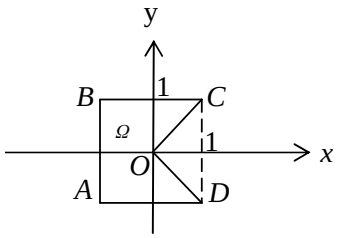


Рисунок 18 – Чертеж для построения склеивающей функции

Для построения склеивающей функции воспользуемся формулой (3). Проведем построения в системе R_0 . Зададим основные функции:

$$K(x,y) := x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\ ;$$

$$D(x,y) := x + y + \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Построим функции $\omega_i^0(x,y)$ (обозначим их, например, *wi*, *i*=1, 2, 3, 4):

$w2(x,y) := K(K(x+1,y+1),D(y-x,-y-x))$;

$w3(x,y) := K(K(x+1,y+1),1-y)$;

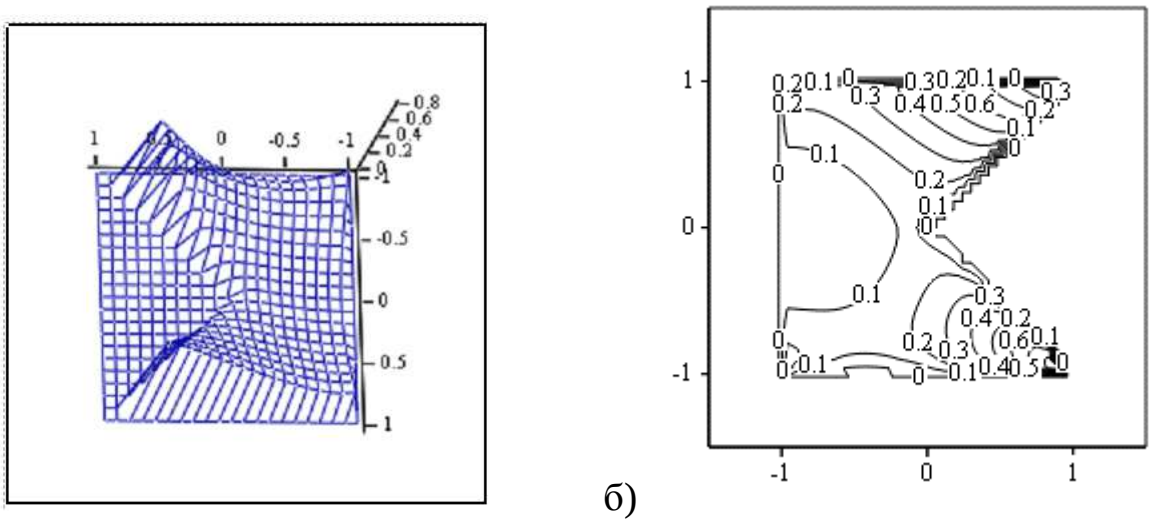
$w4(x,y) := K(K(x+1,1-y),D(y-x,-y-x))$.

Склеивающую функцию зададим формулой:

$$f(x,y) := \frac{fi2(x,y)w2(x,y) + fi3(x,y)w3(x,y) + fi4(x,y)w4(x,y)}{w2(x,y) + w3(x,y) + w4(x,y)},$$

где $fi2(x,y), fi3(x,y), fi4(x,y)$ – нагружающие функции, заданные формулой (7).

