Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Новокузнецкий институт (филиал)

Факультет информатики, математики и экономики
Кафедра математики, физики и математического моделирования

Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

*Методические указания к выполнению практических работ
для обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование
и информационные технологии»*

Новокузнецк

2020

УДК [378.147:531.011](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.21я73
В 99

Вячкина Е. А., Вячкин Е. С.

В 99 Математические модели прикладной механики: методические указания к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии» / Е.А. Вячкина, Е. С. Вячкин; Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк : НФИ КемГУ, 2020 – 80 с.

Методические указания содержат описания практических работ к шести разделам дисциплины с подробным решением демонстрационных примеров, задания для решения на практических занятиях, указания к их выполнению; вопросы для самопроверки, список основной и дополнительной литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Математическое моделирование и информационные технологии».

Рекомендовано на заседании кафедры математики, физики и математического моделирования
Протокол № 7 от 21.02.2020

Заведующий кафедрой МФММ

Е.В. Решетникова

Утверждено методической комиссией факультета информатики, математики и экономики
Протокол № 7 от 12.03.2020

Председатель методической комиссии ФИМЭ

/ Г.Н. Бойченко

УДК [378.147:531.011](072)
ББК 74.484(2Рос-4Кем)я73+22.21я73
В 99

Текст представлен в авторской редакции

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.. 4
РАЗДЕЛ 1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.. 5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.1. АКСИОМЫ СТАТИКИ. СТАТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ... 5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.2. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ.. 12
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.3. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ 17
РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА...................... 21
ПРАКТИЧЕКАЯ РАБОТА 2.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ 21
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2.2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ........................ 26
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2.3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ...................................... 30
РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ... 35
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3.1. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. АБСОЛЮТНОЕ, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ТЕОРЕМЫ О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ. КОРИОЛИСОВО УСКОРЕНИЕ. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ. 35
РАЗДЕЛ 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА 42
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.1. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 42
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.2. КОЛЕБАНИЯ... 48
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.3. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА СО СВЯЗЯМИ. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ........................ 53
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО И СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ............... 57
РАЗДЕЛ 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ.. 60
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5.1. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ 60
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ 63
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5.3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ СИЛ. ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ 68
РАЗДЕЛ 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ 72
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ. 72
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА 80

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к практическим занятиям предназначены для студентов очной формы обучения направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика для изучения дисциплины «Математические модели прикладной механики».

Дисциплина «Математические модели прикладной механики» включена в образовательную программу 01.03.02 Прикладная математика и информатика профиля «Математическое моделирование и информационные технологии» для подготовки бакалавров, входит в состав обязательных дисциплин. Данная дисциплина является комплексной, объединяющей идеи алгебро-логического направления, уравнений математической физики и численных методов решения краевых задач. Изучение дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, полученных в дисциплинах: «Физика», «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Дискретная математика» и «Численные методы».

Целью практических занятий по дисциплине «Математические модели прикладной механики» является актуализация теоретических сведений, излагаемых в лекционном курсе, и выработка практических навыков построения математических моделей явлений, изучаемых естественными науками, что позволит студенту самостоятельно разрабатывать математические модели при написании выпускной квалификационной работы и применять полученные знания в своей профессиональной деятельности.

РАЗДЕЛ 1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.1. АКСИОМЫ СТАТИКИ. СТАТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Аксиомы статики.
2. Понятие связей. Односторонние и двусторонние связи.
3. Принцип освобождаемости от связей.
4. Принцип затвердевания.
5. Статический нуль.
6. Как определяется равнодействующая системы сходящихся сил?
7. При каком условии твердое тело, к которому приложены три параллельные силы, находится в равновесии?

Демонстрационные примеры

Пример 1

Однородный шар весом $\boldsymbol{P}$ = 20 кг опирается в точке $\boldsymbol{A}$ на гладкую наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, а в точке $\boldsymbol{B}$ на выступ, находящийся на одной горизонтали с точкой $\boldsymbol{A}$ (рис. 1 а).

Определить опорные реакции наклонной плоскости и выступа.

Решение. Рассмотрим равновесие шара. К шару приложена одна активная сила – его вес $\boldsymbol{P}$, направленный по вертикали вниз. Шар находится в равновесии при наличии двух связей: наклонной плоскости и выступа. Применив закон освобождаемости, заменим действие на шар мысленно отброшенных связей соответствующими реакциями. Реакция $\boldsymbol{R_A}$ гладкой наклонной плоскости направлена к ней перпендикулярно. В точке $\boldsymbol{B}$ проведем касательную (рис. 1 б) и направим опорную реакцию перпендикулярно к касательной.

Следовательно, линия действия $\boldsymbol{R_B}$ проходит через центр тяжести шара $\boldsymbol{C}$.

Теперь можно рассмотреть шар как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием плоской системы трех сил: $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$, линии действия которых пересекаются в точке $\boldsymbol{C}$. Для равновесия шара необходимо и достаточно, чтобы сумма этих трех сил равнялась нулю. Поэтому силы образуют замкнутый силовой треугольник.

Построение силового треугольника начнем с силы $\boldsymbol{P}$, неизвестной как по величине, так и по направлению. Из произвольной точки $\boldsymbol{O}$ (рис. 1 в) проведем вектор, который равен силе $\boldsymbol{P}$. К концу силы $\boldsymbol{P}$ надо приложить начало силы $\boldsymbol{R_A}$ или $\boldsymbol{R_B}$. Выбираем в качестве следующей стороны силового треугольника реакцию выступа $\boldsymbol{R_B}$. Так как направление силы $\boldsymbol{R_B}$ известно, то проведем через точку $\boldsymbol{A}$ прямую $\boldsymbol{AK}$, параллельную линии действия реакции $\boldsymbol{R_B}$. Для последующего построения силового треугольника надо к концу $\boldsymbol{R_B}$ приложить начало силы $\boldsymbol{R_A}$. Сделать это невозможно, так как модуль силы $\boldsymbol{R_B}$ неизвестен. Несмотря на это, построение силового треугольника можно завершить. Следует учесть, что при равновесии шара силовой треугольник должен быть замкнут. При этом конец вектора реакции $\boldsymbol{R_A}$ должен совместиться с началом вектора силы $\boldsymbol{P}$, т. е. попасть в точку $\boldsymbol{O}$. Проведем через точку $\boldsymbol{O}$ прямую $\boldsymbol{OL}$, параллельную линии действия силы $\boldsymbol{R_A}$. Точка $\boldsymbol{B}$ пересечения прямых $\boldsymbol{AK}$ и $\boldsymbol{OL}$ определяет положение третьей вершины $\boldsymbol{B}$ силового треугольника $\boldsymbol{OAB}$. В построенном треугольнике должно иметь место единое направление стрелок, т. е. в каждой из вершин должен быть расположен конец только одной из трех сил.

Для определения модулей опорных реакций $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$ остается решить силовой треугольник $\boldsymbol{OAB}$. Нетрудно увидеть из рисунка 1в, что углы, образованные линией действия силы $\boldsymbol{P}$ с линиями действия реакций $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$**,** равны 60°, таким образом, силовой треугольник оказывается равносторонним, т. е. $\boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{R_B} = \boldsymbol{P} = 20$ кг.

Если бы при построении силового треугольника мы к концу силы $\boldsymbol{P}$ приложили начало силы $\boldsymbol{R_A}$, а не $\boldsymbol{R_B}$, то получили бы силовой треугольник $\boldsymbol{CAD}$ (рис. 1 г), равный силовому треугольнику $\boldsymbol{OAB}$. Решение этого силового треугольника привело бы к тем же результатам.

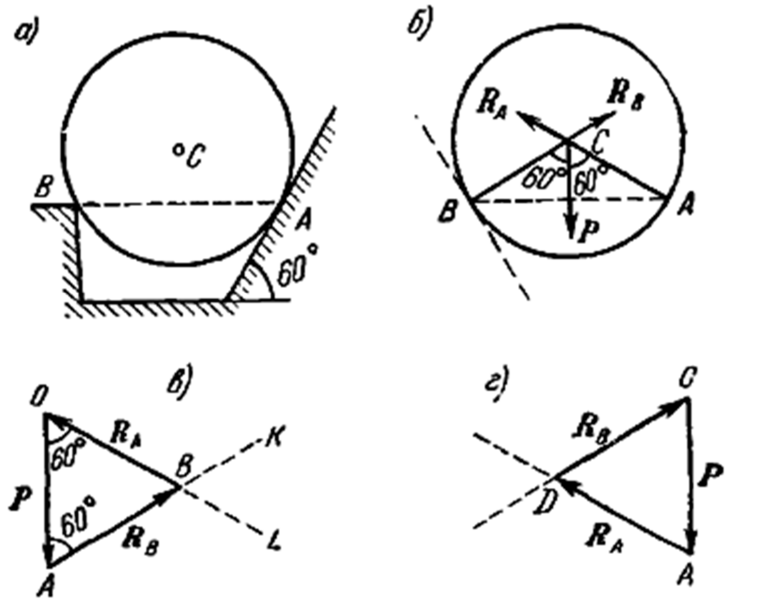


Рис. 1. Пример 1

<u>Пример 2</u>

На рисунке 2 изображены четыре силы F_1, F_2, F_3 и F_4, приложенные к твердому телу в точке $\boldsymbol{O}$ и лежащие в одной плоскости.

Определить модуль и направление силы F_5, которую следует приложить в точке $\boldsymbol{O}$ для того, чтобы твердое тело находилось в равновесии. Дано: F_1 = 2 Н, $F_2 = F_3 = 4$ Н, F_4 = 6 Н.

Решение. Для решения задачи методом проекций направим оси декартовых координат: ось x – по горизонтали направо, ось y – по вертикали вверх.

Уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси x и y имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0\ ,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0\ ,$$

или

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} = 0, \qquad (1)$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} = 0, \qquad (2)$$

где F_{5x} и F_{5y} – проекции неизвестной силы F_5 на оси x и y.

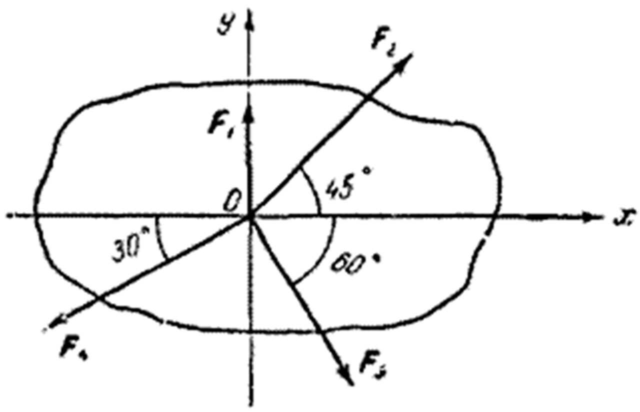


Рис. 2. Пример 2

Т. к. число неизвестных равно числу уравнений, то задача является статически определенной.

Вычислим проекции четырех заданных сил F_1, F_2, F_3 *и* F_4 на оси x и y:

$$F_1 = 0,\ \ F_{2x} = F_2 = cos45° = 2\sqrt{2}, F_{3x} = F_3 cos60° = 2,$$

$$F_{4x} = -F_4 cos30° = -3\sqrt{3},$$

$$F_{1y} = F_1 = 2,\ F_{2y} = F_3 = cos45° = 2\sqrt{2},$$

$$F_{3y} = -F_3 cos30° = -2\sqrt{3},\ \ \ F_{4y} = -F_4 cos60° = -3.$$

Подставляя эти значения в уравнения (1) и (2), получим:

$$2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3} + F_{5x} = 0, \qquad (3)$$

$$2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + F_{5y} = 0. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем F_{5x} = 0,37, F_{5y} = 1,64. Модуль искомой силы F_5 равен:

$$F_5 = \sqrt{F_{5x}^2 + F_{5y}^2} = 1.68 \text{ Н}.$$

Вычислим направляющие косинусы:

$$\cos(x, \wedge F_5) = \frac{F_{5,x}}{F_5} = \frac{0{,}37}{1{,}68} = 0{,}22,\ \cos(x, \wedge F_5) = \frac{F_{5,y}}{F_5} = \frac{1{,}64}{1{,}68} = 0{,}98.$$

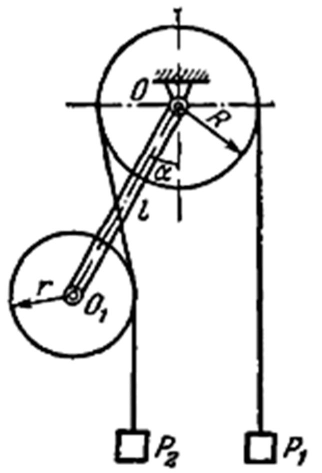
Откуда

$$(x, \wedge F_5) \approx 77°, \ (y, \wedge F_5) \approx 13°.$$

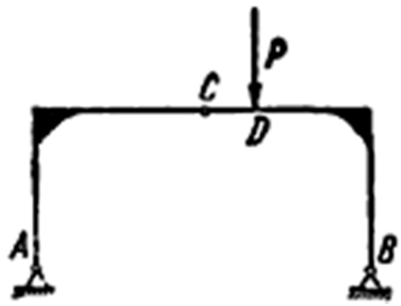
При геометрическом методе решения этой задачи пришлось бы построить силовой треугольник и затем определить модуль и направление силы F_5.

Задания для решения

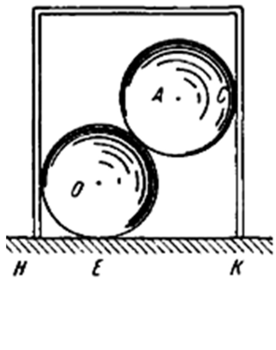
1. Через блок с неподвижной осью $\boldsymbol{O}$ и радиусом $\boldsymbol{R}$ перекинута нить, к концам которой подвешены два одинаковых груза $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$. Правый конец нити свисает вертикально. Левый конец огибает блок с подвижной осью $\boldsymbol{O_1}$ и радиусом $\boldsymbol{r}$. Вес блока в подвижной осью - $\boldsymbol{g}$. Ось нижнего блока насажена на конец стержня длиной $\boldsymbol{l}$, другой конец которого закреплен на оси верхнего блока. Пренебрегая весом стержня, определить угол α, который образует стержень с вертикалью в положении равновесия, и усилие в стержне $\boldsymbol{OO_1}$. $\boldsymbol{P_1} = \boldsymbol{P_2}$ = 10 кг, $\boldsymbol{g}$ = 4 кг, $\boldsymbol{R}$ = 4 см, $\boldsymbol{r}$ = 3 см, $\boldsymbol{l}$=10 см.



2. Рама состоит из двух жестких частей, $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$, соединенных шарниром $\boldsymbol{C}$ и прикрепленных к фундаменту шарнирными опорами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Определить реакции в шарнирах $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, если в точке $\boldsymbol{D}$ приложена вертикальная сила $\boldsymbol{P}$ = 1 Н. Задачу решить графически.



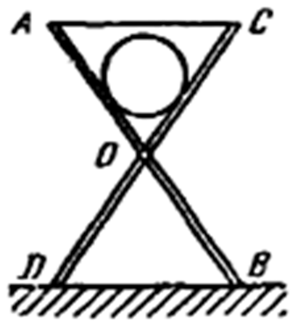
3. Цилиндрический стакан радиуса $\boldsymbol{R}$ поставлен открытой стороной на гладкий горизонтальный



пол. Внутри стакана находятся два одинаковых шара радиуса $\boldsymbol{r}$ и весом $\boldsymbol{P}$ каждый.

Определить вес $\boldsymbol{Q}$ цилиндрического стакана, при котором шары не опрокинут его. Стенки стакана абсолютно гладкие.

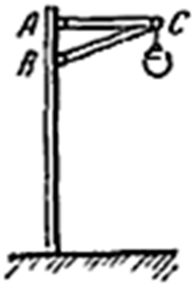
4. Два однородных стержня $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$ длиной $2\boldsymbol{l}$ и весом $\boldsymbol{P}$ каждый опираются в точках $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ на гладкий горизонтальный пол и соединены посередине шарниром $\boldsymbol{O}$. Концы стержней $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$ соединены нитью. Между верхними половинами стержней лежит гладкий диск радиусом $\boldsymbol{r}$ и весом $\boldsymbol{Q}$. Угол $\boldsymbol{DOB} = 2\alpha$. Определить натяжение нити.



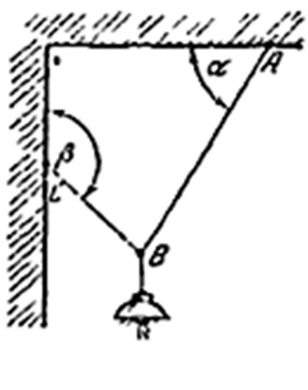
5. Два груза, в 10 Н и 5 Н, висящие на одной веревке, укреплены на ней в разных местах, причем больший груз висит ниже меньшего. Каково натяжение веревки, если верхний конец ее прикреплен к неподвижной точке?

6. На дне шахты находится человек весом 64 кг; посредством каната, перекинутого через неподвижный блок, человек удерживает груз в 48 кг. Какое давление оказывает человек на дно шахты? Какой наибольший груз он может удержать с помощью каната?

7. Уличный фонарь веса 300 Н подвешен к вертикальному столбу с помощью горизонтальной поперечины $\boldsymbol{AC} = 1{,}2$ м и подкоса $\boldsymbol{BC} = 1{,}5$ м. Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$, считая крепления в точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ шарнирными.

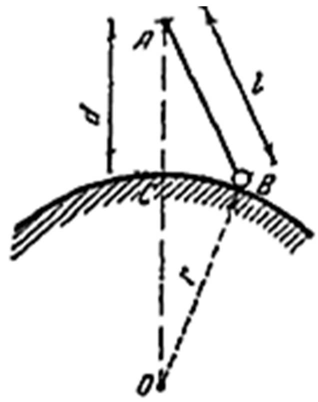


8. Электрическая лампа весом 20 Н подвешена к потолку на шнуре $\boldsymbol{AB}$ и затем оттянута к стене

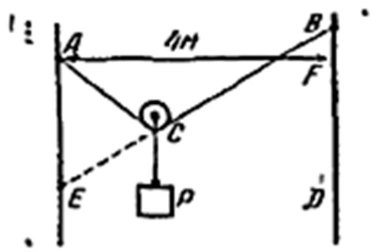


веревкой ***BC***. Определить натяжения $\boldsymbol{T_A}$ шнура ***AB*** и $\boldsymbol{T_C}$ веревки ***BC***, если известно, что угол α = 60°, а угол β = 135°. Весом шнура и веревки пренебречь.

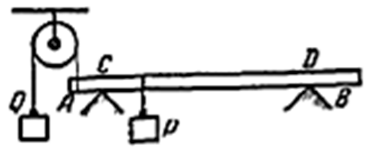
9. Шарик ***B*** веса ***P*** подвешен к неподвижной точке ***A*** нитью ***AB*** и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса ***r***; расстояние точки ***A*** от поверхности сферы ***AC*** = ***d***, длина нити ***AB*** = ***l***, прямая ***AO*** вертикальна. Определить натяжение ***T*** нити и реакцию ***Q*** сферы. Радиусом шарика пренебречь.



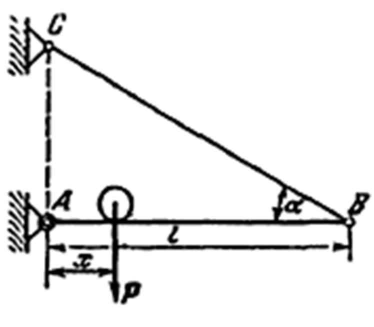
10. Блок ***C*** с грузом ***P*** = 80 кН может скользить вдоль гибкого троса ***ACB***, концы которого ***A*** и ***B*** прикреплены к стенам. Расстояние между стенами 4 м, длина троса 5 м. Определить натяжение троса при равновесии блока с грузом, пренебрегая весом троса и трением блока о трос.



11. Балка ***AB*** длиной 10 м и веса 2 кН лежит на двух опорах ***C*** и ***D***. Опора ***C*** отстоит от конца ***A*** на 2 м, опора ***D*** от конца ***B*** – на 3 м. Конец балки ***A*** оттягивается вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз ***Q*** веса 3 кН. На расстоянии 3 м от конца ***A*** к балке подвешен груз ***P*** веса 8 кН. Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.