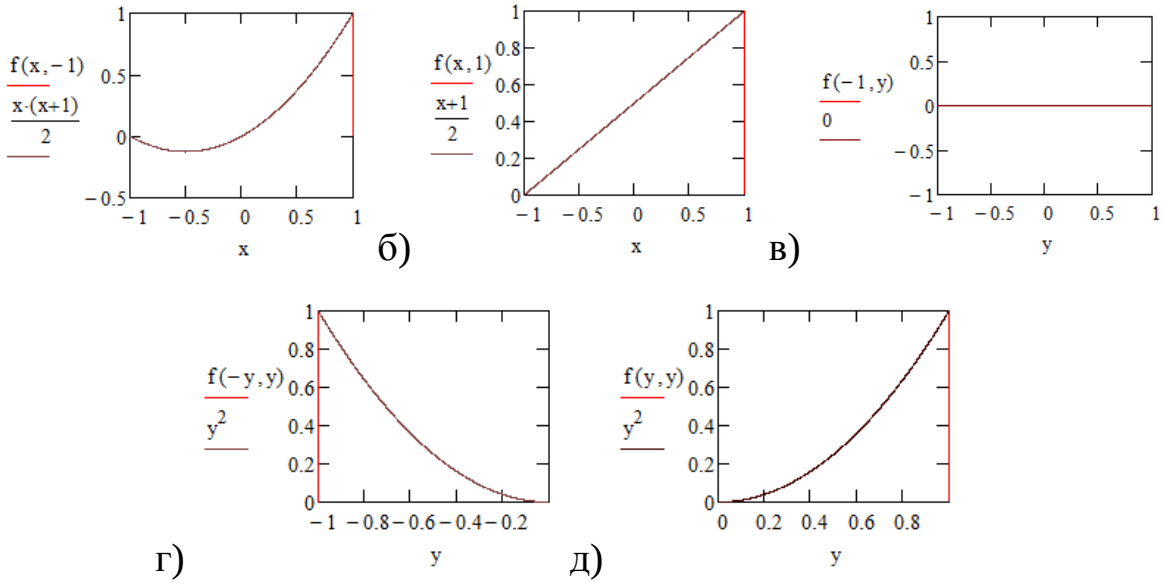
На рисунке 19 изображена построенная склеивающая функция и ее линии уровня в области Ω:



а) б)

Рисунок 19 – Склеивающая функция (а) и ее линии уровня (б)

Построенная склеивающая функция на границах области совпадает с заданными нагружающими функциями (см. рисунок 20).



а) б) в) г) д)

Рисунок 20 – Проекции склеивающей функции на границы области:

а) на границу AD, б) на границу BC, в) на границу AB, г) на границу OC, д) на границу OD

Задание 2. Рассмотрим чертеж L (рисунок 21) со следующими граничными условиями: $\Gamma_1 : \varphi_1(x,y) = y^2$, $\Gamma_2 : \varphi_2(x,y) = x^2$, $\Gamma_3 : \varphi_3(x,y) = 1$. Уравнения границ соответственно $\omega_1(x,y) \equiv x$, $\omega_2(x,y) \equiv y$, $\omega_3(x,y) \equiv 1 - x^2 - y^2$.

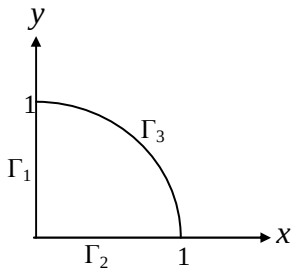


Рисунок 21 – Область с тремя участками границы

Вначале построим склеивающую функцию для всех границ, используя формулу (4):

$$\varphi(x,y) = \frac{y^2\omega_1^{-1} + x^2\omega_2^{-1} + \omega_3^{-1}}{\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1} + \omega_3^{-1}} = \frac{\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{1-x^2-y^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-x^2-y^2}} = \frac{(y^3+x^3)(1-x^2-y^2)+xy}{(y+x)(1-x^2-y^2)+xy}$$

Затем применим для построения склеивающей функции формулу (5):

$$\varphi_{12}(x,y) = \varphi_1(x,y) + \frac{\omega_1(x,y)}{\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y)}(\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)) =$$

$$= y^2 + \frac{x}{x+y}(x^2 - y^2) = y^2 + x^2 - xy.$$

Последнее слагаемое в формуле для $\varphi_{12}(x,y)$ обращается в нуль на границе $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, следовательно, можно выбрать $\varphi_{12} = x^2 + y^2$. Достроим склеивающую функцию, добавив условия на границе Γ_3

$$\varphi(x,y) = \varphi_{12}(x,y) + \frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(x,y)+\omega_{13}(x,y)}(\varphi_3(x,y) - \varphi_{12}(x,y)) =$$

$$= y^2 + x^2 + \frac{xy}{xy+1-x^2-y^2}(1-x^2-y^2),$$

так как последнее слагаемое обращается в нуль на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, то им можно пренебречь, и склеивающая функция будет иметь более простой вид: $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$.

3.1.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 8

Отчет по лабораторной работе №8 должен содержать:

- Задания.

- Основная часть по заданию 1.