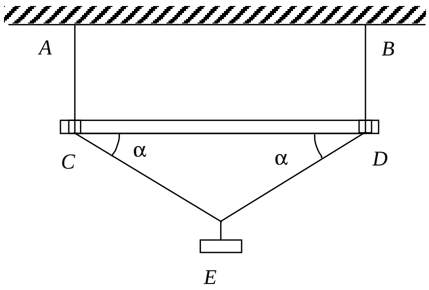


12. Горизонтальная балка крана, длина которой равна ***l***, у одного конца укреплена шарнирно, а у другого конца ***B*** подвешена к стене посредством тяги ***BC***, угол наклона которой к горизонту равен α. По балке может перемещаться груз

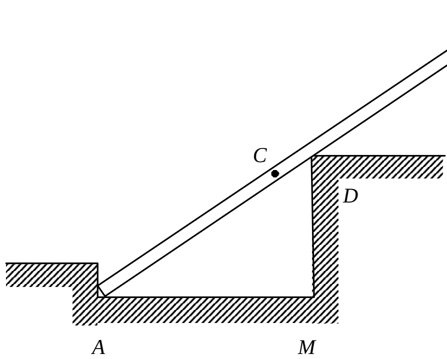


P, положение которого определяется переменным расстоянием ***x*** до шарнира ***A***. Определить натяжение ***T*** тяги ***BC*** в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь.

13. Жесткая балка подвешена на двух вертикальных нитях, а к ней подвешен груз весом ***G***. Используя принципы затвердевания и освобождения от связей, найти натяжение нитей, если собственный вес балки равен ***Q***.



14. Однородная балка ***AB*** длиной ***l*** = 4 м и весом ***P*** = 40 кг упирается концом ***A*** в выступ пола, а промежуточной точкой ***D*** опирается о ребро ступени. Балка образует угол 30° с горизонтом, ***AM*** = 2 м. Определить силы опорных реакций в точках ***A*** и ***D***.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.2. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ СИЛ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Что такое момент силы относительно точки?
2. Изменится ли момент силы относительно заданной точки при переносе силы вдоль линии её действия?
3. Чему равен момент силы относительно оси?
4. Что такое главный вектор и главный момент системы сил?
5. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей.
6. В каком случае система сил приводится к равнодействующей?

Демонстрационные примеры

Пример 1

Вычислить моменты относительно осей координат $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ силы $\boldsymbol{F}$, направленной по диагонали боковой грани прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рис. 3, если длина ребра, параллельного оси $\boldsymbol{x}$, равна a.

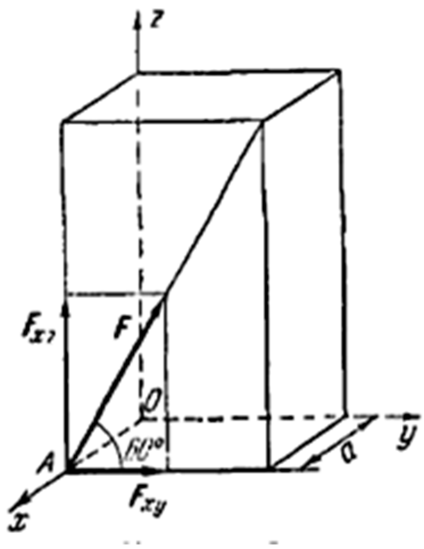


Рис. 3. Пример 1

Решение. Линия действия силы $\boldsymbol{F}$ пересекает ось $\boldsymbol{x}$, поэтому момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси $\boldsymbol{x}$ равен нулю:

$$m_x(F) = 0.$$

Для определения момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси y спроектируем эту силу на плоскость $\boldsymbol{xz}$, перпендикулярную к оси $\boldsymbol{y}$, т. е. определим F_{xz}. Нетрудно видеть, что $F_{xz} = F \cos 30°$. Остается взять момент силы F_{xz} относительно точки пересечения оси $\boldsymbol{y}$ с перпендикулярной плоскостью $\boldsymbol{xz}$, т. е. точки $\boldsymbol{O}$. Плечом является ребро $\boldsymbol{OA} = a$. С конца оси $\boldsymbol{y}$ видно, что сила F_{xz} стремится повернуть тело в плоскости $\boldsymbol{xz}$ вокруг точки $\boldsymbol{O}$ по часовой стрелке, следовательно, момент силы отрицателен. Итак,

$$m_y(F) = -F_{xz}a = -Fa\cos 30° = -\frac{Fa\sqrt{3}}{2}.$$

Остается определить момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси $\boldsymbol{z}$. Для этого найдем величину проекции F_{xy} силы $\boldsymbol{F}$ на плоскость $\boldsymbol{xy}$, перпендикулярную к оси $\boldsymbol{z}$. Легко видеть, что $F_{xy} = F \cos 60°$. Теперь вычисляем момент силы F_{xy} относительно точки $\boldsymbol{O}$ пересечения оси $\boldsymbol{z}$ с перпендикулярной плоскостью $\boldsymbol{xy}$. Плечом оказывается отрезок $\boldsymbol{OA} = a$. Знак момента положителен, так как с конца оси $\boldsymbol{z}$ видно, что сила F_{xy} стремится повернуть тело в плоскости $\boldsymbol{xy}$ вокруг точки $\boldsymbol{O}$ против часовой стрелки.

Значит,

$$m_z(F) = -F_{xy}a = \frac{Fa}{2}.$$

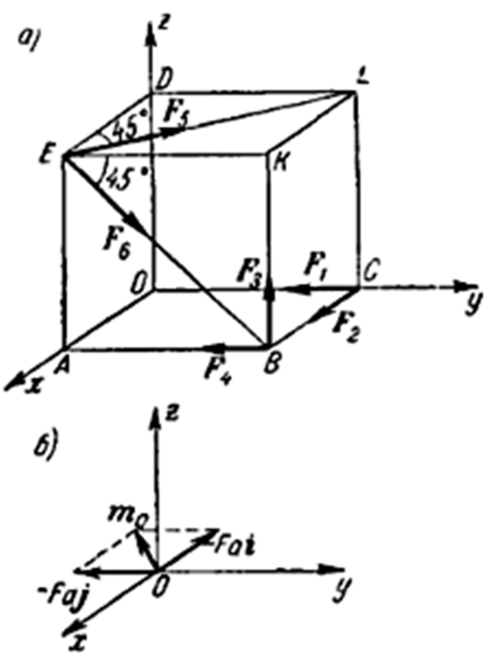


Рис. 4. Пример 2

Пример 2

Привести к простейшему виду систему сил F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6, приложенных к вершинам $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ куба, ребро которого равно a; $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \boldsymbol{F}$; $F_5 = F_6 = \boldsymbol{F}\sqrt{2}$. Направления сил указаны на рис. 4 а.

Решение. Принимаем за центр приведения точку $\boldsymbol{O}$. Направляем оси $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ вдоль ребер куба (рис. 4а). Определим проекции V_1, V_2, V_3 главного вектора $\boldsymbol{V}$ на оси $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$:

$$V_x = \sum F_{kx} = F_2 - F_5 \cos 45°,$$

$$V_y = \sum F_{ky} = -F_1 - F_4 + F_5 \cos 45° + F_6 \cos 45°,$$

$$V_z = \sum F_{kz} = F_3 - F_6 \cos 45°.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем:

$$V_x = V_y = V_z = 0.$$

Следовательно, главный вектор V системы сил равен нулю.

Переходим к определению главного момента m_O. Находим сначала главные моменты m_x, m_y, m_z системы сил относительно осей $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$:

$$m_x = \sum m_x(F_k) = F_3 a - F_5 a \cos 45° - F_6 \sin 45°,$$

$$m_y = \sum m_y(F_k) = -F_3 a - F_5 a \cos 45° + F_6 \cos 45°,$$

$$m_z = \sum m_z(F_k) = -F_2 a - F_4 a + F_6 a \cos 45° + F_5 a \sin 45°.$$

Подставив значения модулей данных сил, имеем:

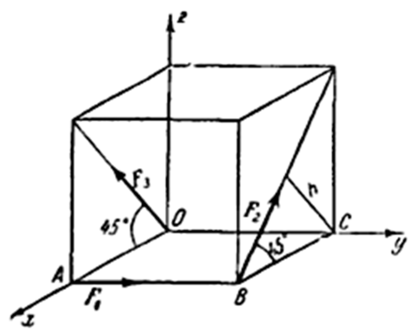
$$m_x = -F \cdot a,\ m_y = -F \cdot a,\ m_z = 0.$$

Таким образом, главный момент $m_0 = -F \cdot a \cdot i - F \cdot a \cdot j$, а его модуль $m_O = Fa\sqrt{2}$.

Итак, данная система сил оказалась приведенной к силе $\boldsymbol{V} = 0$ и паре сил с моментом $m_0 = -F \cdot a \cdot i - F \cdot a \cdot j$, изображенным на рис. 4 б (пара сил расположена в плоскости, перпендикулярной к m_O, так что пара с конца m_O видна направленной против часовой стрелки).

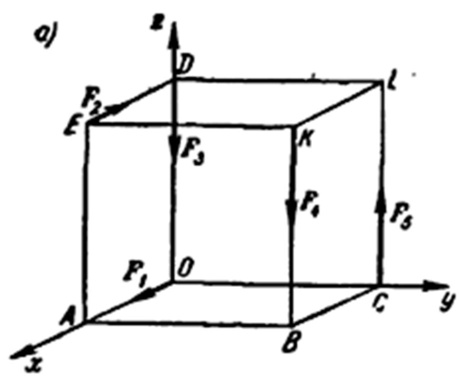
Задания для решения

1. Вычислить главные моменты относительно осей $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ и точки $\boldsymbol{O}$ пространственной системы сил, изображенной на рисунке. Сила F_1 лежит на ребре куба, а силы F_2, и F_3 – на диагоналях его боковых граней. Ребро куба $\boldsymbol{a}$ равно 2 м, F_1 = 10 Н, F_2 = F_3 = 12√2 Н.

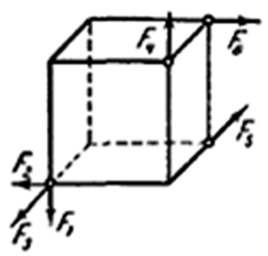


2. Привести к простейшему виду систему сил F_1, F_2, F_3 F_4 и F_5, приложенных в вершинах $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{C}$ прямоугольного параллелепипеда ***OABCDEKL***; $F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F$, $F_2 = 2F$, $\boldsymbol{OC} = a$, $\boldsymbol{OA} = a/2$.

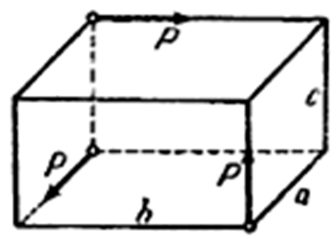
3. Привести к простейшему виду систему сил, изображенных на рисунке. Силы приложены к вершинам куба, ребро которого равно a; $F_1 = F_2 = F_3 = F$, $F_4 = F_5 = 2F$.



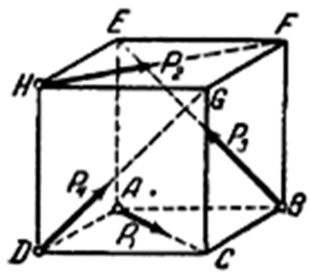
4. К вершинам куба приложены по направлениям ребер силы, как указано на рисунке. Каким условиям должны удовлетворять силы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6, чтобы они находились в равновесии?



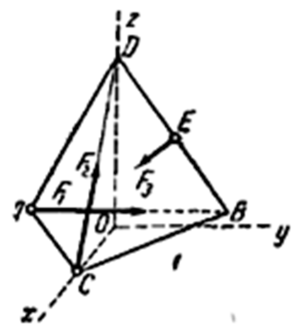
5. По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямоугольного параллелепипеда действуют три равные силы $\boldsymbol{P}$. Какое соотношение должно существовать между ребрами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, чтобы эта система приводилась к одной равнодействующей?



6. К четырем вершинам $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ куба приложены четыре равные силы: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, причем сила P_1 направлена по $\boldsymbol{AC}$, P_2 – по $\boldsymbol{HF}$, P_3 – по $\boldsymbol{BE}$ и P_4 – по $\boldsymbol{DO}$. Привести эту систему к простейшему виду.



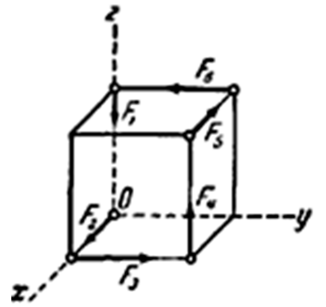
7. К правильному тетраэдру $\boldsymbol{ABCD}$, ребра которого равны $\boldsymbol{a}$, приложены силы: F_1 по ребру $\boldsymbol{AB}$, F_2 по ребру $\boldsymbol{CD}$ и F_3 в точке $\boldsymbol{E}$ — середине ребра $\boldsymbol{BD}$. Величины сил F_1 и F_2 какие угодно, а проекции силы F_3 на оси $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ равны:



$$+F_2\frac{5\sqrt{3}}{6};\quad -\frac{F_2}{2};\quad -F_2\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Приводится ли эта система сил к одной равнодействующей? Если приводится, то найти координаты точки пересечения линии действия равнодействующей с плоскостью $\boldsymbol{Oxz}$.

8. К вершинам куба, ребра которого имеют длину 5 см, приложены, как указано на чертеже, шесть равных сил, по 2 Н каждая. Привести эту систему к простейшему виду.



9. По ребрам прямоугольного параллелепипеда, соответственно равным 10, 4 и 5 м, действуют шесть сил, указанных на чертеже: P_1 = 4 Н, P_2 = 6 Н, P_3 = 3 Н, P_4 = 2 Н, P_5 = 6 Н, P_6 = 8 Н. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью $\boldsymbol{Oxy}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1.3. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Дать определение статически определимой фермы.
2. В чем заключается метод вырезания узлов?
3. В чем заключается метод Риттера?

Демонстрационный пример

Определить усилия в стержнях фермы методом сечений (рис. 5а).

Решение. Для определения усилий в стержнях фермы сначала надо определить реакции опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие па ферму реакциями $\boldsymbol{R_A}$ и $\boldsymbol{R_B}$. Рассматриваем ферму как твердое тело, находящееся в равновесии под действием семи активных сил и двух неизвестных реакций опор. Ввиду симметрии фермы нагрузки реакции опор равны друг другу, и каждая по величине равна 6$\boldsymbol{P}$.

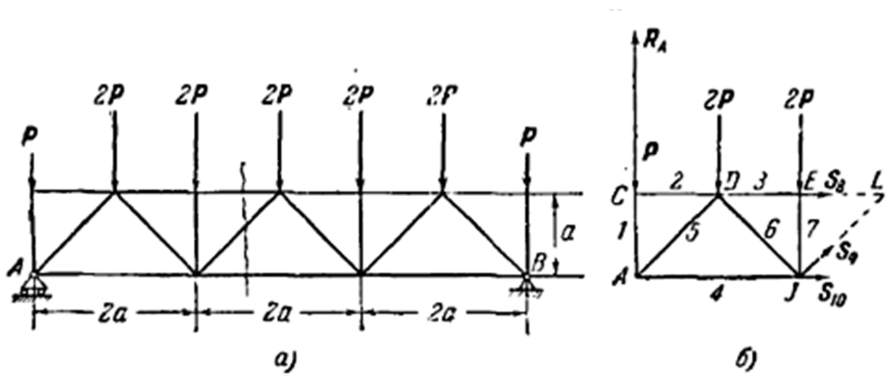


Рис. 5. Пример

После того как реакции опор определены, переходим к определению усилий в стержнях фермы. Разрезаем мысленно ферму по стержням, усилия в которых надо определить (рис. 5а), например, по стержням 8, 9, 10, и удаляем правую часть фермы, заменив действие ее реакциями стержней $\boldsymbol{S_8}$, $\boldsymbol{S_9}$, $\boldsymbol{S_{10}}$. Направим эти реакции вдоль перерезанных стержней от узлов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{J}$, предположив таким образом, что стержни 8, 9, 10 растянуты. Теперь левая часть фермы (рис. 5б) находится в равновесии под действием реакции опоры $\boldsymbol{R_A}$, трех активных сил и реакций стержней $\boldsymbol{S_8}$, $\boldsymbol{S_9}$, $\boldsymbol{S_{10}}$. Чтобы найти величины этих реакций, составим уравнения равновесия для левой части фермы, приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно точек $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{L}$, в которых пересекаются линии действия двух искомых неизвестных сил. Благодаря этому уравнение моментов будет содержать только одно неизвестное. Так, уравнение моментов относительно точки $\boldsymbol{J}$ будет:

$$R_A 2a - P2a - 2Pa + S_8 a = 0,$$

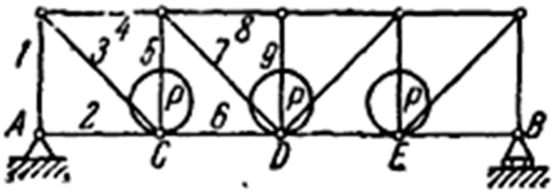
$$S_8 = -8P.$$

Отрицательное значение реакции $\boldsymbol{S_9}$ говорит о том, что в действительности эта реакция направлена в сторону, противоположную принятой, т. е. к узлу $\boldsymbol{J}$, и стержень 9 сжат. Аналогично могут быть определены методом сечений усилия в любых стержнях этой фермы.

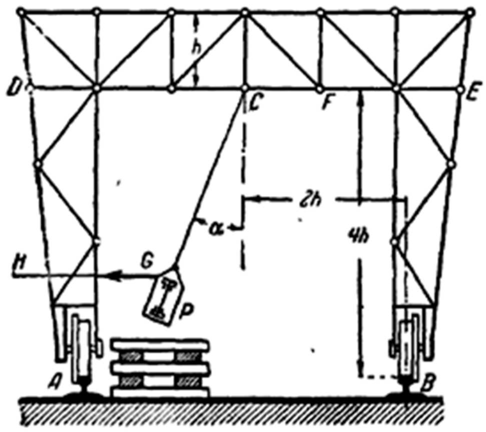
Задания для решения

1. В мостовой ферме, изображенной на чертеже, узлы $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ загружены одинаковой вертикальной нагрузкой $\boldsymbol{P}$ = 10 т. Наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти

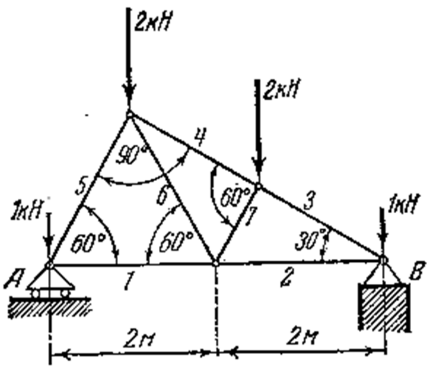
усилия в стержнях 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, вызываемые данной нагрузкой.



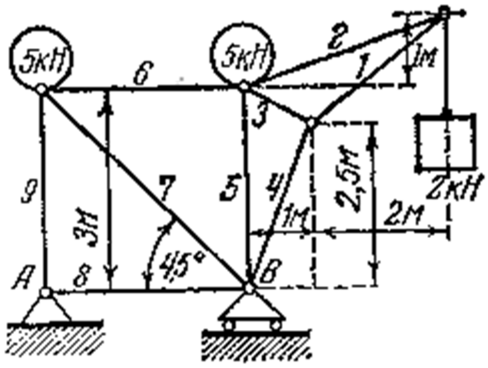
2. Для сборки моста устроен временный деревянный кран, перемещающийся по рельсам ***A*** и ***B*** на колесах. К среднему узлу ***C*** нижнего пояса ***DE*** крана прикреплен блок, служащий для поднятия тяжестей с помощью цепи. Вес поднимаемого с подмостей груза ***P*** = 5 т, причем в момент отделения его от подмостей направление цепи составляет с вертикалью угол α = 20°; во избежание колебаний груза он оттягивается горизонтальным канатом ***GH***. Предполагая, что горизонтальная составляющая натяжения цепи воспринимается одним правым рельсом ***B***, определить усилие $\boldsymbol{S_1}$ в горизонтальном стержне ***CF*** в момент отделения груза от подмостей и сравнить его с тем усилием $\boldsymbol{S_2}$, которое получилось бы при угле α = 0°. Размеры указаны на чертеже.