- Основная часть по заданию 2.

- Основная часть по заданию 3.

- Основная часть по заданию 4.

- Выводы.

Основная часть по заданию 1 должна содержать:

- *R*-предикаты опорных областей и *R*- функции чертежей, в соответствии с вариантом.

- Формулы функций $\omega_k^0(x)$ и $\tau_i = \omega_i^{-1}$ для каждой границы чертежа.

- R-предикаты склеивающих функций, составленные на основе формул (3-4).

Основная часть по заданию 2 должна содержать:

- R-предикаты склеивающих функций, составленные для каждого шага при последовательном добавлении границ на основе формулы (5).

- R-предикаты склеивающих функций, составленные для каждого шага при последовательном добавлении границ после упрощения. Преобразования, упрощающие формулы, обосновать.

- Итоговый вариант склеивающей функции.

Основная часть по заданию 3 должна содержать:

- R-предикат склеивающей функций, составленный на основе формулы (6).

Основная часть по заданию 4 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- R-предикаты чертежа и склеивающих функций для краевой задачи из заданий 1-3, в соответствии с вариантом.

- Графики всех построенных *R*-отображений и их нулевые линии уровня.

- Проекции склеивающих функций на соответствующие границы и граничные условия в одной системе координат (для сравнения)

Выводы по работе должны содержать анализ результатов склеивания граничных условий разными способами.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Запишите формулу пучка функций, равных нулю в точках чертежа $L \equiv [\omega(x) = 0]$.

2. Что такое неопределенная компонента пучка? Для чего она вводится в формулу пучка?

3. Какая функция называется склеивающей? Что такое нагружающая функция?

4. Как строить нагружающую функцию в случае разрывных нагружающих функций?

5. Как преобразовать склеивающую функцию для добавления дополнительных неопределенных компонент пучка?

3.2. Лабораторная работа № 9 «Решение краевых задач»

3.2.1 Задание к лабораторной работе №9

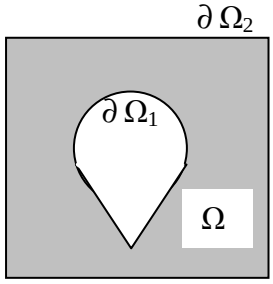
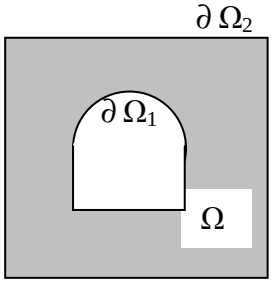
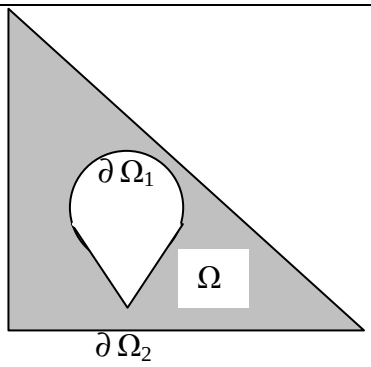
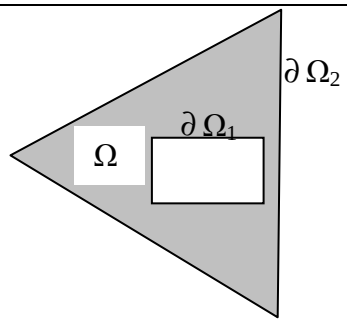
Задание 1. Решить вариационно-структурным методом краевую задачу фильтрации воды в неоднородном массиве в окрестности выработки

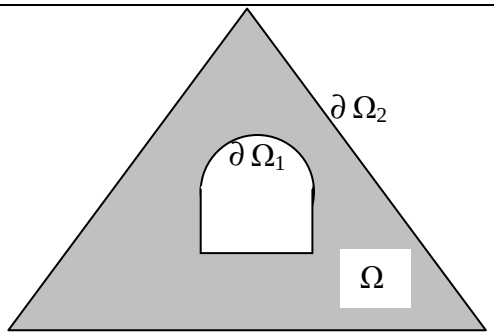
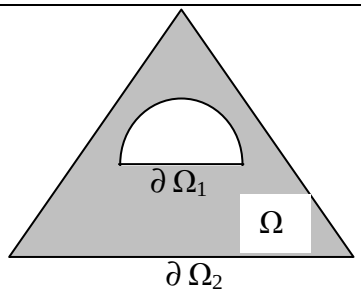
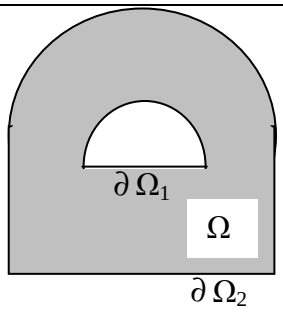
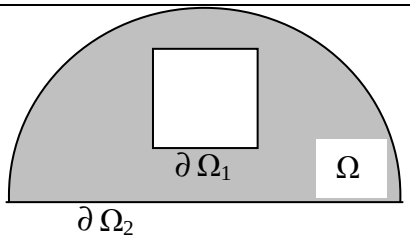
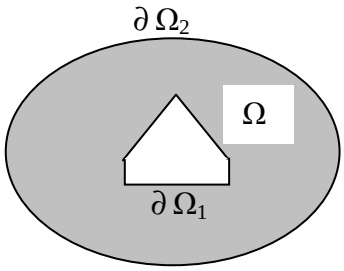
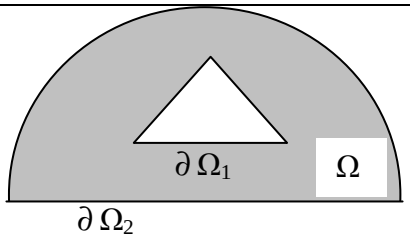
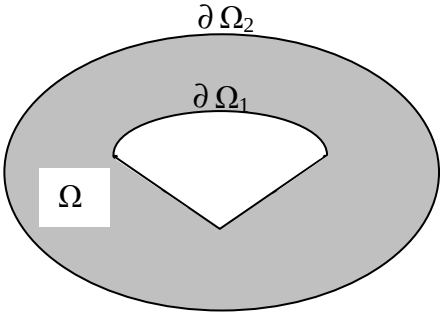
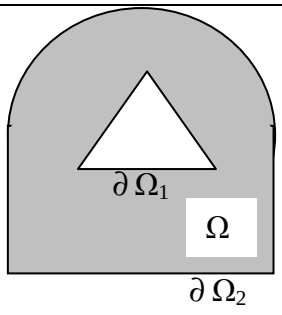
(область Ω – таблица 8), с граничными условиями: $p^*\big|_{\partial\Omega_1} = 0$;

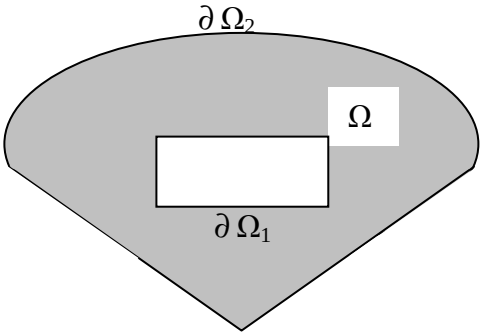
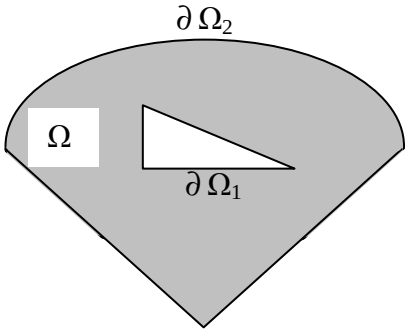
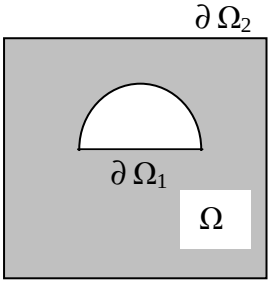
$p^*\big|_{\partial\Omega_2} = a + by$.

Задание 2. На заданной области Ω (см. таблицу 7), взяв функции φ_i в качестве граничных значений нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, решить краевую задачу Неймана для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$.