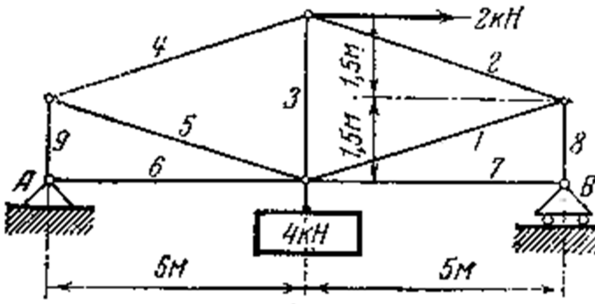
3. Определить опорные реакции и усилия в стержнях пильчатой фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.



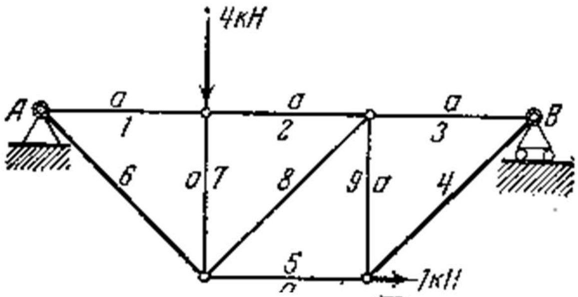
4. Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы крана, изображенного вместе с приложенными к нему силами на рисунке.



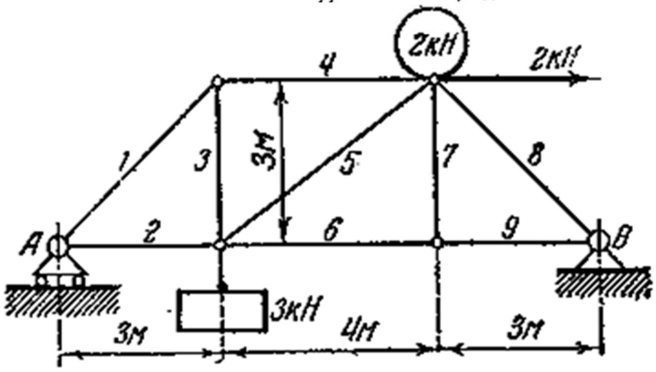
5. Определить опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на рисунке.



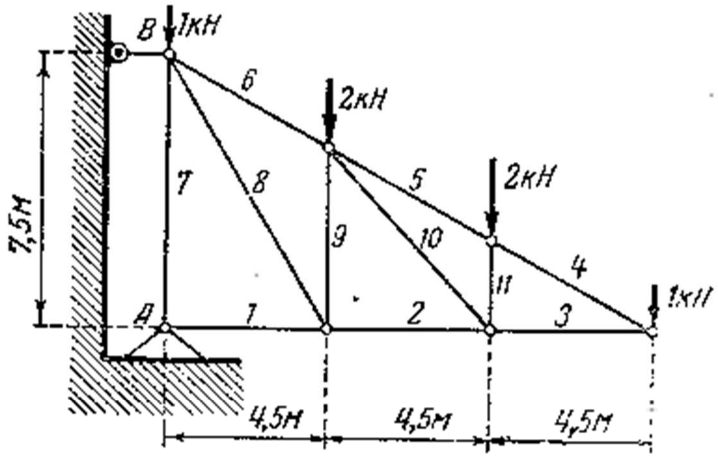
6. Определить опорные реакции и усилия в стержнях раскосой фермы, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



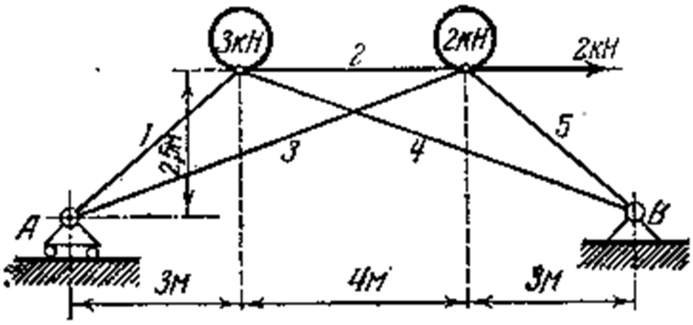
7. Определить опорные реакции и усилия в стержнях мостовой фермы, которая вместе с приложенными к ней силами изображена на рисунке.



8. Определить опорные реакции и усилия в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.



9. Определить опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с приложенными к нему силами на рисунке. Стержни 3 и



4 не соединены шарниром в точке их пересечения.

РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПРАКТИЧЕКАЯ РАБОТА 2.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Как вектор скорости направлен по отношению к годографу радиус-вектора?
2. Как вектор ускорения направлен по отношению к годографу радиус-вектора и к годографу вектора скорости?
3. В какой плоскости расположен вектор ускорения?
4. Что характеризует касательное и нормальное ускорение точки?
5. Чем отличается график пути от графика движения точки?

Демонстрационные примеры

Пример 1

Точка ***M*** движется согласно уравнениям:

$$x = a\cos kt, \tag{1}$$

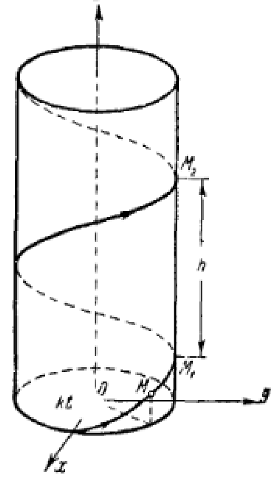
$$y = a\sin kt, \tag{2}$$

$$z = bt, \tag{3}$$

где ***a, k, b*** – постоянные.

Определить уравнения траектории точки и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Решение. Для определения уравнений траектории точки находим из уравнения (3) время и вносим это значение в уравнения (1) и (2).



Тогда

$$x = a\,cos\frac{k}{b}z,$$

$$y = a\,sin\frac{k}{b}z.$$

Это – уравнение винтовой линии. Из уравнений (1) и (2) видно, что проекция точки на плоскость $\boldsymbol{xy}$ описывает окружность за время 2π /k. За это время проекция точки на ось $\boldsymbol{z}$ переместится на величину

$$h = \frac{2\pi}{k} b,$$

называемую шагом винтовой линии. Винтовая линия навивается на поверхность цилиндра радиуса a.

Для нахождения закона движения точки по траектории находим:

$$dx = -ak \sin kt \cdot dt,$$

$$dy = aks \cos kt \cdot dt,$$

$$dz = bdt.$$

Тогда дифференциал дуги будет:

$$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\,\mathrm{dt}.$$

Интегрируя это равенство, имеем:

$$\sigma = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\, t + C. \tag{4}$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования воспользуемся начальными условиями. При $\boldsymbol{t}$ = 0, $\boldsymbol{\sigma}$ = 0, так как отсчет дуги начинается одновременно с отсчетом времени. Подставляя эти начальные условия в уравнение (4), находим:

0 = 0 + C.

Таким образом, закон движения точки по винтовой линии запишется в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\, t\,,$$

если отсчитывать положительные значения дуги против часовой стрелки. Движение начинается из точки x_0 = a, y_0 = 0, z_0 = 0 и происходит по винтовой линии против часовой стрелки.

<u>Пример 2</u>

Точка $\boldsymbol{M}$ совершает колебательное движение согласно уравнениям:

$$x = a\cos(2kt - \varepsilon), \tag{1}$$

$$y = b\cos kt. \tag{2}$$

Определить траекторию точки $\boldsymbol{M}$. При каких значениях ε траектория точки обращается в параболу? Найти скорость точки в начальный момент времени.

Решение. Для определения траектории точки надо исключить из уравнений движения время. Для этого преобразуем первое уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a[\cos 2kt \cos\varepsilon + \sin 2kt \sin\varepsilon] = \\ &= a[\cos^2 kt \cos\varepsilon - \sin^2 kt \cos\varepsilon + 2\sin kt \cos kt \sin\varepsilon]. \end{aligned} \tag{3}$$

Из второго уравнения находим:

$$\cos kt = \frac{y}{b}, \qquad \sin kt = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получаем уравнение траектории точки M:

$$\frac{x}{a} = \left(2\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\cos\varepsilon + 2\frac{y}{b}\sin\varepsilon\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}. \tag{4}$$

Из уравнений (3), (4) следует, что при любых значениях ε координаты x и y не превышают соответственно значений $\pm a$ и $\pm b$. Таким образом, траектории точки $\boldsymbol{M}$ вписываются в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Уравнение (4) обращается в уравнение параболы при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \pi$:

$$y^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 \pm \frac{x}{a}\right).$$

Переходим к определению скорости точки $\boldsymbol{M}$. Проекции этой скорости равны первым производным от координат по времени:

$$\begin{gathered} \upsilon_x = \dot{x} = -2ak\sin(2kt - \varepsilon), \\ \upsilon_y = \dot{y} = -bk\sin kt. \end{gathered}$$

Находим значение этих проекций в начальный момент времени, полагая $\boldsymbol{t} = 0$:

$$\begin{aligned} \upsilon_{x0} &= -2ak\sin\varepsilon, \\ \upsilon_{y0} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, в начальный момент времени скорость точки направлена по оси x, а ее величина определяется по формуле (5).

Задания для решения

1. Точка движется прямолинейно согласно уравнению:
$$x = 3\sin 2\pi t - 4\cos 2\pi t.$$
Доказать, что движение точки является гармоническим колебательным движением. Определить амплитуду и период колебаний. Найти скорость и ускорение точки.

2. Дано уравнение движения точки:
$$x = 2\sin^2\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$
Доказать, что точка совершает гармоническое колебательное движение. Определить амплитуду, период колебаний, а также скорость и ускорение точки.

3. Точка движется согласно уравнению $s = 48t - 4t^3$, где координата s измеряется в метрах, а время – в секундах. Определить величину скорости точки в моменты времени $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с, $t_3 = 3$ с, $t_4 = 4$ с. Найти среднюю скорость точки за первую, вторую, третью и четвертую секунды. Найти среднюю скорость точки за четыре секунды. Определить момент времени и расстояние от начала отсчета пути, когда точка остановится.
4. Точка M_1 брошена вертикально вверх. Уравнение движения точки при отсутствии сопротивления воздуха имеет вид:
$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$
где v_0 и g – постоянные коэффициенты.
Определить скорость и ускорение точки, максимальную высоту подъема точки и время, когда точка достигнет наивысшего положения.

5. По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.
   1) $x = 3t - 5$, $y = 4 - 2t$.
   2) $x = 2t$, $y = 8t^2$.
   3) $x = 5 \sin 10t$, $y = 3 \cos 10t$.
   4) $x = 2 - 3 \cos 5t$, $y = 4 - \sin (5t - 1)$.
   5) $x = 1/2\ (e^t + e^{-t})$, $y = 1/2\ (e^t - e^{-t})$.

6. По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки:
   1) $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.
   2) $x = 3\sin t$, $y = 3\cos t$.
   3) $x = a \cos^2 t$, $y = a \sin^2 t$.
   4) $x = 5 \cos 5t^2$, $y = 5\sin 5t^2$.

7. Определить уравнения движения и траекторию точки обода колеса радиуса $\boldsymbol{R} = 1$ м автомобиля, если автомобиль движется по прямолинейному пути с постоянной скоростью 20 м/сек. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять начальное положение точки на пути, принятом за ось $\boldsymbol{Ox}$.

8. Точка движется по винтовой линии $\boldsymbol{x} = a \cos kt$, $y = a \sin kt$, $z =s\ vt$. Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

9. Уравнения движения точки $\boldsymbol{M}$ в цилиндрической системе координат имеют вид $r = a$, $\varphi = kt$, $z = vt$. Найти проекции скорости точки $\boldsymbol{M}$ на оси цилиндрической системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.

10. Точка ***M***, брошенная под углом α к горизонту, если пренебречь сопротивлением воздуха, движется согласно уравнениям:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

В этих уравнениях v_0, α, g – постоянные величины. Определить уравнение траектории точки, наибольшую высоту ***h*** ее подъема над уровнем начального положения, расстояние ***s*** по горизонтали, при котором точка достигнет наивысшего положения, а также дальность полета точки по горизонтали ***l***, касательное и нормальное ускорение.

11. Две точки движутся равномерно одна за другой по одной прямой линии со скоростями v_1 и v_2, причем расстояние между их начальными положениями было равно σ_0. Обе точки начинают двигаться одновременно. Определить время ***T***, по истечении которого одна точка догонит другую.

12. Линейка эллипсоида ***AB*** = ***l*** скользит концом ***A*** по оси абсцисс и концом ***B*** по оси ординат. Линейка приводится в движение кривошипом ***OC*** = 0,5***l***, шарнирно прикрепленным в ее середине. Расстояния ***AM*** = *a*, ***BM*** = *b* известны. Угол φ между осью абсцисс и кривошипом изменяется пропорционально времени $\varphi = kt$.

Найти уравнения движения точки ***M*** эллипсоида и уравнение ее траектории. Определить радиус кривизны траектории точки ***M***, ее скорость, касательное, нормальное и полное ускорение при произвольном положении механизма.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2.2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Как направлено ускорение точки вращающегося тела?

2. Зависит ли поворот тела в плоском движении от выбора полюса?

Демонстрационный пример

Вал с присоединенными к нему пластинами вращается в подшипниках согласно уравнению:

$$\varphi = a \ln\left(1 + \frac{\omega_0 t}{a}\right),$$

где φ – угол поворота вала, a и ω_0 – постоянные коэффициенты. Определить угловую скорость и угловое ускорение вала. Найти скорость и ускорение центра пластины $\boldsymbol{A}$, отстоящего на расстоянии $\boldsymbol{R}$ от оси вращения.

Решение. Проекция угловой скорости вала на ось вращения равна первой производной от угла поворота по времени

$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0 t}{a}}.$

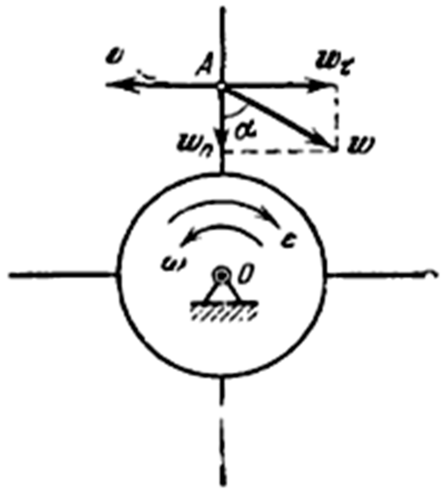


Рис. 7. Пример

Из этого равенства видно, что в начальный момент при t = 0 величина угловой скорости вала равнялась ω_0. Определяем проекцию углового ускорения вала на ось вращения как производную от угловой скорости по времени: $\varepsilon_z = -\frac{\omega_z^2}{a}$.

Проекция углового ускорения отрицательна, проекция угловой скорости вала с течением времени неограниченно уменьшается.

Переходим к определению скорости и ускорения центра $\boldsymbol{A}$ пластины. Модуль скорости этой точки равен:

$$v = R\omega = \frac{R\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{a}t}.$$

Ускорение этой точки складывается из нормального и касательного ускорений. Величина нормального ускорения:

$$\omega_n = R\omega^2 = \frac{R\omega^2}{(1+\frac{\omega_0 t}{a})^2}.$$

Проекция ускорения на касательную определяется формулой:

$$\omega_\tau = -\frac{R}{a}\frac{\omega^2}{(1+\frac{\omega_0 t}{a})^2}.$$

Модуль полного ускорения:

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_\tau^2} = \frac{R\omega^2}{a}\sqrt{1+a^2} = \frac{R}{a}\frac{\omega_0^2}{\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2}\sqrt{1+a^2}.$$

Угол α, составляемый ускорением точки с радиусом, соединяющим ее с осью вращения, находится из уравнения:

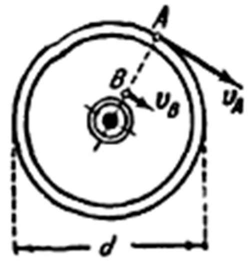
$$tg\ \alpha = -\frac{1}{a}.$$

Направления скорости и ускорения центра пластины изображены на рисунке. Отрицательное значение tg α указывает на то, что угол α откладывается в сторону, противоположную направлению вращения твердого тела.

Задания для решения

1. Ускорение любой точки вала, вращающегося в подшипниках, составляет постоянный угол 60° с перпендикуляром, опущенным из этой точки на ось вала. Начальное значение проекции угловой скорости на ось ***z***, направленной по оси вала, равно – ω_0, начальный угол поворота вала равен нулю. Определить касательное, нормальное и полное ускорения точки вала, расстояние которой от оси вращения – ***r***. Найти уравнение вращения вала вокруг неподвижной оси, а также зависимость величины угловой скорости от угла поворота вала.

2. Точка ***A*** шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с, а некоторая точка ***B***, взятая на одном радиусе с точкой ***A***, движется со скоростью 10 см/с; расстояние ***AB*** = 20 см. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.



3. Маховое колесо радиуса ***R*** = 2 м вращается равноускоренно из состояния покоя; через ***t*** = 10 с точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью ***v*** =100 м/с. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента ***t*** = 15 с.

4. Определить скорость ***v*** и ускорение *ω* точки, находящейся на поверхности Земли в Москве, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Москвы 60°; радиус Земли 6370 км.

5. С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращающийся с угловой скоростью, равной 40 *π* рад/с, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

6. Найти горизонтальную скорость *v*, которую нужно сообщить телу, находящемуся на экваторе, для того чтобы оно, двигаясь равномерно вокруг Земли по экватору в особых направляющих, имело ускорение свободного падения. Определить также время ***T***, по истечении которого тело вернется в первоначальное положение. Радиус Земли ***R*** = $637 \cdot 10^6$ см, а ускорение силы тяжести на экваторе ***g*** = 978 см/с ^{2}.

7. Маховое колесо радиуса 0,5 м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 м/с. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

8. Часовой балансир совершает крутильные гармонические колебания с периодом $\boldsymbol{T} = 1/2$ с. Наибольший угол отклонения точки обода балансира от положения равновесия $\alpha = \pi/2$ рад. Найти угловую скорость и угловое ускорение баланса через 2 с после момента, когда балансир проходит положение равновесия.

9. Маятник колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси $\boldsymbol{O}$. Выйдя в начальный момент из положения равновесия, он достигает наибольшего отклонения $\alpha = \pi/16$ рад через 2/3 с. В каком положении маятник будет иметь наибольшую угловую скорость и чему она равна?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2.3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Основные виды движений твердого тела.
2. Какое движение называется плоским?
3. Как распределены в данный момент скорости точек тела, совершающего плоское движение?
4. Что такое мгновенный центр скоростей?
5. Сформулируйте следствия из теоремы о скоростях точек при плоском движении.

Демонстрационный пример

Стержень $\boldsymbol{AB}$ совершает плоское движение. Скорость точки $\boldsymbol{A}$ образует угол 30° со стержнем и равна в данный момент по величине 5 м/с. Скорость точки B в этот же момент составляет угол 60° с продолжением стержня (рис. 8 а).

Определить величину скорости точки $\boldsymbol{B}$, положение мгновенного центра скоростей, а также угловую скорость стержня, если его длина $\boldsymbol{AB}$ = 2 м. Найти также скорость точки D середины стержня.

Решение. Эту задачу следует решать графоаналитически. Согласно формуле распределения скоростей

$$\upsilon_B = \upsilon_A + \upsilon_{BA}, \qquad (1)$$

строим треугольник скоростей, соответствующий уравнению (1). Из произвольной точки откладываем в избранном масштабе скорость υ_i, известную по величине и направлению. Из конца υ_A проводим прямую, параллельную υ_{BA}, т. е. перпендикулярную к стержню $\boldsymbol{AB}$. Величина вектора υ_{BA} неизвестна. Воспользуемся тем, что известно направление скорости υ_B. Из начала вектора υ_A проводим прямую, параллельную направлению υ_B, до пересечения с прямой υ_{BA}. Таким образом, получен замкнутый треугольник скоростей, стороны которого в избранном масштабе определяют скорость точки $\boldsymbol{B}$ и вращательную скорость точки $\boldsymbol{B}$ вокруг полюса $\boldsymbol{A}$. В этом треугольнике извести одна сторона υ_A и все три угла (рис. 8 б).