Таблица 8 - Индивидуальные задания по вариантам к лабораторной работы №9

1.	 *a*=200; *b*=-3	9.	 *a*=120; *b*=-4
2.	 *a*=90; *b*=-2	10.	 *a*=150; *b*=-2

3.	 *a*=180; *b*=-4	11.	 *a*=250; *b*=-3
4.	 *a*=130; *b*=-2	12.	 *a*=95; *b*=-5
5.	 *a*=105; *b*=-7	13.	 *a*=85; *b*=-3
6.	 *a*=190; *b*=-1	14.	 *a*=110; *b*=-4

7.	 *a*=119; *b*=-3	15.	 *a*=75 *b*=-9
8.	 *a*=230; *b*=-1		

3.2.2 Методические указания к выполнению лабораторной работы № 9

Задание 1. Рассмотрим демонстрационный пример, иллюстрирующий расчет фильтрации воды в окрестности сводчатой шахтной выработки, проходящей в водопроницаемом слое.

Расчетная область имеет форму квадрата, окружающего сечение выработки (рисунок 22). В качестве граничных условий на контуре выработки (внутренней границе области) задано постоянное давление:

$$p^*\big|_{\partial\Omega_1} = 0, \qquad (7)$$

а на границе однородного ненарушенного массива (внешней границы области) – линейно возрастающее с глубиной:

$$p^*\big|_{\partial\Omega_2} = 100 - y. \qquad (8)$$

Как известно, задача фильтрации сводится к решению уравнения Лапласа относительно давления воды в грунте:

$$\nabla^2 p = 0, \tag{9}$$

при граничных условиях первого рода.

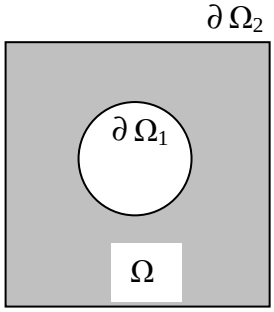


Рисунок 22 – Расчетная область для задачи фильтрации воды

Постановка задачи упрощается, если известным образом преобразовать ее к вариационному виду. Введем функционал:

$$\chi(p) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} a \cdot (\nabla p)^2 d\Omega, \tag{10}$$

для которого уравнение (9) является уравнением Эйлера.

Для решения вариационной задачи используем представление решения в виде пучка функций:

$$p(x,y) = p_0(x,y) + \omega(x,y) \cdot \Phi(x,y), \tag{11}$$

удовлетворяющих граничным условиям (7-8).

Неопределенную компоненту пучка будем искать в виде полинома:

$$\Phi(x,y) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 y. \tag{12}$$

Для минимизации функционала по параметрам неопределенной компоненты пучка a_i (i=0,1,2), можно использовать любой из предложенных методов.

Минимизируя функционал (10) в пучке функций (11), найдем коэффициенты неопределенной компоненты (12). Подставляя неопределенную компоненту в пучок, получим искомое поле гидростатических давлений (см. рисунок 23).

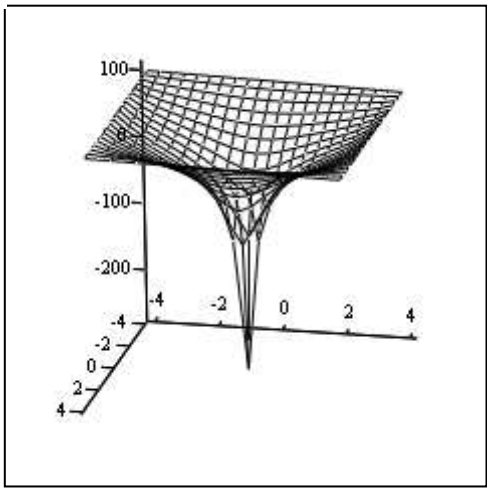


Рисунок 23 – Поле гидростатических давлений

Задание 2. Склеивающая функция пучка строится аналогично лабораторной работе №8.

Общая полная структура задачи Неймана имеет формулу:

$$u = \Phi_1(x) + \omega\varphi - \omega D^1\Phi_1(x) + \omega^2\Phi_2(x), \qquad (13)$$

где φ - склеивающая функция дифференциальных граничных условий,

ω - R-предикат границы чертежа,

$\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ - неопределенные компоненты, как минимум, дважды дифференцируемы.

3.2.3 Содержание отчета и контрольные вопросы для защиты отчета по лабораторной работе № 9

Отчет по лабораторной работе №9 должен содержать:

- Задания.
- Основная часть по заданию 1.
- Основная часть по заданию 2.
- Выводы.