Решая этот треугольник, находим:

$$\upsilon_{BA} = \frac{\upsilon_A}{\sin 30°} = 10\frac{м}{с}, \qquad (2)$$

$$\upsilon_B = \upsilon_A\, tg\, 60° = 8.65\ \frac{м}{с}.$$

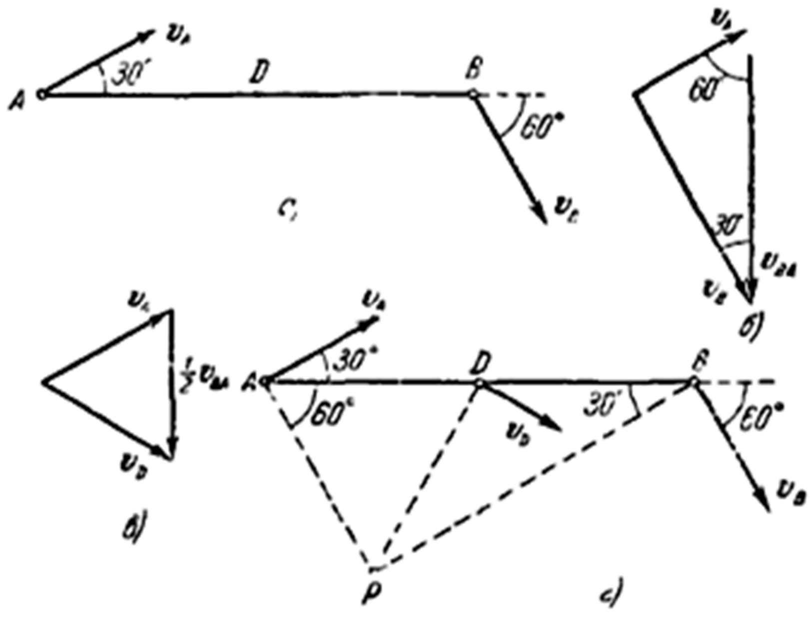


Рис. 8. Пример

Замечая, что

$$\upsilon_{BA} = \omega BA = 2\omega, \qquad (3)$$

из (2) и (3) определяем величину угловой скорости:

$$\omega \cdot 2 = 10 \text{ или } \omega = 5 \ \ c^{-1}.$$

Скорость точки ***D***, середины стержня ***AB***, может быть найдена при помощи формулы распределения скоростей:

$$\upsilon_D = \upsilon_A + \frac{1}{2}\upsilon_{BA}.$$

Для построения треугольника скоростей (рис. 8 в) из произвольной точки откладываем скорость υ_A. Из конца υ_A откладываем вектор, равный ½ υ_{BA}. Соединяя начало вектора υ_A с концом вектора ½ υ_{BA}, находим искомую скорость точки ***D***. Величина скорости точки ***D*** легко определяется из треугольника скоростей. Две стороны этого треугольника равны по величине υ_A = ½ υ_{BA} = 5 м/с, а угол между этими сторонами ранен 60°. Следовательно, этот треугольник равносторонний. Величина скорости точки D равна также 3 м/с. Эту задачу можно решить и при помощи мгновенного центра скоростей. Для нахождения мгновенного центра скоростей стержня ***AB*** поставим перпендикуляры к скоростям точек ***A*** и ***B*** (рис. 8 г). Пересечение этих прямых определяет положение мгновенного центра скоростей ***P***. В прямоугольном треугольнике ***ABP*** известны сторона ***AB*** и два прилегающих угла: ***BAP*** = 60°, ***ABP*** = 30°. Находим мгновенные радиусы ***AP*** и ***BP***:

$$AP = AB\sin 30° = 1\,м,$$
$$BP = AB\cos 30° = 1.73\,м.$$

Величина угловой скорости стержня:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{5}{1} = 5 \ \ сек^{-1},$$

и, следовательно, величина скорости точки B:

$$\upsilon_B = \omega BP = 8.65\frac{м}{c}.$$

Для определения скорости середины стержня, точки ***D***, проведем радиус ***PD***. Из треугольника ***ADP*** следует, что ***AP*** = ***AD*** = 1 м. Следовательно, треугольник равносторонний и ***DP*** = 1 м.

Тогда:

$$\upsilon_D = DP\omega = 5\ \frac{м}{c}.$$

Скорость точки ***D*** направлена перпендикулярно к мгновенному радиусу ***DP***.

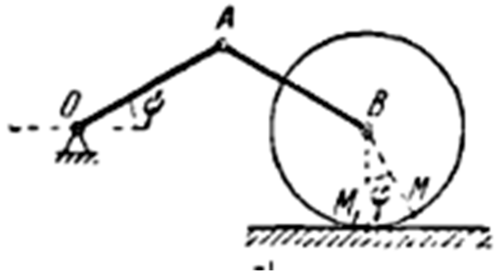
В этой задаче оба метода решения равноценны. Они одинаково быстро позволяют получить ответ на все вопросы, поставленные в задаче. Если бы требовалось найти лишь величину скорости точки ***B***, то проще всего было бы применить теорему о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры на направление отрезка, соединяющего эти точки:

$$v_A \cos 30° = v_B \cos 60°,$$

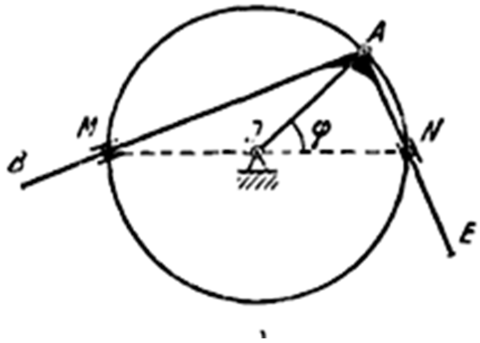
$$v_B = \frac{v_A \cos 30°}{\cos 60°} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 0{,}5} \approx 8{,}65 м/с.$$

Задания для решения

1. Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа ***OA*** и шатуна ***AB*** с одинаковой длиной ***r***. Кривошип вращается вокруг неподвижного центра ***O***. Угол ψ изменяется согласно уравнению $\psi = kt$. Конец шатуна ***B*** шарнирно прикреплен к центру колеса. Колесо радиуса а катится без скольжении по горизонтальной плоскости, параллельной прямой ***OB*** и отстоящей от нее на расстоянии a. Найти уравнения плоского движения колеса, а также уравнения движения той точки обода ***M***, которая соприкасается с плоскостью, когда точка ***B*** находится в крайнем правом положении. Определить скорость точки ***M*** и мгновенную угловую скорость колеса.

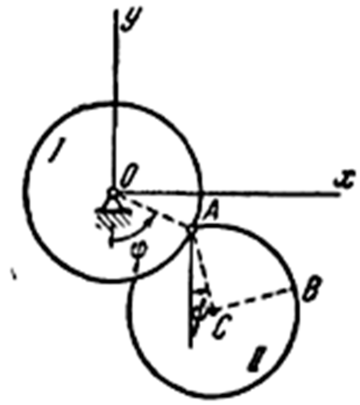


2. Вершина ***A*** жесткого прямого угла ***BAE*** соединена кривошипом ***OA*** = ***r*** с неподвижным центром ***O***. Кривошип ***OA*** вращается равномерно: $\varphi = kt$. Сторона

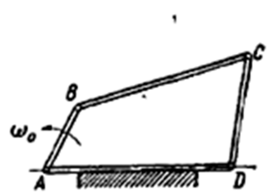


прямого угла ***AB*** проходит непрерывно через неподвижную точку ***M***, а стержень ***AE*** – через неподвижную точку ***N***. Тогда ***M*** и ***N*** лежат на окружности, описываемой вершиной прямого угла ***A***. Определить угловую скорость жесткого прямого угла ***BAE***, а также скорости тех его точек, которые совпадают в данный момент с шарнирами ***M*** и ***N***.

3. Два одинаковых диска радиуса r каждый соединены цилиндрическим шарниром ***A***. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O по закону $\varphi = \varphi(t)$. Диск II вращается вокруг горизонтальной оси ***A*** согласно уравнению $\psi = \psi(t)$. Оси ***O*** и ***A*** перпендикулярны к плоскости чертежа. Углы φ и ψ отсчитываются от вертикали против хода часовой стрелки. Найти скорость центра C диска II.



4. В шарнирном четырехзвеннике ***ABCD*** ведущий кривошип ***AB*** вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 6\pi$ $с^{-1}$. Определить мгновенные угловые скорости кривошипа ***CD*** и стержня ***BC*** в тот момент, когда кривошип ***AB*** и стержень ***BC*** образуют одну прямую, если ***BC = 3AB***.



5. Ползуны ***B*** и ***E*** сдвоенного кривошипно-шатунного механизма соединены стержнем ***BE***. Ведущий кривошип ***OA*** и ведомый кривошип ***OD*** качаются вокруг общей неподвижной оси ***O***, перпендикулярной к плоскости чертежа. Определить мгновенные угловые скорости ведомого кривошипа ***OD*** и шатуна ***DE*** в тот момент, когда ведущий кривошип ***OA***, имеющий мгновенную угловую скорость ω_0 = 12 $с^{-1}$, перпендикулярен к направляющей ползунов. Даны размеры: ***OA*** = 10 см; ***OD*** = 12 см; ***AB*** = 26 см; ***EB*** = 12 см; ***DE*** = $12\sqrt{3}$ см.

6. Колесо катится без скольжения по прямолинейному рельсу. Найти распределение скоростей и ускорений точек колеса.

7. Направив ось перпендикулярно скорости любой из точек плоской фигуры, показать, что проекции на эту ось скоростей всех лежащих на ней точек равны нулю.
8. Доска складного стола, имеющая форму прямоугольника со сторонами a и b, поворотом вокруг оси шипа $\boldsymbol{O}$ переводится из положения ***ABCD*** в положение $\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}$ и, будучи разложена, образует прямоугольник со сторонами b и $2a$. Найти положение оси шипа $\boldsymbol{O}$ относительно сторон $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AD}$.

РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3.1. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. АБСОЛЮТНОЕ, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ТЕОРЕМЫ О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ. КОРИОЛИСОВО УСКОРЕНИЕ. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Что такое абсолютное, относительное и переносное движение?
2. Теорема о сложении скоростей.
3. Теорема о сложении ускорений.
4. Что такое кориолисово ускорение? Его величина и направление?

Демонстрационный пример

Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω_{e}. По поверхности цилиндра движется точка $\boldsymbol{M}$ согласно уравнениям:

$$x_1 = 3\cos 2\pi t\,, y_1 = 3\sin 2\pi t\,, z_1 = 3t. \qquad (1)$$

Оси координат x_1, y_1, z_1 жестко связаны с цилиндром и, следовательно, вращаются вместе с ним с угловой скоростью ω_e. Ось z_1 совпадает с осью симметрии. Проекция переносной угловой скорости на ось z_1 равна $\omega_{ez_1} = 2\ \text{c}^{-1}$.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки ***M***. Как изменятся абсолютные скорость и ускорение точки ***M***, если направление вращения цилиндра изменить на обратное, т. е. если $\omega_{ez_1} = -2\ \text{c}^{-1}$?

Решение. Вращение цилиндра принимаем за переносное движение. Движение точки ***M*** по поверхности цилиндра будет относительным движением. На рисунке показана винтовая линия – относительная траектория точки ***M***. Она определяется уравнениями (1).

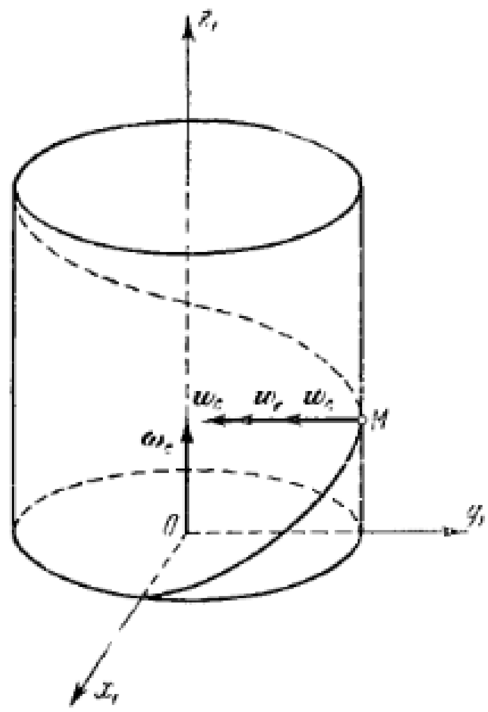


Рис. 9. Пример

Расстояние точки ***M*** от оси вращения z_1 равно:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 3\ \text{м}.$$

Переносная скорость точки ***M*** есть скорость той точки цилиндра, с которой совпадает в данный момент точка ***M***. Ее величина равна:

$$v_e = r\omega_e = 6\frac{\text{м}}{\text{c}}.$$

Эта скорость лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения z_1 и направлена по касательной к поверхности цилиндра. Переносное ускорение точки ***M*** есть ускорение той точки цилиндра, с которой совпадает в данный момент точка ***M***. Вращение цилиндра равномерное, следовательно, переносное ускорение точки будет переносным нормальным ускорением, равным по величине

$$\omega_e = \omega_{en} = r\omega_e^2 = 3 \cdot 4 = 12\ \ \text{м}/c^2.$$

Оно направлено по перпендикуляру, восставленному к оси вращения z_1 из точки ***M***. Относительная скорость точки ***M*** определится, исходя из системы уравнений относительного движения (1). Проекции относительной скорости на оси x_1, y_1, z_1 равны первым производным относительных координат по времени:

$$\upsilon_{rx_1} = \dot{x}_1 = -6\pi \sin 2\pi t, \qquad (2)$$

$$\upsilon_{ry_1} = \dot{y}_1 = 6\pi \cos 2\pi t, \qquad (3)$$

$$\upsilon_{rz_1} = \dot{z}_1 = 3.$$

Величина относительной скорости:

$$\upsilon_r = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} = 19{,}1\ \frac{м}{с}.$$

Абсолютная скорость точки ***M*** является геометрической суммой переносной и относительной скоростей. Если сложить геометрически две составляющие относительной скорости υ_{rx} и υ_{ry}, то из уравнений (2) и (3) следует, что результирующая будет равна по модулю 6π и направлена в плоскости, перпендикулярном к оси вращения, по касательной к поверхности цилиндра. Следовательно, эта результирующая υ_{rxy} совпадает по направлению с переносной скоростью υ_e. Итак, абсолютная скорость точки ***M*** равна по величине:

$$\upsilon = \sqrt{(\upsilon_{rxy}|\upsilon_e)^2 + \upsilon_{rz}^2} = 25{,}5\ \frac{м}{с}. \qquad (4)$$

Абсолютная скорость лежит в касательной плоскости к цилиндру и составляет угол α с образующей цилиндра, причем:

$$tg\alpha = \frac{v_{xy}}{v_z} = \frac{6\pi + 6}{3} \approx 8{,}28\,. \qquad (5)$$

Определяем проекции относительного ускорения на оси $0x_1$, $0y_1$, $0z_1$ как производные от относительных координат по времени:

$$\omega_{rx} = \ddot{x}_1 = -12\pi^2 \cos 2\pi t = -4\pi x_1\,,$$

$$\omega_{ry} = \ddot{y}_1 = -12\pi^2 \sin 2\pi t = -4\pi y_1\,,$$

$$\omega_{rz} = \ddot{z}_1 = 0\,.$$

Величина относительного ускорения равна:

$$\omega_r = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \check{z}_1^2} = 12\pi^2\ \frac{м}{с^2}.$$

Направлено это ускорение по перпендикуляру, восставленному из точки ***M*** к оси вращения, и, следовательно, совпадает по направлению с переносным ускорением (см. рис. 9).

Ускорение Кориолиса равно:

$$\omega_c = 2\omega_e \times v_r.$$

Величина кориолисова ускорения определится по формуле:

$$\omega_c = 2\omega_e v_r \, sin(\omega_e \wedge v_r) = 2\omega_e v_{rxy} = 2\omega_e \cdot 6\pi = 24 \ м/с^2.$$

Направление кориолисова ускорения находим но правилу векторного произведения или по правилу П. Е. Жуковского. Для этого спроектируем вектор относительной скорости на плоскость $\boldsymbol{xy}$, перпендикулярную к вектору угловой переносной скорости, и повернем эту проекцию в плоскости $\boldsymbol{xy}$ на 90° в сторону вращения $\omega_е$. Это и будет направление ускорения Кориолиса. Следовательно, кориолисово ускорение направлено по перпендикуляру, восставленному из точки $\boldsymbol{M}$ к оси вращения, и совпадает по направлению с переносным и относительным ускорениями. Итак, абсолютное ускорение равно по величине арифметической сумме переносного относительного и кориолисова ускорений.

$$\omega = \omega_e + \omega_r + \omega_c = 206{,}5\,\frac{м}{с^2}. \qquad (6)$$

Оно направлено по перпендикуляру, восставленному из точки $\boldsymbol{M}$ к оси вращения (см. рис. 9).

Рассмотрим теперь случай $\omega_{еz_1} = -2 \ с^{-1}$. По сравнению с предыдущим в данном случае произойдут только следующие изменения. Проекция относительной скорости на горизонтальную плоскость v_{rxy} и переносная скорость будут направлены по одной прямой, но в разные стороны. Следовательно, формулы (4) и (5) примут вид:

$$v = \sqrt{(v_{rxy} - v_e)^2 - v_{rz}^2} = \sqrt{(6\pi - 6)^2 + 3^3} \approx 13{,}2 \ м/с, \qquad (4')$$

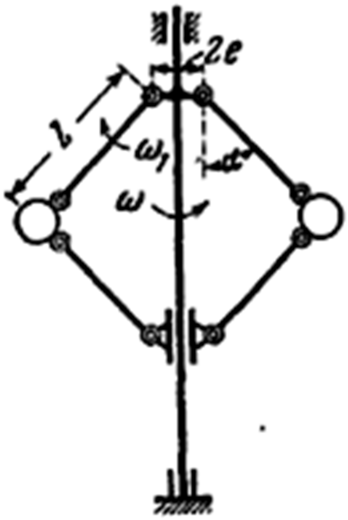
$$tg\alpha = \frac{v_{xy}}{v_z} = \frac{6\pi - 6}{3} = 2 \cdot 2{,}14 = 4{,}28. \qquad (5')$$

Ускорение Кориолиса, сохраняя свою величину, будет направлено по тому же перпендикуляру, восставленному из точки $\boldsymbol{M}$ к оси вращения, но в противоположную сторону, так как $\omega_е$ направлено в противоположную сторону. Следовательно, абсолютное ускорение равно по величине:

$$\omega = \omega_e + \omega_r - \omega_c = 55{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \qquad (6')$$

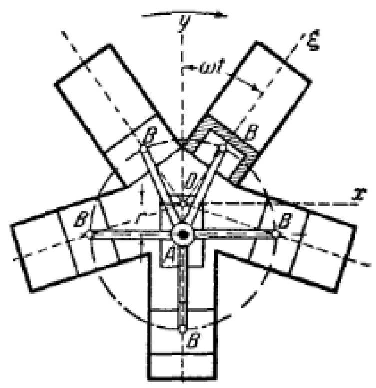
В этой задаче переносное, относительное и кориолисово ускорения оказались направленными по одной прямой, и определение абсолютного ускорения свелось к алгебраическому сложению этих величин. Следует помнить, что такое совпадение направлений всех трех составляющих полного ускорения не является характерным. В подавляющем большинстве случаев составляющие абсолютного ускорения направлены по разным прямым, и их сложение производится векторно.

Задания для решения



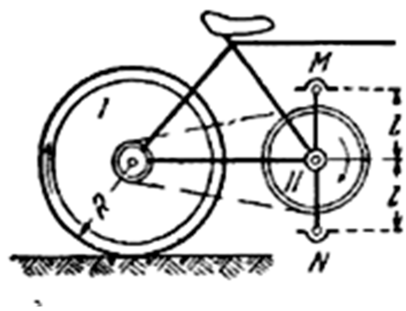
1. Пассажир движущегося со скоростью 72 км/ч по горизонтальному шоссе автомобиля видит через боковое стекло кабины траектории капель дождя наклоненными к вертикали под углом 40°. Определить абсолютную скорость падения дождевых капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

2. Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω = 10 с^{-1}, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении угловую скорость ω_1= 1,2 с^{-1}. Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $\boldsymbol{l}$ = 50 см, расстояние между осями их привеса 2e = 10 см, углы, образованные стержнями с осью регулятора α_1= α_2 = α = 30°.

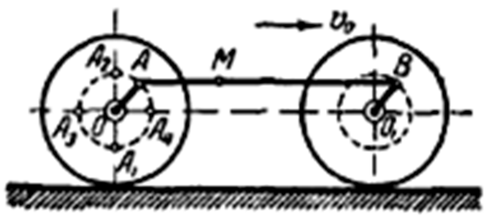


3. Определить абсолютную скорость поршня ротативного двигателя при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях шатуна AB, если длина кривошипа $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{r}$ = 80 мм, длина шатуна $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{l}$ = 240 мм, число оборотов цилиндра с картером n = 1200 об/мин.

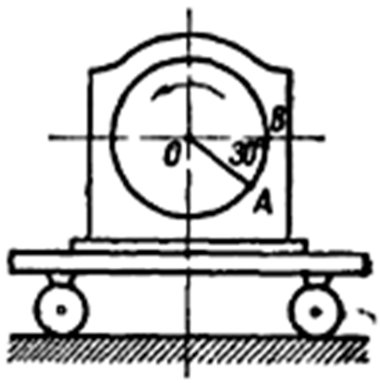
4. Велосипедист на некотором участке горизонтального прямолинейного пути движется по закону $s = 0{,}l\,t^2$ (s – в метрах, t – в секундах). Дано: $\boldsymbol{R}$ = 350 мм, $\boldsymbol{l}$ = 180 мм, z_1 = 18 зубцов, z_2 = 48 зубцов. Определить абсолютное ускорение осей $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ велосипедных педалей (предполагая, что колеса катятся без скольжения) при t = 10 сек, если в этот момент кривошип $\boldsymbol{MN}$ расположен вертикально.



5. Определить абсолютное ускорение какой-нибудь точки $\boldsymbol{M}$ спарника $\boldsymbol{AB}$, соединяющего кривошипы осей $\boldsymbol{O}$ и O_1, если экипаж движется по прямолинейному участку пути равномерно со скоростью υ_0 = 36 км/ч. Радиусы колес $\boldsymbol{R}$ = 1 м, радиусы кривошипов $\boldsymbol{r}$ = 0,75 м.



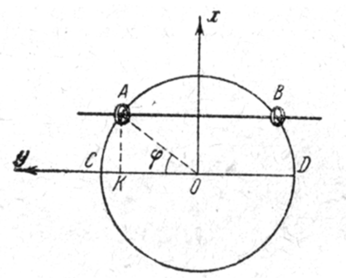
6. На тележке, движущейся по горизонтали вправо с ускорением ω = 49,2 см/с^2, установлен электрический мотор, ротор которого при пуске в ход вращается согласно уравнению $\varphi = t^2$, причем угол φ измеряется в радианах. Радиус ротора равен 20 см. Определить абсолютное ускорение точки $\boldsymbol{A}$, лежащей



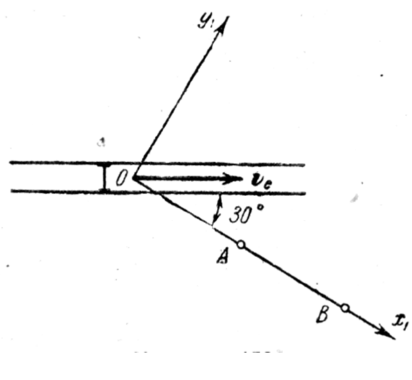
на ободе ротора, при $t = 1$ с, если в этот момент точка ***A*** находится в положении, указанном на чертеже.

7. Точка движется со скоростью 2 м/с по окружности обода диска диаметром 4 м. Диск вращается в противоположном направлении, имея в данный момент угловую скорость 2 $с^{-1}$ и угловое ускорение 4 $с^{-2}$. Определить абсолютное ускорение точки.

8. Стержень продет через два колечка ***A*** и ***B***, которые могут скользить по кольцу радиуса ***R*** = *60 см*. Стержень перемещается поступательно, оставаясь все время параллельным горизонтальному диаметру кольца ***CD***. Координаты центра стержня изменяется согласно уравнению $x = 60 \cdot \cos 2\pi t$ *см*. Определить в момент времени t_1 = *1/6 сек* абсолютную, переносную и относительную скорости колечка ***A***, считая его движение вдоль стержня относительным.



9. Башенный кран движется по прямолинейным рельсам согласно уравнению $\sigma = (t - 0.2 \cdot t^2)\,м$, где σ – координата, отсчитываемая вдоль рельсов. Тележка ***A*** одновременно перемещается по горизонтальной стреле ***OB***, расположенной под углом в 30° к рельсам, согласно уравнению $x_1 = (3 + 0.5 \cdot \sin 2t)\,м$, а груз, подвешенный на тросе, опускается с постоянной скоростью, равной по величине *1 м/с*. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза в моменты времени $t_0 = 0$, и $t_1 = 2$ *с*.



10. Корабль плывет вдоль меридиана ***CBN*** с юга на север. Его скорость по отношению ко дну равна *36 км/ч*. Определить

составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения корабля, учитывая вращение Земли вокруг своей оси. Широта места $\varphi = 60°$. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^3$ *м*.

11. Искусственный спутник Земли, двигаясь по круговой орбите, имеет период обращения, вычисленный по отношению к системе координат, движущейся вместе с центром Земли поступательно, равный полутора часам. Определить его относительную угловую скорость по отношению к Земле, вращающейся вокруг своей оси, если орбита спутника совпадает с экваториальной плоскостью Земли и спутник летит с востока на запад.

РАЗДЕЛ 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.1. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Законы динамики.
2. Основные задачи динамики.
3. Естественные уравнения движения.

Демонстрационные примеры

Пример 1

Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$. Определить силу $\boldsymbol{F}$, вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.

Решение. Проекции силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к материальной точке, определяются по формулам $F_x = m\ddot{x}$, $F_y = m\ddot{y}$. В данном случае:

$\ddot{x} = -ak^2 \cos kt$,

$\ddot{y} = -bk^2 \sin kt$.

Следовательно,

$F_x = -mak^2 \cos kt,$
$F_y = -mbk^2 \sin kt.$

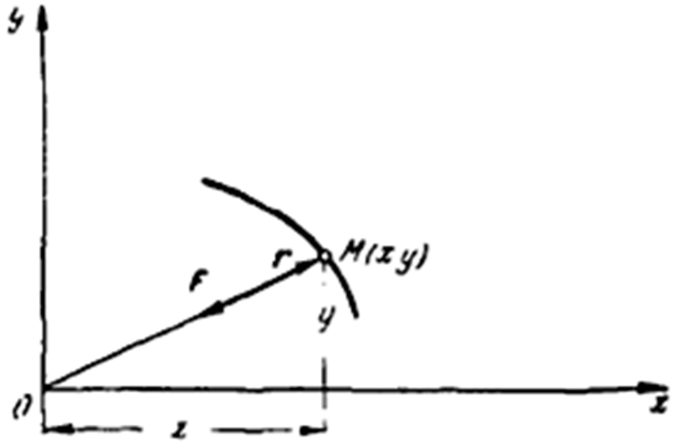


Рис. 10. Пример 1

Так как, по условию, сила F зависит от положения материальной точки, то ее проекции F_x и F_y являются

функциями координат $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Воспользовавшись уравнениями движения точки, получим:

$$F_x = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y.$$

Модуль силы F равен:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 r,$$

где $\boldsymbol{r}$ - модуль радиус-вектора материальной точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$. Направление силы $\boldsymbol{F}$ определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(x, \wedge F) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \ \cos(y, \wedge F) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Так как $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ определяют углы, образуемые соответственно осями $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, то сила направлена от $\boldsymbol{M}$ к $\boldsymbol{O}$. Следовательно, данная материальная точка движется под действием силы притяжения к центру $\boldsymbol{O}$, равной по модулю $F = k^2$mr. Эта сила называется центральной.

Пример 2

Груз веса $\boldsymbol{P}$ прикреплен к правому концу пружины, левый конец которой защемлен в стене. В начальный момент пружина не была деформирована, а грузу, лежащему на горизонтальной плоскости, посредством толчка сообщили начальную скорость υ_0 по горизонтали направо. Ось $\boldsymbol{x}$ направлена вдоль оси пружины по горизонтали направо, причем начало отсчета находится в правом конце недеформированной пружины.

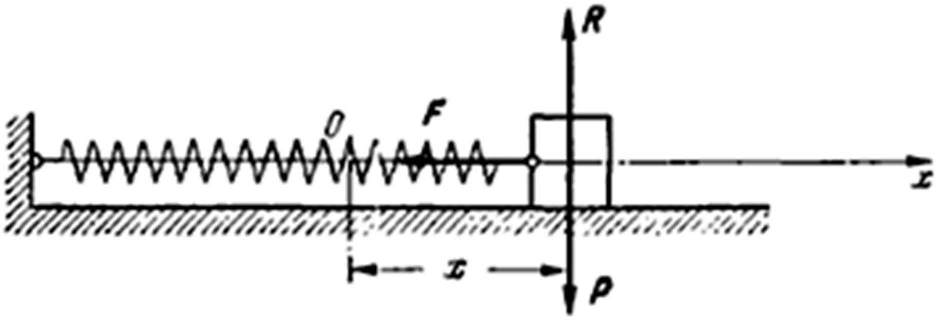


Рис. 11. Пример 2

Найти наибольшее смещение груза, если проекция упругой силы пружины равна F_x = - αx - βx^3, где $\boldsymbol{x}$ - удлинение пружины, а α и β - постоянные положительные коэффициенты. Силой трения скольжения груза о горизонтальную плоскость и массой пружины пренебречь.

Решение. Запишем начальные условия движения груза при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = \upsilon_0$.

Изобразим груз во время движения смещенным по оси $\boldsymbol{x}$ направо. При этом пружина растянется на $\boldsymbol{x}$. Упругая сила пружины $\boldsymbol{F}$ направлена по горизонтали налево. Её проекция на ось $\boldsymbol{x}$ равна F_x= -(αx + βx^3).

К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ - вес груза, $\boldsymbol{R}$ - нормальная сила реакции горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{F}$ - упругая сила пружины.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3. \qquad (1)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Интегрирование уравнения (1) для определения уравнения движения груза $x = f(t)$ связано с вычислительными трудностями. Вместе с тем вычисление наибольшего смещения можно легко осуществить, так как для этого достаточно найти зависимость между $\boldsymbol{x}$ и $\dot{x}$ и, приравняв затем в крайнем положении груза $\boldsymbol{x}$ нулю, определить искомую величину. Для этого умножим левую и правую части дифференциального уравнения (1) на $\boldsymbol{dx}$ и, учитывая, что:

$$\ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x},$$

запишем:

$$\frac{P}{g}\dot{x}d\dot{x} = -(\alpha x + \beta x^3)dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим:

$$\frac{P}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4} + C. \qquad (2)$$

В начальный момент времени $x = 0$ и $\ddot{x} = v_0$.

Следовательно,

$$C = \frac{P}{g}\frac{{v_0}^2}{2}.$$

Теперь уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{P}{g}\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{P}{g}\frac{{v_0}^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}. \qquad (3)$$

В момент, соответствующий наибольшему смещению a, скорость груза равна нулю. Поэтому подставим в уравнение (3): $x = a$, $\dot{x} = 0$.

Получим биквадратное уравнение относительно искомого смещения a:

$$a^4 + 2\frac{\alpha}{\beta}a^2 - 2\frac{P}{g\beta}{v_0}^2 = 0.$$

Решив это уравнение, находим:

$$a = \frac{1}{g\beta}\sqrt{g\beta(\sqrt{g^2\alpha^2 + 2Pg\beta{v_0}^2} - g\alpha}.$$

Задания для решения

1. В шахте опускается равноускоренно лифт весом 280 кг; в первые 10 сек он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

2. К телу весом $\boldsymbol{P}$ = 3 Н, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой держат в руке. Какое ускорение надо сообщить

руке, поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении ***T*** = 4,2 Н?

3. Движение материальной точки весом 2 Н выражается уравнениями $x = 3cos2\pi t$ см, $y = 4sin\pi t$ см, где t выражено в секундах. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

4. Чему равен вес 1 кг на Луне, если на ней ускорение силы притяжения j = 1,7 м/ $с^2$? Чему равен вес 1 кг на Солнце, если ускорение силы притяжения на нем равно j = 270 м/$с^2$?

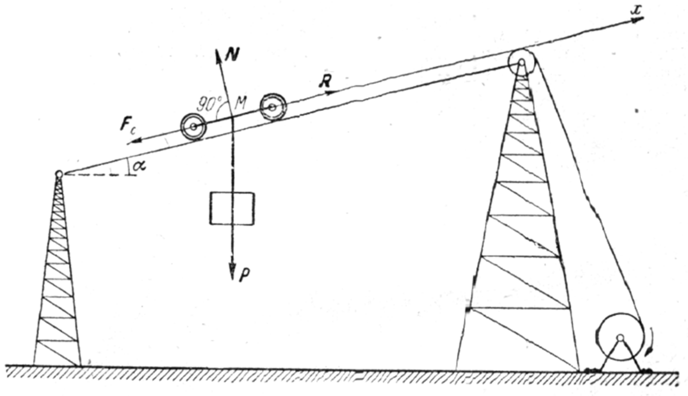
5. Тело весом ***P*** вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости за 5 с расстояние s = 24,5 м и остановилось. Определить коэффициент трения f.

6. За сколько времени и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 36 км/ч, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 300 кг на тонну веса вагона?

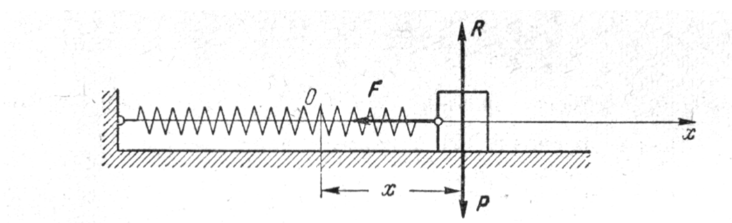
7. Тяжелая точка ***M*** поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась υ_0 = 15 м/с. Коэффициент трения f = 0,1. Угол α= 30°. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?
8. Найти наибольшую скорость падения шара весом ***P*** = 10 кг с радиусом r = 8 см, принимая, что сопротивление воздуха равно R = =kσυ^2, где υ - скорость падения, σ - площадь проекции падающего тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его движения, k - численный коэффициент (зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,024 кг $с^2$/$м^4$).

9. Самолет летит горизонтально. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при скорости в 1 м/с равно 0,05 кг. Сила тяги постоянна, равна 3080 кг и составляет угол в 10° с направлением полета. Определить наибольшую скорость самолета.

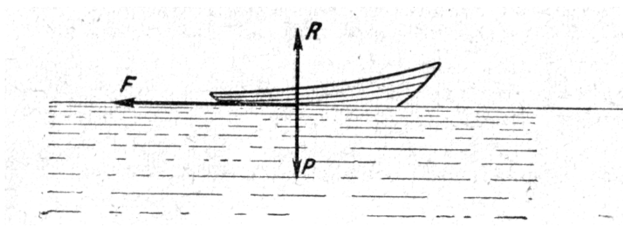
10. Вагонетка веса $\boldsymbol{P}$ канатной подвесной дороги движется вверх под углом α к горизонту. Определить натяжение каната при пуске вагонетки в ход и при ее последующем равномерном движении, если пуск в ход осуществляется равноускоренно из состояния покоя в течении $\boldsymbol{T}$ секунд. К концу пускового периода вагонетка приобрела скорость v. На вагонетку действует сила сопротивления $F_c = fN$, где $\boldsymbol{N}$ – модуль нормального давления вагонетки на канат, а f – постоянный коэффициент. Прогибом каната пренебречь.



11. Груз веса $\boldsymbol{P}$ прикреплен к правому концу пружины, левый конец которой защемлен в стене. В начальный момент времени пружина не была деформирована, а грузу, лежащему на горизонтальной плоскости, посредством толчка сообщили начальную скорость v_0, направленную по горизонтали направо, причем начало отсчета находится в правом конце недеформированной пружины. Найти наибольшее смещение груза, если проекция упругой силы пружины равна $F_x = -\alpha x - \beta x^3$, где x – удлинение пружины, а α и β – постоянные положительные коэффициенты. Силой трения скольжения груза о горизонтальную плоскость и массой пружины пренебречь.



12. В момент выключения двигателя моторная лодка веса **P** имела скорость v_0. Через какой промежуток времени скорость лодки станет в три раза меньше начальной, если проекция на ось x силы сопротивления воды движению лодки равна $F_x = -\alpha\dot{x} - \beta\dot{x}^2$, где $\dot{x}$ - проекция скорости лодки, α и β - постоянные положительные величины. Ось x направлена по горизонтали направо в сторону движения лодки. Вычислить также путь, пройденный лодкой за этот промежуток времени. Лодку считать точечной массой.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.2. КОЛЕБАНИЯ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Какие колебания называются свободными?
2. Какие колебания называются вынужденными?
3. Что такое затухающие колебания?

Демонстрационный пример

Груз веса **P** = 98 г подвешен к концу пружины, находившейся в начальный момент в покое в недеформированном состоянии, и отпущен без толчка. Найти уравнение колебаний груза, если известно, что для деформации пружины на 1 см надо приложить к ней силу, модуль которой равен 14,4 г.

Решение. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза.

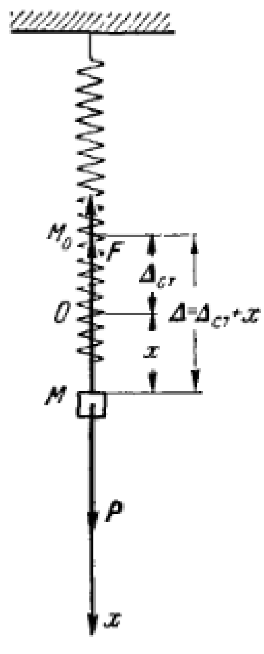


Рис. 12. Пример

В начальный момент груз подвешивался к концу M_0 недеформированной пружины, следовательно, он находился выше положения статического равновесия па величину статической деформации пружины $\Delta_{ст} = \frac{P}{c}$, где **с** - коэффициент упругости пружины. Отсутствие в начальный момент толчка указывает на движение без начальной скорости. Итак, начальные условия движения груза имеют вид при ***t*** = 0, $x = x_0 = -\frac{P}{c}$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ (x_0 имеет знак минус, так как ось *x* направлена по вертикали вниз, а груз в начальный момент находился над положением статического равновесия).

Изобразим груз в положении, смещенном относительно нуля на *x* вниз, и предположим, что он движется в сторону возрастания *x*, т. е. вниз. При этом пружина растягивается, и ее упругая сила ***F*** (восстанавливающая сила) равна $F = -c\Delta$, где Δ — смещение конца пружины из ненапряженного состояния, т. е. $\Delta_x = M_0M = \Delta_{ст} + x$.

Следовательно,

$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x). \quad (1)$$

Кроме силы ***F***, к грузу приложен его вес ***P***. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *x*:

$$m\ddot{x} = P + F_x. \quad (2)$$

Применив формулу (1), имеем:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - c\Delta_{ст} - cx. \quad (3)$$

Рассмотрим груз в положении статического равновесия. К грузу приложен его вес ***P***, направленный по вертикали вниз, и статическая упругая сила $F_{ст}$, которая появилась при растяжении пружины на $\Delta_{ст}$ под действием веса груза, т. е. $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Упругая сила $F_{ст}$ направлена по вертикали вверх. Из условия равновесия груза следует:

$$P - c\Delta_{ст} = 0. \quad (4)$$

Воспользовавшись этим результатом, запишем дифференциальное уравнение (3) в виде:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (5)$$

где $k^2 = \frac{cg}{P}$.