Основная часть по заданию 1 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- *R*-предикаты опорных областей и *R*- функцию чертежа, в соответствии с вариантом, его график и нулевую линию уровня.

- Минимизацию функционала, выбранным методом.

- График, полученного решения.

Основная часть по заданию 2 представляется в виде программы в среде пакета Mathcad. Программа должна содержать:

- *R*-предикаты опорных областей и *R*- функцию чертежа, в соответствии с вариантом, его график и нулевую линию уровня.

- Минимизацию функционала, выбранным методом.

- График, полученного решения.

Выводы по работе должны содержать анализ результатов решения практических задач.

Контрольные вопросы для защиты отчета

1. Чем отличается структурный метод решения краевых задач от классического?
2. Что называется структурой решения краевой задачи?
3. В каких случаях структура решения краевой задачи называется общей, частичной, полной?
4. Что называется общим решением краевой задачи?
5. Задача построения пучков функций как обобщение задачи интерполяции.
6. Сформулируйте первую краевую задачу. Как используется структурный метод при решении первой краевой задачи?
7. Расскажите суть методов нахождения неопределенных компонент пучка: метода штрафов, проекционного метода, метода коллокаций, метода Ритца.
8. Как построить пучок функций, имеющих заданную нормальную производную на границе?

9. Как применить структурный метод к решению краевой задачи с граничными условиями третьего рода?

10. Продолжение внутрь области дифференциального оператора по длине граничной дуги.

11. Построение пучка функций, имеющих заданную производную по граничной дуге. Структурный метод решения смешанной краевой задачи

12. Структурный метод решения краевой задачи на неоднородной области

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

Каледин, В. О. Теория R-функций : учебное пособие для высших учебных заведений по направлению 01.03.02 - прикладная математика и информатика /В. О. Каледин, Е. В. Решетникова, В. Б. Гридчина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Новокузнец. ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. - 2-е изд., перераб. и доп. - Электрон текст. дан. - Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2017. - 119 с. - Библиогр.: с. 119. – ISBN 978-5-8353-1952-7. URL: https://icdlib.nspu.ru/view/icdlib/6060/read.php. - (дата обращения: 04.03.2020). – Текст электронный.

Дополнительная литература

1. Каледин, В. О. Теория R-функций : учебное пособие / В.О. Каледин, Е.В. Решетникова. - Новокузнецк: РИО НФИ КемГУ, 2008. - 117 с. – ISBN / - Текст: непосредственный.

2. Каледин, В. О. Теория R-функций : Метод. пособие для студентов специальности 010200 «Прикладная математика и информатика» (15,4 Мб) / В.О. Каледин, Е.В. Решетникова. – Москва : ФГУП НТЦ «Информрегистр», № гос.регистрации 0320601774, 2006. – 1 электрон. опт. диск (CD-R) / -

Систем. требования: Pentium 500 Mhz; 128 Mb; Windows 95/98/Me/NT/2000/XP; 10 Гб свободного места на жестком диске; видеосистема 16 Мб; акустическая система sound; Microsoft Office. – Текст электронный.

3. Кравченко, В.Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях : Монография / В.Ф. Кравченко, В.Л. Рвачев. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 416 с. - ISBN 5-9221-0752-6. - URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=544654 - (дата обращения 04.03.2020). - Текст : электронный.

4. Кравченко, В.Ф. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами : монография / В.Ф. Кравченко, АД.В.Чуриков; под ред. В.Ф. Кравченко. - Москва: Техносфера, 2018. - 182 с.: ил., табл., схем. – (Мир цифровой обработки). – Режим доступа: по подписке: - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=496505 (дата обращения 04.03.2020). – Библиогр.: с.171-178. – ISBN 978-5-94836-506-0. – Текст : электронный.

5. Интерактивные системы Scilab, Matlab, Mathcad : учебное пособие / И.Е. Плещинская, А.Н. Титов, Е.Р. Бадертдинова, С.И. Дуев; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2014. - 195 с. : табл., ил. - Режим доступа: по подписке: - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428781. (дата обращения 04.03.2020). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-7882-1715-4. – Текст : электронный.