Дифференциальное уравнение (5) свободных колебаний груза является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, решение уравнения записывается в виде:

$$x = -C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,. \qquad (6)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,. \qquad (7)$$

Подставив в уравнение (6) начальное условие движения:

$$t = 0, x = x_0 = -\frac{P}{c}, \text{ а в (7) } t = 0, \dot{x} = \dot{x}_0 = 0,$$

Находим:

$$C_1 = x_0 = -\frac{P}{c}, C_2 = 0.$$

Уравнение (6) движения груза после подстановки значений C_1 и C_2 принимает вид:

$$x = -\frac{P}{c}\cos kt,$$

где $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$.

Воспользовавшись численными данными, получаем:

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}} = 12\,\frac{1}{\text{с}}, \quad \frac{P}{c} = 6.8 \text{ см.}$$

Итак,

$$x = -6.8 \cos 12t \text{ см,}$$

или, делая множитель при тригонометрической функции положительным:

$$x = 6.8 \sin(12t - \frac{\pi}{2}) \text{ см.}$$

Сопоставляя этот результат с уравнением свободных колебаний, записанным в общем виде $x = \boldsymbol{a} \sin(kt + \alpha)$, видим, что амплитуда колебаний a = 6,8 см, начальная фаза колебаний α = $\pi/2$ и круговая частота колебаний k= $12\frac{1}{\text{сек}}$.

Период колебаний груза определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0.52 \text{ с.}$$

Задания для решения

1. На каждую рессору вагона приходится нагрузка ***P*** кг; под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 см. Определить период ***T*** собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле ее прогиба.

2. Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если вес фундамента с машиной $\boldsymbol{Q}$ = 90 т, площадь подошвы фундамента $\boldsymbol{S}$ = 15 м^2, коэффициент жесткости грунта c = λS, где λ = 3 кг/см^3 - так называемая удельная жесткость грунта.

3. Найти период свободных вертикальных колебаний корабля в спокойной воде, если вес корабля ***P*** т, площадь его горизонтального сечения $\boldsymbol{S}$ м^2 и не зависит от высоты сечения; вес 1 м^3 воды равен 1 т. Силами, обусловленными вязкостью воды, пренебречь.

4. Груз весом 4 кг подвесили сначала к пружине с жесткостью c_1 = 2 кг/см, а затем к пружине с жесткостью c_2 = 4 кг/см. Найти отношение частот и отношение периодов колебаний груза.

5. Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 = l кг/см и c_2 = 3 кг/см. Указать период колебаний, амплитуду и

уравнение движения груза весом $\boldsymbol{Q} = 5$ кг, подвешенного на указанной двойной пружине, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 5 см вниз и ему была сообщена начальная скорость 49 см/с, направленная также вниз.

6. Колебания груза весом $\boldsymbol{P} = 10$ кг, лежащего на середине упругой балки жесткостью c = 2 кг/см, происходят с амплитудой 2 см. Определить величину начальной скорости груза, если в момент времени $t = 0$ груз находился в положении равновесия.

7. Груз $\boldsymbol{P}$ подвешен на пружине к концу невесомого стержня длиной $\boldsymbol{l}$, который может поворачивайся вокруг оси $\boldsymbol{O}$. Коэффициент жесткости пружины c_1. Пружина, поддерживающая стержень, установлена на расстоянии b от точки $\boldsymbol{O}$ и имеет коэффициент жесткости c_2. Определить собственную частоту колебаний груза $\boldsymbol{P}$.

8. К одной и той же пружине подвесили сначала груз веса $\boldsymbol{p}$, а во второй раз груз веса $3\boldsymbol{p}$. Определить, во сколько раз изменится период колебаний. Зная коэффициент жесткости пружины $\boldsymbol{c}$, а также начальные условия (грузы подвешивались к концу нерастянутой пружины и отпускались без начальной скорости), найти уравнения движения грузов.

9. Груз, вес которого равен $\boldsymbol{P}$ Н, подвешен на упругой нити к неподвижной точке. Выведенный из положения равновесия, груз начинает совершать колебания. Выразить длину нити в функции времени и найти, какому условию должна удовлетворять начальная её длина, чтобы во время движения гири нить оставалась натянутой. Натяжение нити пропорционально удлинению; длина её в нерастянутом состоянии равна $\boldsymbol{l}$, от действия статической нагрузки, равной $\boldsymbol{q}$ Н, нить удлиняется на 1 см. Начальная скорость груза равна нулю.

10. На каждую рессору вагона приходится нагрузка $\boldsymbol{p}$ Н; под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 см. Определить период $\boldsymbol{T}$ собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле её прогиба.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.3. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА СО СВЯЗЯМИ. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Движение точки в подвижной системе отсчета.
2. Принцип кинетостатики.

Демонстрационный пример

Груз $\boldsymbol{A}$ веса $\boldsymbol{P}$ спускается с призмы $\boldsymbol{B}$, расположенной под углом α к горизонту. Призма движется по горизонтальной плоскости направо с ускорением ω. Определить ускорение груза по отношению к призме и давление груза на боковую грань призмы, если коэффициент трения скольжения груза о боковую грань призмы равен f.

Решение. Направим ось x вдоль боковой грани призмы вниз. Движение груза $\boldsymbol{A}$ является сложным. Разложим его на относительное движение по отношению к боковой грани призмы и на переносное движение вместе с призмой. К грузу $\boldsymbol{A}$ приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ - вес груза, $\boldsymbol{R}$ - нормальная сила реакции боковой грани призмы, $F_{\text{тс}}$- сила трения скольжения, направленная и сторону, противоположную движению груза, т. е. по боковой грани вверх.

Для решения задачи методом динамики относительного движения материальной точки надо ко всем силам, приложенным к материальной точке, добавить силу инерции J_{e} в переносном движении и кориолисову силу инерции J_{e}.

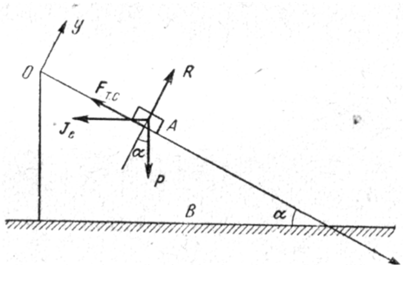


Рис. 13. Пример

Так как переносное движение является поступательным, то ускорение Кориолиса равно нулю и, следовательно, кориолисова сила инерции $J_{\text{е}}$ равна также нулю. Сила инерции $J_{\text{е}}$ в переносном движении направлена в сторону, противоположную переносному ускорению ω, т. е. по горизонтали налево и равна по модулю:

$$J_{\text{е}} = \frac{P}{g}\omega.$$

Для определения ускорения груза $\omega_{\text{г}}$ относительно боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось $\boldsymbol{x}$:

$$m\ddot{x}_r = P\sin\alpha - F_{\text{тс}} - J_{\text{е}}\, cos\alpha.$$

Учитывая, что $F_{\text{тс}}=fR$, а $J_{\text{е}}= P\omega / g$, находим:

$$\ddot{x}_r = P\sin\alpha - \frac{gfR}{P} - \omega\cos\alpha. \qquad (1)$$

Для определения нормальной реакции R боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза и проекции на ось $\boldsymbol{y}$:

$$m\ddot{y}_r = R - P\,cos\,\alpha - F_{\text{тс}} - J_{\text{е}}\sin\alpha.$$

Так как ускорение груза в относительном движении $\omega_{\text{г}}$ направлено перпендикулярно к оси $\boldsymbol{y}$, то $\ddot{y} = 0$. Заметив, что $J_{\text{е}}= P\omega / g$, находим:

$$R = P(\cos\alpha + \frac{\omega}{g}\sin\alpha). \qquad (2)$$

Искомое давление груза на боковую грань призмы направлено противоположно нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ и равно ей по модулю. Подставив в уравнение (1) значение R из формулы (2), получим:

$$\ddot{x}_r = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \omega(\cos\alpha + f\sin\alpha). \qquad (3)$$

Воспользовавшись уравнением (3), можно определить значение угла α, при котором груз будет находиться в относительном покое. Считая, что $\ddot{x} = 0$, имеем:

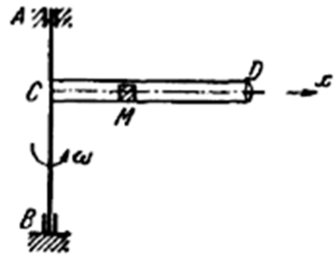
$$g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \omega(\cos\alpha + f\sin\alpha) = 0,$$

$$\alpha = \varphi + arctg\,\frac{\omega}{g},$$

где φ - угол трения.

Задания для решения

1. Горизонтальная трубка ***CD*** равномерно вращается вокруг вертикальной оси ***AB*** с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело ***M***. Определить скорость υ тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент υ = 0, $x = x_0$, длина трубки равна ***L***. Трением пренебречь.



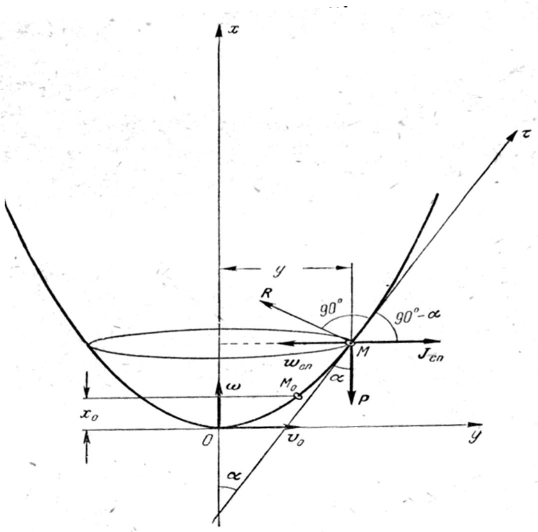
2. Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тяжелая точка, находящаяся на поверхности Земли на экваторе, не имела бы веса? Радиус Земли R = 6370 км.

3. Артиллерийский снаряд движется по настильной траектории (т. е. по траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Горизонтальная скорость снаряда во время движения υ_0 = 900 м/с. Снаряд должен поразить цель, отстоящую от места выстрела на расстоянии 18 км. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклонится снаряд от цели вследствие вращения Земли. Стрельба происходит на северной широте λ = 60°.

4. Определить, как меняется ускорение силы тяжести в зависимости от широты места вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли ***R*** = 6370 км.

5. Маятник на длинной нити получает небольшую начальную скорость в плоскости «север-юг». Считая отклонения маятника малыми по сравнению с длиной нити и принимая во внимание вращение Земли вокруг оси, найти время, по истечении которого плоскость качаний маятника совпадет с плоскостью «запад-восток». Маятник расположен на 60° северной широты.

6. Проволока, изогнутая в виде параболы, уравнение которой $y^2 = 2px$, вращается вокруг вертикальной оси x с постоянной угловой скоростью ω. На проволоку надето кольцо, которое может двигаться вдоль проволоки. Определить: 1) скорость кольца по отношению к проволоке, если в начальный момент оно находилось в покое в положении M_0 с абсциссой x_0, 2) в какую точку поднимется кольцо, если в начальный момент оно находилось в начале координат и ему была сообщена по горизонтали направо скорость v_0. Трением скольжения кольца о проволоку пренебречь.



7. Железнодорожный поезд идет со скоростью 15 м/с по рельсам, проложенным по меридиану с юга на север. Масса поезда 2000 т. Определить боковое давление поезда на рельсы, если он пересекает в данный момент северную широту 60°.

8. Материальная точка свободно падает в северном полушарии с высоты 500 м на Землю. Принимая во внимание вращение Земли вокруг своей оси и пренебрегая сопротивлением воздуха, Определить, на сколько отклонится на восток точка при падении. Географическая широта места равна 60°.

9. В вагоне, движущемся по прямому горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным от вертикали на угол 6°. Определить ускорение ω вагона.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4.4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО И СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Динамика вращательного движения твердого тела.
1. Моменты инерции.
2. Сложное движение.

Демонстрационные примеры

Пример 1

Вычислить момент инерции относительно оси вращения z вала веса 100 кг и радиуса 10 см с насаженным на него маховиком (вес 1 т и радиус 1 м). Вал считать однородным сплошным цилиндром, маховик - однородным кольцом (рис. 14).

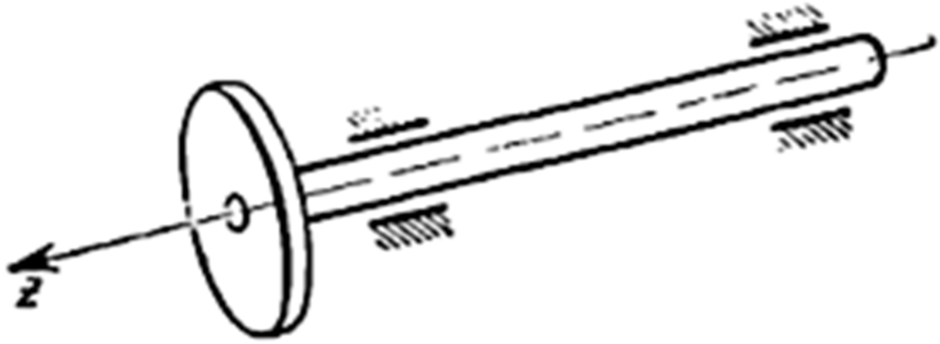


Рис. 14. Пример 1

Решение. Момент инерции системы, состоящей из вала и маховика, равен сумме их моментов инерции, т. е.:

$$I = I_{zB} + I_{zM} = 0{,}05 + 102 = 102{,}05 \text{ кгм} \cdot \text{с}^2.$$

Так как момент инерции вала составляет всего лишь 0,05 % от момента инерции маховика, то им можно пренебречь.

Пример 2

Вычислить моменты инерции относительно осей координат $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ тонкой однородной пластинки, внутри которой вырезан квадрат с длиной стороны, равной $\boldsymbol{r}$. Центры квадрата и круга совпадают; $\boldsymbol{M}$ - масса пластинки без выреза.

Решение. Момент инерции пластинки с вырезом относительно некоторой оси равен разности моментов инерции круга $I^{(1)}$ и квадрата $I^{(2)}$ относительно той же оси, т. е. (рис. 15):

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)},$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)},$$

$$I_z = I_z^{(1)} - I_z^{(2)}.$$

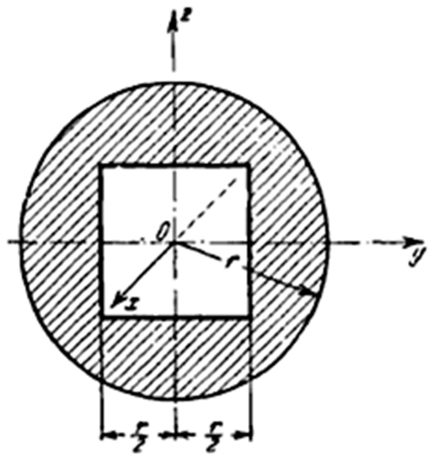


Рис. 15. Пример 2

Из соображений симметрии следует, что $I_y = I_z$. Воспользуемся формулами:

$I_x^{(1)} = \dfrac{Mr^2}{2}, I_y^{(1)} = I_z^{(1)} = \dfrac{Mr^2}{4}, \qquad I_x^{(2)} =$

$= \frac{M^{(2)}r^2}{6},\ I_y^{(2)} = I_z^{(2)} = \frac{M^{(2)}r^2}{12},$

(где масса вырезанного квадрата $M^{(2)} = \frac{M}{\pi r^2}$, r^2 = M/π).

Следовательно,

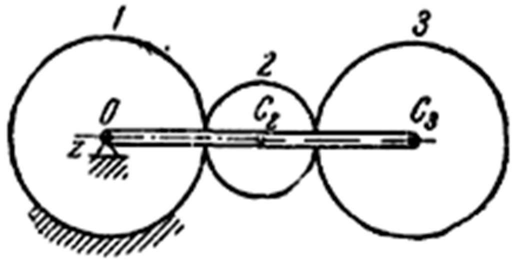
$$I_x = 0{,}446\ Mr^2;$$

$$I_y = I_z = 0{,}223\ Mr^2.$$

Задания для решения

1. Может ли повернуться человек, стоящий на идеально гладкой горизонтальной плоскости, если он начнет вращать руку над головой?

2. Определить величину прощающего момента m, под действием которого диск веса 20 кг и радиуса 10 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4t^2$.

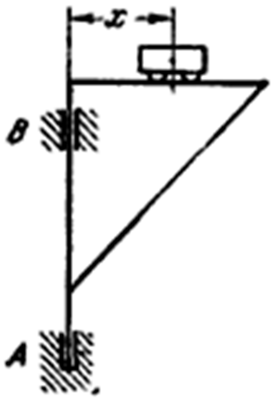


3. Вычислить главный момент количества движения

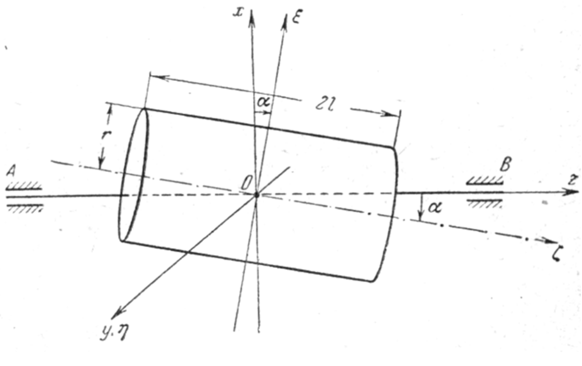
планетарной передачи относительно неподвижной оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC_3. Неподвижное колесо 1 и подвижное колесо 3 - одинакового радиуса r. Масса колеса 3 равна m. Колесо 2 массой m_2 имеет радиус r_2. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z. Массой кривошипа пренебречь. Колеса считать однородными дисками.

4. Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку $\boldsymbol{A}$ каната ухватился человек, к точке $\boldsymbol{B}$ подвязан груз одинакового веса с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью a относительно каната?

5. Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью v относительно стрелы. Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент, равный t_0. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния $\boldsymbol{x}$ тележки до оси вращения $\boldsymbol{AB}$, если вес тележки с грузом равен $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$ - момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения; вращение начинается в момент, когда тележка находится на расстоянии x_0 от оси $\boldsymbol{AB}$.



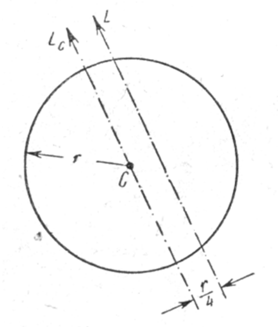
6. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием приложенной к нему системы сил. Чему должен быть равен главный момент внешних сил относительно оси



вращения для того, чтобы твердое тело вращалось: а) равномерно, б) равнопеременно.

7. Прямой однородный круглый цилиндр веса $\boldsymbol{P}$, длины $2l$ и с радиусом основания, равным r, прикреплен к горизонтальной оси $\boldsymbol{z}$, проходящей через его центр тяжести $\boldsymbol{O}$. Ось $\boldsymbol{z}$ образует с осью цилиндра ζ угол α. Вычислить центробежные моменты инерции цилиндра I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}. Ось x расположена в вертикальной плоскости.

8. Вычислить момент инерции и радиус инерции однородного круглого диска веса $\boldsymbol{P}$ и радиуса $\boldsymbol{r}$ относительно оси $\boldsymbol{L}$, лежащей в ее плоскости и отстоящей от центра тяжести $\boldsymbol{C}$ диска на расстоянии, равном четверти радиуса.



9. Однородная равносторонняя треугольная пластина имеет массу $\boldsymbol{M}$ и длину $\boldsymbol{l}$. Вычислить момент инерции пластины относительно оси $\boldsymbol{z}$, проходящей через вершину пластины перпендикулярно её плоскости.

10. Определить момент инерции однородного полого шара массы $\boldsymbol{M}$ относительно оси, проходящей через его центр тяжести.

РАЗДЕЛ 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5.1. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Теорема об изменении количества движения материальной точки.
2. Теорема об изменении количества движения механической системы.
3. Моменты количества движения материальной точки. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки.

Демонстрационный пример

Вычислить главный момент количеств движения относительно оси вращения диска ***M*** и радиуса ***r***, эксцентрично насаженного на ось вращения и вращающегося с угловой скоростью ω. Плоскость диска перпендикулярна к оси вращения. Эксцентриситет равен половине радиуса.

Решение. Направим вдоль оси вращения координатную ось **z**. Главный момент количества движения твердого тела относительно оси вращения $L_z = I_z\omega_z$, где I_z - момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Для вычисления I_z применяем теорему Штейнера. Мысленно проводя через центр тяжести ***C*** диска ось, параллельную оси **z**, найдем:

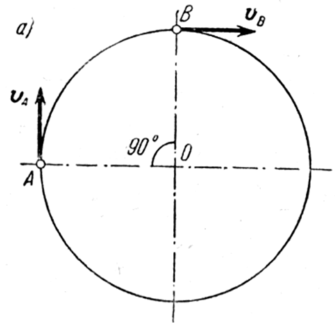
$$I_z = I_C + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{Mr^2}{2} + \frac{Mr^2}{4} = \frac{3}{4}Mr^2.$$

Итак, искомый главный момент количества движения рассматриваемого диска относительно оси вращения ***z*** дается формулой:

$$L_z = I_z\omega_z = \frac{3}{4}Mr^2\omega_z.$$

Задания для решения

1. Материальная точка массой m движется равномерно по окружности со скоростью v под действием некоторой системы сил. Определить импульс равнодействующей этой системы сил при перемещении

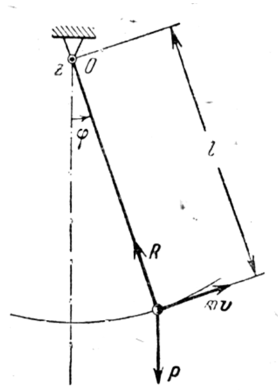


материальной точки по дуге четверти окружности из точки ***A*** в точку ***B***.

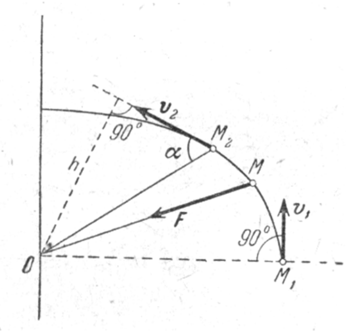
2. Каков должен быть коэффициент трения f колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды $v = 20$ м/с он останавливается через 6 сек после начала торможения.

3. Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.

4. Найти закон и период колебаний математического маятника, длина нити которого равна l. В начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$.



5. Материальная точка движется под действием центральной силы ***F***, линия действия которой неизменно проходит через точку ***O***. Найти скорость точки в положении M_2, если в положении M_1 ее скорость v_1 равнялась 4 м/с, причем $\dfrac{OM_1}{OM_2} = \dfrac{3}{2}$ и угол, образуемый скоростью v_2 с линией действия силы, $\alpha = 60^\circ$. Весом точки ***M*** пренебречь.



6. Шарик массы m, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости.

Определить движение шарика и натяжения нити ***T***, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно ***R***, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0.

7. Математический маятник, каждый размах которого длится одну секунду, называется секундным маятником и применяется для отсчета времени. Найти длину l этого маятника, считая ускорение силы тяжести равным 981 м/с^2. Какое время покажет этот маятник на Луне, где ускорение силы тяжести в шесть раз меньше земного? Какую длину l_1 должен иметь секундный лунный маятник?

8. В некоторой точке Земли секундный маятник отсчитывает время правильно. Будучи перенесен в другое место, он отстает на ***T*** секунд в сутки. Определить ускорение силы тяжести в новом положении секундного маятника.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Кинетическая энергия материальной системы. Кинетическая энергия твердого тела.

2. Потенциальное поле сил. Потенциальная энергия.

3. Уравнение баланса энергий. Полная энергия материальной системы.

Демонстрационный пример

Груз ***A*** веса ***P***, опускаясь по наклонной плоскости вниз со скоростью υ, приводит во вращение барабан ***B*** веса ***Q*** посредством намотанной на него веревки. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой веревки пренебречь.

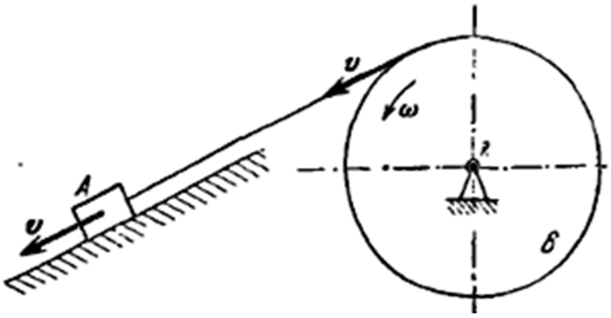


Рис 16. Пример

Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через скорость груза ***A*** (рис. 16).

Решение. Система состоит из двух масс: груза ***A*** и барабана ***B***. Следовательно, кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий груза $\mathrm{T}^{(1)}$ и барабана $\mathrm{T}^{(2)}$:

$$T = \mathrm{T}^{(1)} + \mathrm{T}^{(2)}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия груза, движущегося поступательно, вычисляется по формуле:

$$\mathrm{T}^{(1)} = \frac{1}{2} M \upsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \upsilon^2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка, находится по формуле:

$$\mathrm{T}^{(2)} = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \qquad (3)$$

где I_z - момент инерции барабана относительно оси вращения $\boldsymbol{z}$, а ω - угловая скорость вращения барабана. Барабан считаем сплошным однородным круглым цилиндром, поэтому:

$$I_z = \frac{Q}{g} \frac{r^2}{2}, \qquad (4)$$

где радиус барабана обозначен r. Подставив значение I_z из формулы (4) в формулу (3), имеем: $\mathrm{T}^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} r^2 \omega^2$. Учитывая, что скорость точки на ободе барабана равна скорости груза, получим: $\upsilon = r\omega$ и, следовательно,

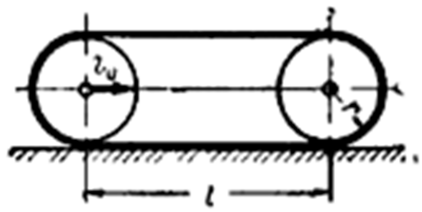
$$\mathrm{T}^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} \upsilon^2. \qquad (5)$$

После подстановки значений $\mathrm{T}^{(1)}$ и $\mathrm{T}^{(2)}$ из формул (2) и (5) в уравнение (1), находим искомую кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{2P + Q}{4g} \, \upsilon^2.$$

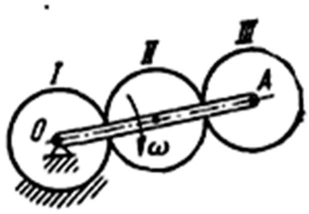
Задания для решения

1. Вычислить кинетическую энергию плоского механизма, состоящего из трех стержней $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{CD}$, прикрепленных цилиндрическими шарнирами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{D}$ к потолку и соединенных между собой шарнирами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Вес каждого из стержней $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$ длиной $\boldsymbol{l}$ равен P_1, вес стержня $\boldsymbol{BC}$ равен P_2, причем $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AD}$. Стержни $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{DC}$ вращаются с угловой скоростью ω.

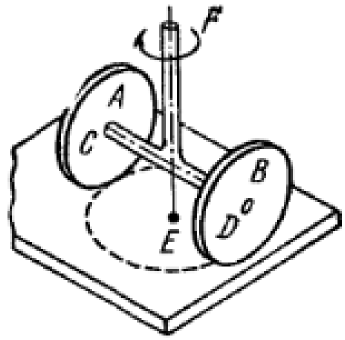


2. Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью υ_0. Расстояние между осями колес равно l, радиусы колес равны r, вес одного погонного метра гусеничной цепи равен γ.

3. Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение кривошипом $\boldsymbol{OA}$, соединяющим оси трех одинаковых колес I, II и III. Колесо I неподвижно; кривошип вращается с угловой скоростью ω. Вес каждого из колес равен $\boldsymbol{P}$, радиус каждого из колес равен r, вес кривошипа равен $\boldsymbol{Q}$. Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип - однородным стержнем. Чему равна работа пары сил, приложенной к колесу III?



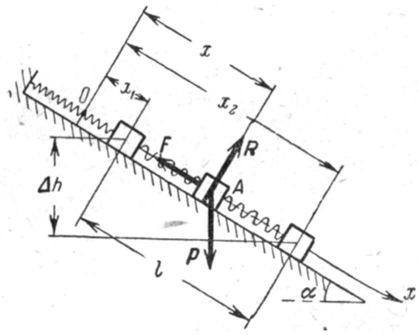
4. Мельничные бегуны $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ насажены на горизонтальную ось $\boldsymbol{CD}$, которая вращается вокруг вертикальной оси $\boldsymbol{EF}$; вес каждого бегуна 200 кг;



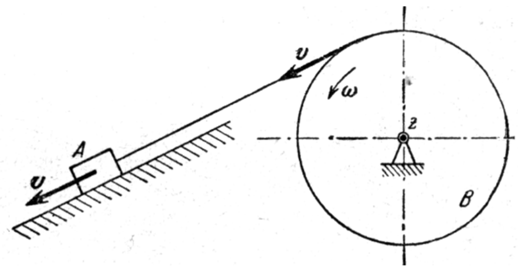
диаметры бегунов одинаковые, каждый равен 1 м; расстояние между ними ***CD*** равно 1 м. Найти кинетическую энергию бегунов, когда ось ***CD*** совершает 20 об./мин, допуская, что при вычислении моментов инерции бегуны можно рассматривать как однородные тонкие диски.

5. Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из двух колес, соединенных паровозным спарником ***AB*** и стержнем O_1O_2, если оси колес движутся со скоростью v_0. Вес каждого колеса равен P_1. Спарник ***AB*** и соединительный стержень O_1O_2 весят P_2 каждый. Масса более равномерно распределена по их ободам; $O_1\boldsymbol{A} = O_2B = r/2$, где r - радиус колеса. Колеса катятся без скольжения по прямолинейному рельсу.

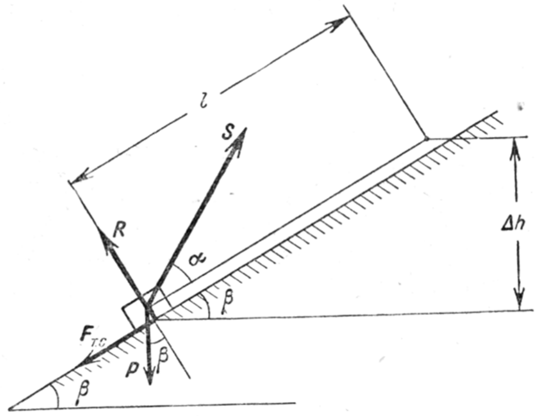
6. Груз ***A*** удерживается в равновесии на наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, посредствам пружины, ось которой параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости. Вследствие полученного толчка груз переместился вниз вдоль наклонной плоскости на l. Вычислить сумму работ сил, приложенных к грузу ***A*** на этом перемещении, если коэффициент упругости (жесткости) пружины равен c. Силой трения скольжения груза ***A*** о наклонную плоскость пренебречь.



7. Груз ***A*** веса ***P***, опускаясь по наклонной плоскости со скоростью v, приводит во вращение барабан ***B*** веса ***Q*** посредством намотанной на него веревки. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой веревки пренебречь. Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через скорость груза ***A***.



8. Груз веса $\boldsymbol{P}$ = *20 кг* поднимается по наклонной плоскости посредством веревки, расположенной под углом α = *30°* к плоскости. Наклонная плоскость образует угол β = *30°* с горизонтом. Натяжение веревки $\boldsymbol{S}$ = *15 кг*. В начальном положении груз находится в покое. Найти величину перемещения *l* груза вдоль наклонной плоскости в момент, когда груз имеет скорость *v* = *2 м\с*. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость *f* равен *0,2*.



9. Цилиндрический вал диаметра 10 см и массы 0,5 т, на который насажено маховое колесо диаметра 2 м и массы 3 т, вращается в данный момент с угловой скоростью 60 об./мин, а затем он предоставлен самому себе. Сколько оборотов ещё сделает вал до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05? Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу.

10. Однородная нить длины $\boldsymbol{L}$, часть которой лежит на гладком горизонтальном столе, движется под влиянием силы тяжести другой части, которая свешивается со стола. Определить промежуток времени $\boldsymbol{T}$, по истечении которого нить покинет стол, если известно, что в начальный момент длина свешивающейся части равна $\boldsymbol{l}$, а начальная скорость равна нулю.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5.3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ СИЛ. ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Вопросы для теоретической подготовки

1. Принцип виртуальных перемещений.
2. Выражение потенциальной энергии через обобщенные перемещения.
3. Использование принципа виртуальных перемещений в статике и динамике.

Демонстрационные примеры

Пример 1

Через блок $\boldsymbol{A}$ веса $\boldsymbol{P}$ переброшена нить, к концам которой привязаны груз $\boldsymbol{B}$ и каток $\boldsymbol{C}$ веса P_1, лежащий на идеально гладкой наклонной плоскости. Через каток $\boldsymbol{C}$, в свою очередь, переброшена нить, к концам которой привязаны груз D веса P_2 и груз $\boldsymbol{E}$ веса P_1, лежащий на параллельной идеально гладкой плоскости (рис. 17). Определить вес P_3 груза $\boldsymbol{B}$ и угол α, образуемый наклонными плоскостями с горизонтом, если система находится в равновесии. Весом нитей пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, так как для определения положения всех ее точек надо задать два независимых параметра. Один параметр должен определять положение груза $\boldsymbol{B}$, а второй - положение грузов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ по отношению к катку $\boldsymbol{C}$. Изобразим задаваемые силы: P - вес блока $\boldsymbol{A}$, P_1 - вес груза $\boldsymbol{E}$, P_2 - вес груза $\boldsymbol{D}$, P_3 - искомый вес груза $\boldsymbol{B}$ и P_4- вес катка $\boldsymbol{C}$. Силы реакций связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нити натянуты и нерастяжимы, наклонные плоскости идеально гладкие).

Дадим системе два независимых возможных перемещения (число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы): δr_B - возможное перемещение груза $\boldsymbol{B}$, направленное по вертикали вниз, и δr_D - возможное перемещение груза ***D***, также направленное по вертикали вниз.

Применим принцип возможных перемещении для составления уравнений равновесия системы. Число уравнений должно быть равно числу ее степеней свободы. Поэтому для данной системы и составим два уравнения равновесия.

Для составлении уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_D, будем считать возможное перемещение δr_B равным нулю, т. е. $\delta r_D \neq 0$, $\delta r_B = 0$ (это допустимо, т.к. возможные перемещения δr_D и δr_B являются независимыми). При этом груз ***B*** и каток ***C*** останутся в покое, груз ***D*** переместится на δr_D по вертикали вниз, а груз ***E*** переместится на δr_D параллельно наклонной плоскости вверх (рис. 17).

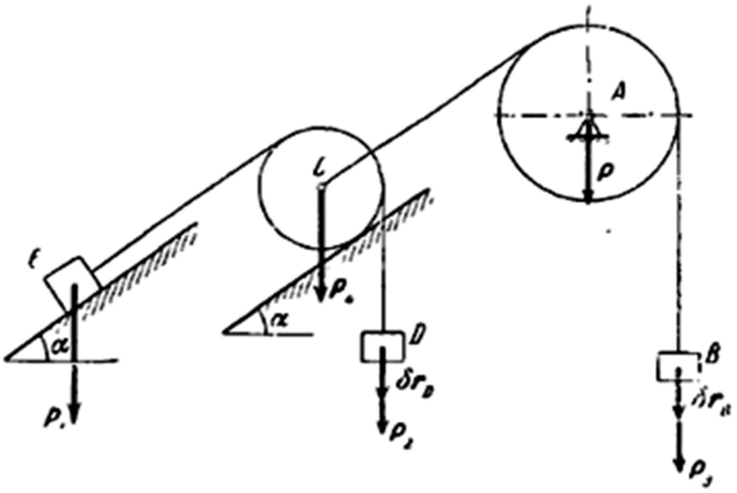


Рис. 17. Пример 1

Применив принцип возможных перемещении, получим:

$$P_2 \delta r_D - P_1 \delta r_D \sin\alpha = 0,$$

$$\sin\alpha = \frac{P_2}{P_1}. \qquad (1)$$

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_B, будем считать возможное перемещение δr_D равным нулю, т. е. $\delta r_D = 0$, $\delta r_B \neq 0$. При этом грузы ***D*** и ***E*** по отношению к катку ***C*** останутся в покое, груз ***B*** переместится на δr_B по вертикали вниз, а каток ***C*** с грузами ***D*** и ***E*** переместится на δr_B параллельно наклонной плоскости вверх. Применив принцип возможных перемещений, имеем:

$$P_3\delta r_B - P_1\delta r_B \sin\alpha - P_2\delta r_B \sin\alpha - P_4\delta r_B \sin\alpha = 0,$$

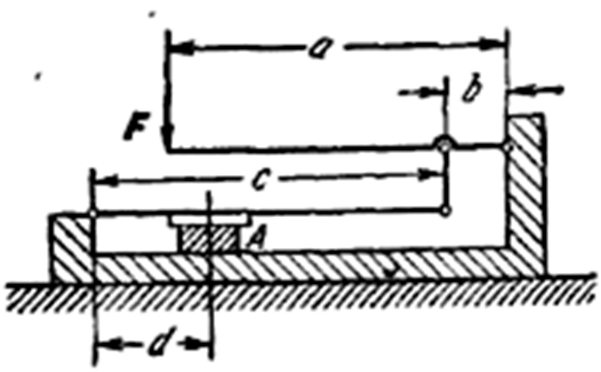
$$P_3 = (P_1 + P_2 + P_4)\sin\alpha. \qquad (2)$$

Подставив в формулу (2) значение sin α из формулы (1), найдем искомую величину веса P_3 груза ***B***:

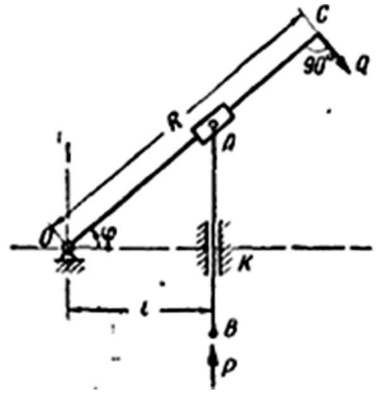
$$P_3 = \frac{P_2}{P_1}(P_1 + P_2 + P_4).$$

Задания для решения

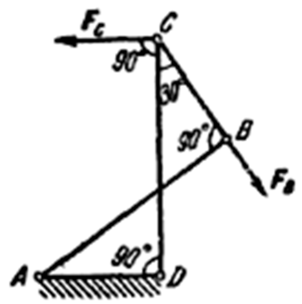
1. Определить модуль силы ***Q***, сжимающей образец ***A*** в рычажном прессе, изображенном на чертеже. Дано: ***F*** = 100 Н, *a* = 60 см, *b*=10 см, *c* = 60 см, *d* = 20 см.



2. В кулисном механизме при качании рычага ***OC*** вокруг горизонтальной оси ***O*** ползун ***A***, перемещаясь вдоль рычага ***OC***, приводит в движение стержень ***AB***, движущийся в вертикальных направляющих ***K***. Даны размеры: ***OC*** = ***R***, ***OK*** = ***l***.

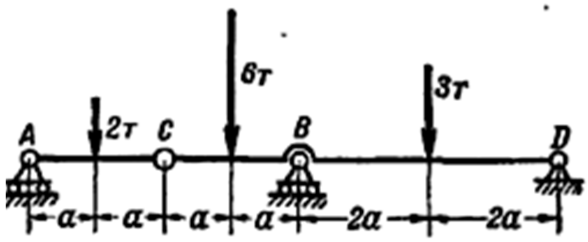


3. В механизме антипараллелограмма ***ABCD*** звенья ***AB***, ***CD*** и ***BC*** соединены цилиндрическими шарнирами ***B*** и ***C***, а цилиндрическими шарнирами ***A*** и ***D*** прикреплены к стойке ***AD***. К звену ***CD*** в шарнире ***C*** приложена горизонтальная сила F_C. Определить модуль силы F_B,

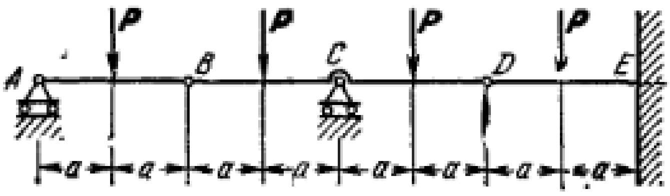


приложенной в шарнире $\boldsymbol{B}$ перпендикулярно к звену $\boldsymbol{AB}$, если механизм находится в равновесии в положении, указанном на чертеже. Дано: $\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{ADC} = 90°$, $\boldsymbol{DCB} = 30°$.

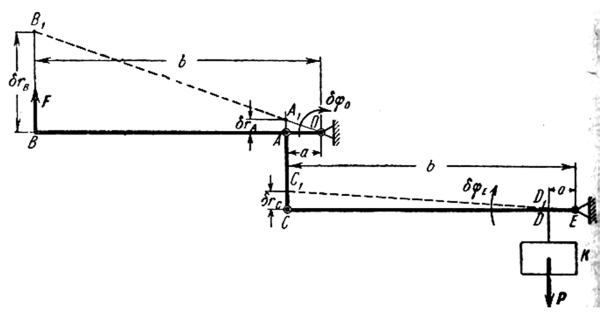
4. Составная балка $\boldsymbol{AD}$, лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке $\boldsymbol{C}$. На балку действуют вертикально силы, равные 2, 6 и 3 т. Размеры указаны на чертеже. Определить реакции опор $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$. Определить вращающий момент, который надо приложить на участке $\boldsymbol{BD}$ к балке $\boldsymbol{AD}$, для того чтобы опорная реакция в $\boldsymbol{D}$ равнялась нулю.



5. Составная балка $\boldsymbol{AE}$, лежащая на двух опорах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}$, состоит из трех балок $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BD}$ и $\boldsymbol{DE}$, шарнирно соединенных в $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$. Балка $\boldsymbol{DE}$ в сечении $\boldsymbol{E}$ защемлена в стене. Определить вертикальную составляющую реакции в сечении $\boldsymbol{E}$. К балкам приложены четыре равные вертикальные силы $\boldsymbol{P}$. Размеры указаны на чертеже.



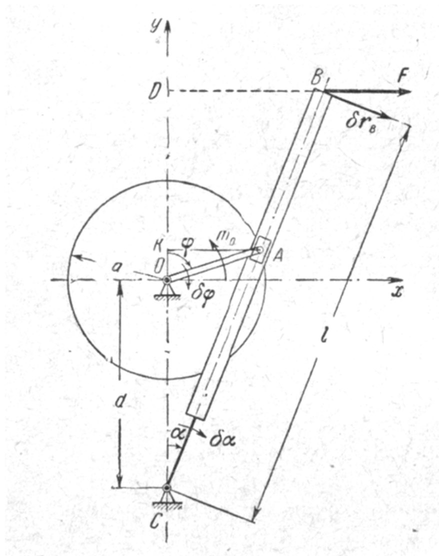
6. На рисунке изображена система рычагов, применяемая для подъема груза $\boldsymbol{K}$, подвешенного к нижнему рычагу в точке $\boldsymbol{D}$. Подъем совершается посредством силы $\boldsymbol{F}$, направленной по вертикали вверх и



приложенной в точке **B** верхнего рычага. Определить вес **P** поднимаемого груза **К**, если **F** = *10 кг*, а $\frac{b}{a} = 10$.

7. Используя принцип возможных перемещений, вывести уравнения равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

8. На рисунке изображена качающаяся кулиса, приводящая в движение стол поперечно строгального станка. К рамке кулисы в точке **B** приложена горизонтальная сила **F**. Определить величину момента m_0 пары сил, которую надо приложить к кривошипу ***OA*** для того, чтобы механизм находился в равновесии в положении, указанном а рисунке. Весами деталей механизма пренебречь; $OA = r$, $OC = d$, $CB = l$.



РАЗДЕЛ 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ.

Вопросы для теоретической подготовки

1. Уравнение Лагранжа первого рода.
2. Кинетический потенциал. Уравнение Лагранжа второго рода для консервативной системы.

Демонстрационный пример

Груз ***A*** веса ***P*** движется под действием силы ***F*** вверх по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К грузу ***A*** привязан конец нити, намотанной на барабан ***B*** радиуса r. Барабан вращается вокруг неподвижной оси ***C***, перпендикулярной к плоскости рисунка. К барабану приложена пара сил полезного сопротивления с моментом m_c, направленным в сторону, противоположную вращению барабана.

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу. Нить считать нерастяжимой и массой ее пренебречь. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f.

Решение.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение на наклонной плоскости груза ***A*** определяет положение барабана ***B***.

Выберем координату s груза ***A*** в качестве обобщенной координаты,

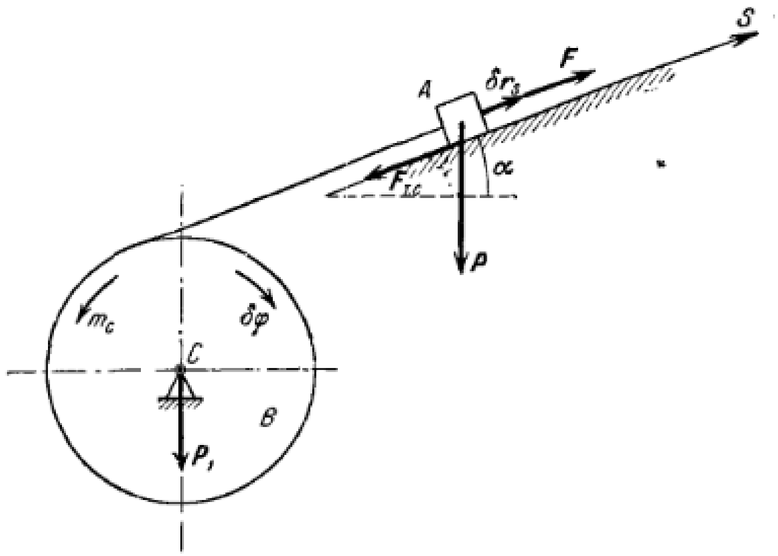


Рис. 18. Пример

направив ось s вдоль наклонной плоскости вверх. Обозначим вес барабана P_1.

К системе приложены задаваемые силы: P - вес груза ***A***, P_1 - вес барабана ***B***, F - сила, приложенная к грузу, пара сил полезного сопротивления с моментом m_c.

Негладкая наклонная плоскость не является идеальной связью. Поэтому к задаваемым силам следует добавить силу трения скольжения $F_{т.c}$ груза о наклонную плоскость, направленную в сторону, противоположную движению, т. е. вдоль наклонной плоскости вниз и равную по модулю $F_{т.c} = f\,N = f\,P\cos\alpha$.

Дадим грузу ***A*** обобщенное возможное перемещение δr_s в сторону возрастания s, т. е. параллельно наклонной плоскости вверх.

При этом барабан ***B*** получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, связанное с δr_s зависимостью:

$$\delta r_s = r\delta\varphi \tag{1}$$

Вычислим сумму работ задаваемых сил и силы трения скольжения $F_{т.c}$ на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δr_s:

$$\delta A = \delta A(P) + \delta A(F) + \delta A(F_{т.c}) + \delta A(P_1) + \delta A(m_c). \tag{2}$$

Находим:

$$\delta A(P) = -P\delta r_s \sin\alpha, \tag{3}$$

$$\delta A(F) = F\delta r_s, \tag{4}$$

$$\delta A(F_{т.c}) = -F_{т.c}\delta r_s = -fP\cos\alpha\delta r_s, \tag{5}$$

$$\delta A(P_1) = 0, \tag{6}$$

так как точка приложения силы P_1 неподвижна,

$$\delta A(m_c) = -m_c\delta\varphi. \tag{7}$$

Воспользовавшись формулами (1), (3), (4), (5), (6) и (7), представим (2) в виде:

$$\delta A = \left[F - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{m_c}{r}\right]\delta r_s. \tag{8}$$

Обобщенной силой Q_s является коэффициент, стоящий в формуле (8) при обобщенном возможном перемещении δr_s, т. е.:

$$Q_s = F - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{m_c}{r}.$$

Если бы в качестве обобщенной координаты мы выбрали угол поворота барабана φ, считая его положительным по часовой стрелке, то мы дали бы обобщенное возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в том же направлении. При этом формулы (3), (4), (5), (6) и (7) приняли бы соответственно вид:

$$\delta A(P) = -Pr\delta\varphi\sin\alpha, \qquad \delta A(F) = Pr\delta\varphi,$$

$$\delta A(F_{т.c}) = -fPr\delta\varphi\cos\alpha,$$

$$\delta A(P_1) = 0, \;\; \delta A(m_c) = -m_c\delta\varphi.$$

После подстановки этих значений в формулу (2) мы получили бы:

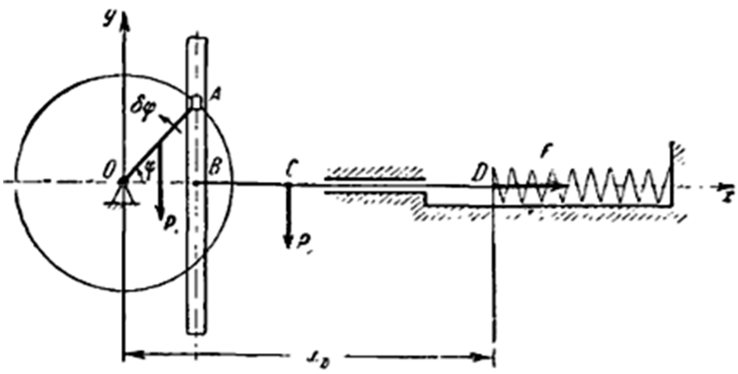
$$\delta A = [Fr - Pr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - m_c]\delta\varphi.$$

Обобщенной силой Q_φ явился бы коэффициент, стоящий при δφ, т. е.:

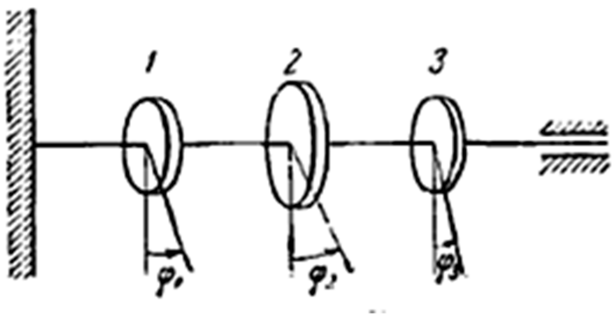
$$Q_\varphi = Fr - Pr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - m_c.$$

Задания для решения

1. Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу в случае кулисного механизма, изображенного на рисунке. К концу ***D*** штока ***BO*** кулисы прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой равен *c*. При крайнем правом положении кулисы пружина не деформирована. Вес кривошипа ***OA*** равен P_1, r - длина кривошипа. Массами камня ***A*** кулисы и пружины пренебречь. Кривошип ***OA*** считать однородным стержнем. Механизм расположен в вертикальной плоскости. Силами сопротивления пренебречь.



2. На горизонтальный упругий вал, заделанный одним концом в стену, насажены три диска. Выбрать обобщенные координаты и определить им соответствующие обобщенные силы, если центры тяжести дисков



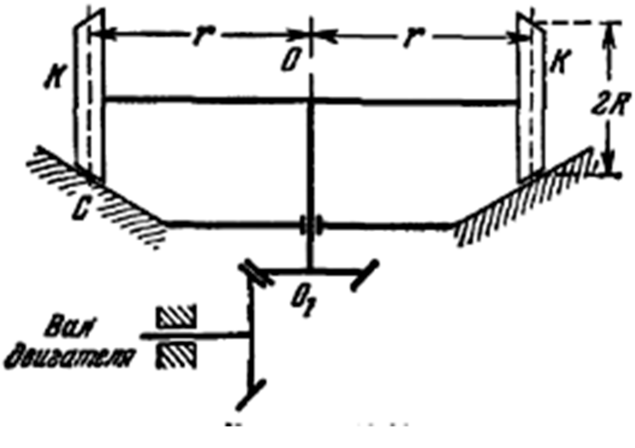
расположены на геометрической оси вращения. Коэффициент упругости вала равен c.

3. Наклонная призма ***A*** веса P_1 движется под действием горизонтальной силы ***F*** по гладкой горизонтальной плоскости. Вдоль гладкой наклонной плоскости призмы, расположенной под углом α к горизонту, скользит доска ***B*** веса P_2. По доске ***B*** катится без скольжения цилиндр ***D*** веса P_3. Силами трения пренебречь. Выбрать обобщенные координаты и найти им соответствующие обобщенные силы.

4. Груз ***M***, весящий 101 кг, поднимает с помощью полиспаста груз M_1, который вместе с подвижной обоймой весит 320 кг. Всех блоков четыре; большие блоки весят по 16 кг, малые - по 8 кг, радиусы больших блоков равны r, радиусы малых равны r_1. Определить ускорение груза ***M***. При определении энергии блоков предполагаем, что массы их равномерно распределены по окружности.

5. Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки ***M*** массы m, подвешенной на нити, навернутой на неподвижный цилиндр радиуса r. Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l. Массой нити пренебречь.

6. Бегуны К-К приводятся в движение от вала двигателя при помощи передачи, схема которой показана на чертеже. Вес

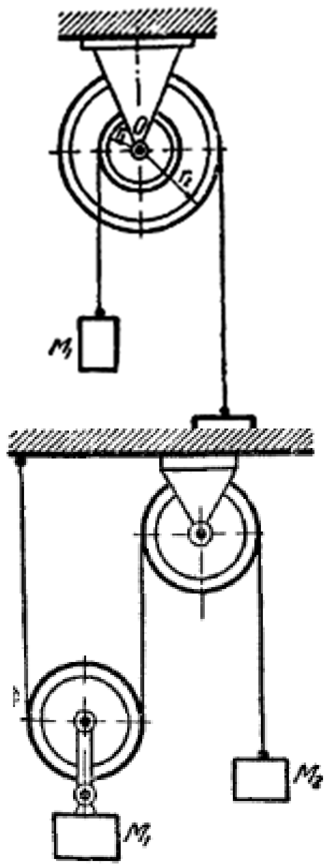


одного бегуна равен 3 т, средний радиус $\boldsymbol{R}$ = l м, радиус вращения r = 0,5 м. Считаем, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через среднюю точку $\boldsymbol{C}$ обода. Отношение радиусов колес конической передачи от двигателя к вертикальному валу $O_1\boldsymbol{O}$ равно 2/3. Бегун считаем однородным диском радиуса $\boldsymbol{R}$ и пренебрегаем массой всех движущихся частей по сравнению с массой бегунов. Вычислить, какой постоянный вращающий момент должен быть приложен на валу двигателя, чтобы сообщить вертикальной оси $O_1\boldsymbol{O}$ угловую скорость 120 об./мин по истечении 10 с от момента пуска двигателя; силами сопротивления пренебречь.

7. Два груза с массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный невесомый блок. Определить уравнения движения грузов и реакцию нитей, если в начальный момент система находилась в покое, а свисавшие с блока участки нити, поддерживающие первый и второй грузы, соответственно равнялись l_1 и l_2.

8. Вывести дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, воспользовавшись уравнениями Лагранжа.

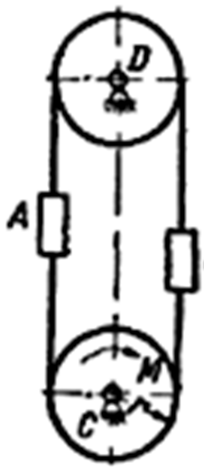
9. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, воспользовавшись уравнениями Лагранжа. Два груза, M_1 весом P_1 и M_2 весом P_2, подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на чертеже, на барабаны, имеющие радиусы r_1 и r_2 и насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием силы тяжести.



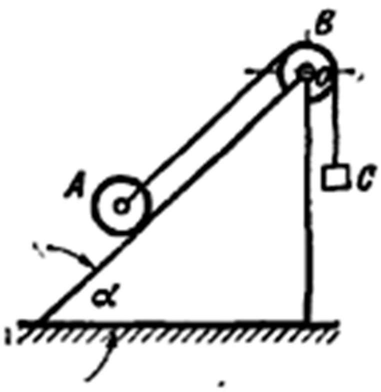
Определить угловое ускорение барабанов, пренебрегая их массами и массой нитей.

10. К системе блоков, изображенной на чертеже, подвешены грузы: M_1 весом 10 Н и M_2 весом 8 Н. Определить ускорение ω_2 груза M_2 и натяжение нити, пренебрегая массами блоков.

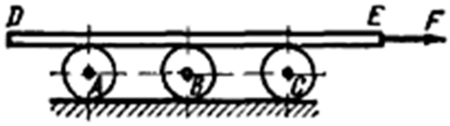
11. К нижнему шкиву C подъемника приложен вращающий момент M. Определить ускорение груза $\boldsymbol{A}$ весом P_1, поднимаемого вверх, если вес противовеса $\boldsymbol{B}$ равен P_2, а шкивы $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ радиуса r и веса $\boldsymbol{Q}$ каждый представляют собой однородные цилиндры. Массой ремня пренебречь.



12. Каток $\boldsymbol{A}$ весом $\boldsymbol{Q}$, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок $\boldsymbol{B}$, груз $\boldsymbol{C}$ весом $\boldsymbol{P}$. При этом блок $\boldsymbol{B}$ вращается вокруг неподвижной оси $\boldsymbol{O}$, перпендикулярной к его плоскости. Каток $\boldsymbol{A}$ и блок $\boldsymbol{B}$ - однородные круглые диски одинакового веса и радиуса. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. Определить ускорение оси катка.



13. Стержень $\boldsymbol{DE}$ весом $\boldsymbol{Q}$ лежит на трех катках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ весом $\boldsymbol{P}$ каждый. К стержню приложена по горизонтали вправо сила $\boldsymbol{F}$, приводящая в движение стержень и катки. Скольжение между



стержнем и катками, а также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует. Найти ускорение стержня ***DE***. Катки считать однородными круглыми цилиндрами.

14. Человек толкает тележку, приложив к ней горизонтальную силу ***F***. Определить ускорение кузова тележки, если масса кузова равна M_1, M_2 – масса каждого из четырех колес, r – радиус колес, f_k – коэффициент трения качения. Колеса считать сплошными круглыми дисками, катящимися по рельсам без скольжения.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Диевский, В. А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Диевский. - Издание 2-е, исправленное. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 320 с. - Гриф УМО "Рекомендовано".

Дополнительная литература

1. Теоретическая механика. Кинематика. Практикум / В.А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А.В. Чигарева. - Электрон. текстовые дан. – Минск : Новое знание; Москва : ИНФРА-М, 2011. – ISBN 978-985-475-457-4.– URL: http://www.znanium.com/bookread.php?book=235510 . – (дата обращения 14.01.2020). – Текст электронный.
2. Цывильский, В. Л. Теоретическая механика / В. Л. Цивильский .– Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2014. – 368. с.- ISBN 978-5905554-48-3 . – URL: http://znanium.com/bookread2.php?book=443436. – (дата обращения: 14.01.2020).
3. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки : учебник / Н. Н. Бухгольц. – Москва : Лань, 2009. – 480 с. – ISBN 978-5-8114-0919-8.- URL: http://e.lanbook.com/books/element.php? pl1_cid=25&pl1_id=32. – (дата обращения 14.01.2020)
4. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 2. Динамика системы материальных точек: учебник / Н. Н. Бухгольц. – Москва : Лань, 2009. – 336 с. ISBN 978-5-8114-0920-4.- URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=33. – (дата обращения 14.01.2020)